

GERAK PHOTON DALAM MEDAN GRAVITASI JANG KUAT DISEKITAR BINTANG JANG MAMPAT.

Winardi Sutantyo

Observatorium Bosscha, I.T.B.

(Diterima 1 Djuni 1971).

RINGKASAN.

Dalam tulisan ini, review mengenai gerak photon dalam medan gravitasi jang kuat diberikan. Photon jang dipantjarkan dari sekitar atau dalamnja sebuah bintang jang sangat mampat dapat lepas, djatub kembali, atau bergerak dalam orbit lingkaran, bergantung pada arah mula² dari ketjepatan photon.

ABSTRACT.

In this paper, a review of the motion of photons in a strong gravitational field is given. Photon which are emitted from the neighborhood or from within a superdense star, may escape, falling or moving in a circular orbit, depending on the initial direction of the photons.

1. Pendahuluan.

Dalam teori relativitas umum disebutkan bahwa tjahaja dibawah pengaruh medan gravitasi akan mengalami tiga matjam pengaruh. Pertama, bila diamati oleh pengamat jang djauh, pandjang gelombang tjahaja akan bertambah besar. Kedua, ketjepatan tjahaja akan diperlambat. Dan jang ketiga, arah lintasan tjahaja akan dibelokkan. Pengaruh jang ketiga inilah jang akan dibahas dalam tulisan ini.

Pulsar, jaitu benda² langit jang ditemukan oleh Hewish et al. (1968), diduga adalah bintang² neutron jang rapat massanja sanga ttinggi, jaitu dalam orde 10^{13} gram tiap cm^3 atau lebih. Bintang² jang semampat ini akan menimbulkan medan gravitasi jang sangat kuat disekitar bintang² tersebut.

Maksud tulisan ini adalah untuk membahas bagaimanakah pengaruh medan gravitasi dari bintang² sematjam itu pada lintasan tjahaja atau photon jang bergerak disekitar bintang² tersebut.

2. Persamaan gerak tjahaja.

Atkinson (1965) mempostulatkan geometri ruang-waktu jang dinjatakan oleh metrik jang orthogonal, simetri sferis dan statis dalam bentuk jang sangat umum dimana sebagai titik pangkal koordinat diambil pada pusat bintang, jaitu

$$ds^2 = -e_{\rho} dr^2 - e^{\sigma} r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) + e^{\tau} c^2 dt^2, \dots\dots\dots (1)$$

ρ , σ dan τ merupakan fungsi² yang hanya bergantung pada r . Karena geometri ruang-waktu menjadi Euclidean ditempat yang djauh maka untuk $r \rightarrow \infty$ harga² ρ , σ dan τ adalah nol.

Dengan memetjahkan persamaan null geodesik, Atkinson (1965, pers. 10 dan 25) memperoleh persamaan gerak photon sbb.:

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = h e^{\tau-\sigma}, \quad (2)$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = c^2 e^{\tau-\rho} \left[1 - \frac{h^2}{c^2} \frac{e^{\tau-\sigma}}{r^2} \right], \quad (3)$$

dimana h adalah konstanta integrasi. Dalam persamaan ini diambil bidang $\theta = \frac{\pi}{2}$ sebagai bidang gerak photon. Dari kedua persamaan diatas dapat ditentukan persamaan lintasan dari photon:

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = c^2 e^{-\tau-\rho} \left[\Lambda - \frac{e^{\tau-\sigma}}{r^2} \right], \quad (4)$$

dimana $\Lambda = c^2/h^2$.

Dalam pengaruh medan gravitasi yang sangat kuat, defleksi dari gerak photon dapat sedemikian besarnya sehingga photon bergerak dalam orbit lingkaran. Dengan mengambil $dr/dt = d^2r/dt^2 = 0$ sebagai syarat photon yang bergerak dalam orbit lingkaran, Atkinson (1965, pers. 33) mendapatkan

$$r(\tau' - \sigma') = 2 \quad (5)$$

tebagai persamaan untuk radius orbit lingkaran photon (simbol dengan apos-srop menundjukkan diferensiasi terhadap r).

3. Orbit lingkaran photon diluar dan didalam bintang.

Disekeliling sebuah bintang dengan massa M dimana tidak terdapat distribusi materi, geometri ruang-waktu dapat dijatakan oleh metrik (lihat Mc Vittie, 1962, hal. 83).

$$ds^2 = - \frac{1}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) + \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 dt^2 \dots (6)$$

dimana

$$m = \frac{GM}{c^2} \quad (7)$$

G adalah konstanta gravitasi. Ini disebut metrik Schwarzschild eksterior dan hanya berlaku diluar bintang dimana tak terdapat distribusi materi. Metrik ini diturunkan dengan memetjahkan persamaan medan gravitasi Einstein dimana diambil tensor energi momentumnya nol dan konstanta integrasi diambil sedemikian hingga sebagai aproksimasi pertamanya diperoleh persamaan gerak dalam medan gravitasi Newton jaitu $d^2r/dt^2 = -GM/r^2$.

Dengan mengandaikan berlakunya metrik Schwarzschild eksterior maka dari pers. (5) diperoleh bahwa radius orbit lingkaran $r_o = 3m$ (untuk bintang jang massanja sama dengan massa matahari $r_o = 4,434 \text{ km}$). Karena metrik Schwarzschild eksterior hanja berlaku diluar bintang maka agar photon dapat bergerak dalam orbit lingkaran haruslah $r_b < r_o$, dimana r_b adalah radius bintang.

Bilamana dianggap bahwa rapat massa didalam bintang konstan, maka geometri ruang-waktu didalam bintang jang massanja M dan radiusnja r_b dapat dinjatakan oleh metrik Schwarzschild interior jaitu (lihat Chiu, 1965, hal. 91),

$$ds^2 = - \left(\frac{dr^2}{1 - r^2/R^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 \right) + \frac{1}{4} (3\sqrt{1 - r_b^2/R^2} - \sqrt{1 - r^2/R^2})^2 c^2 dt^2 \dots\dots\dots(8)$$

dimana

$$R^2 = r_b^3/2m \quad , \quad m = GM/c^2 \quad (9)$$

dan $0 < r < r_b$. Dari pers. (5) dapat diperoleh bahwa radius orbit lingkaran didalam bintang adalah:

$$r_o = \frac{r_b}{3} \left[\frac{r_b}{m} \frac{4r_b - 9m}{r_b - 2m} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

Agar photon dapat bergerak dalam orbit lingkaran didalam sebuah bintang, harus dipenuhi bahwa $r_o < r_b$, atau (dengan menggunakan pers. 10) radius bintang $r_b < 3m$.

Perlu dikemukakan disini bahwa dalam hal berlakunya metrik Schwarzschild harus selalu dipenuhi bahwa radius bintang $r_b > 2m$. Bilamana $r_b < 2m$ maka akan ada daerah dimana tanda faktor dari dt dalam metrik (6) mendjadi negatif, dan ini tidak menggambarkan geometri ruang-waktu jang riil (Landau dan Lifshitz, 1951, hal. 256). *) Daerah ini disebut daerah "singularitas Schwarzschild".

4. Sjarat photon tertarik kembali oleh medan gravitasi.

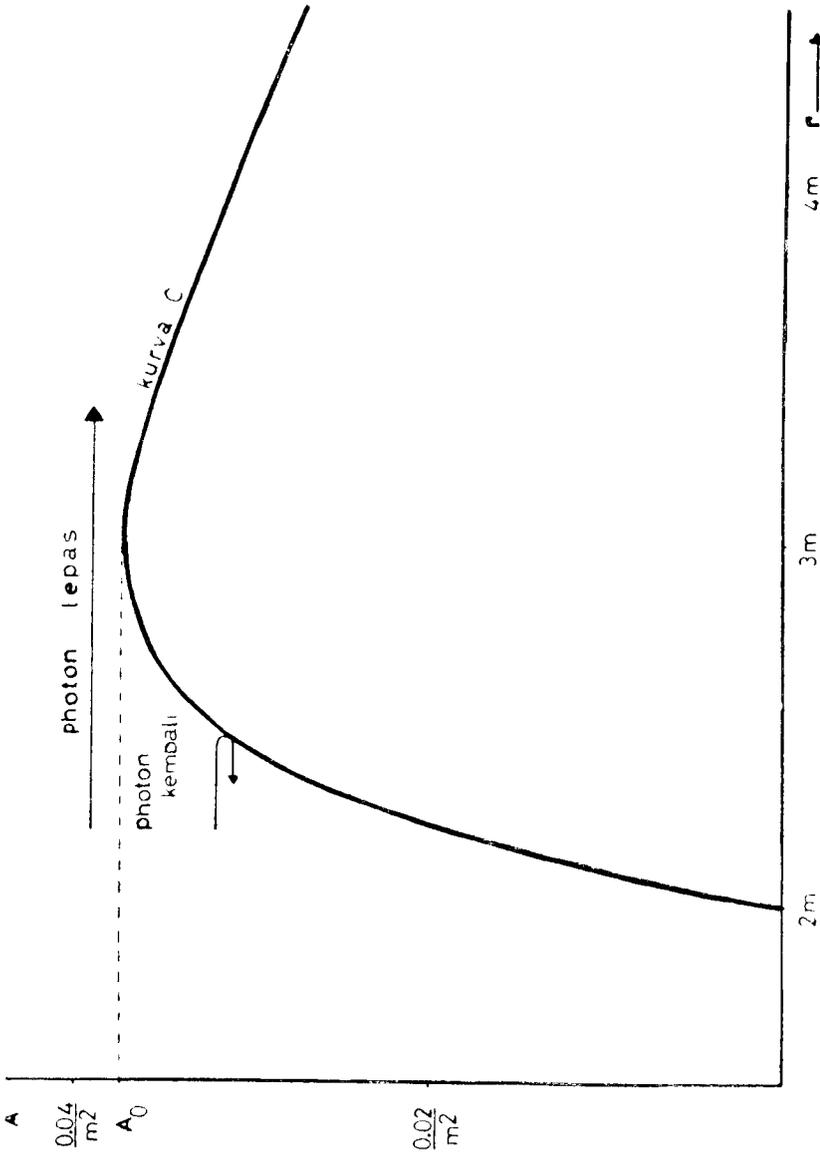
Medan gravitasi jang kuat disekitar sebuah bintang memungkinkan photon jang dipantjarkan disekitar bintang tersebut dilengkungkan geraknja hingga djatuh kembali ke bintang. Syngge (1966) menentukan sjarat² agar photon bergerak djatuh ke bintang dengan menggunakan metrik Schwarzschild eksterior. Tjara Syngge tersebut akan dibtjarakan disini dengan menggunakan bentuk metrik jang umum jaitu pers. (1).

*) Dalam Landau dan Lifshitz (1951) untuk komponen² metrik digunakan tanda $+++ -$, bukannya $--- -$ seperti dalam tulisan ini, djadi faktor dari dt djustru harus negatif.

Dari pers. (3) djelas bahwa untuk gerak suatu photon harus dipenuhi

$$A > \frac{e^{\tau} - \sigma}{r^2} \tag{11}$$

Beberapa sifat dari gerakan photon dapat dilihat dengan membuat diagram A terhadap r (Gambar 1). Bagi suatu photon harga A selalu konstan, maka gerak photon dalam diagram tersebut adalah lurus dalam arah horizontal.



Gambar 1. Diagram A terhadap r. Kurva C digambarkan dalam hal berlakunya metrik Schwarzschild eksterior.

Bilamana dalam diagram tersebut digambarkan kurva $A = e^{\tau - \sigma}/r^2$ (kita sebut kurva C), maka berhubung dengan syarat (11) titik² representasi photon dalam diagram tidak mungkin terletak dibawah kurva C. Daerah tersebut merupakan „daerah terlarang”.

Misalkan kurva C mentjapai harga maksimum $A = A_0$ pada $r = r_0$. Dapat ditunjukkan bahwa r_0 akan memenuhi pers. (5), djadi r_0 tak lain adalah radius orbit lingkaran photon.

Misalkan photon dipantjarkan dari titik $r = r_s$ dimana $r_s < r_0$ dan photon bergerak kearah luar. Bilamana untuk photon tersebut $A < A_0$, photon akan bergerak kekanan hingga bertemu dengan kurva C. Dan karena daerah disebelah kanan kurva C merupakan daerah terlarang, photon akan bergerak kembali djatuh ke bintang. Tetapi bila $A > A_0$, photon akan bergerak mentjapai tempat tak hingga.

Bilamana photon dipantjarkan dari titik $r = r_s$ dimana $r_s > r_0$ dan photon bergerak kearah luar, maka semua photon akan lepas ketempat tak terhingga.

Djadi syarat agar photon tertarik djatuh kembali ke bintang, photon harus dipantjarkan dari $r_s < r_0$ dan harus dipenuhi,

$$A < A_0 \quad (12)$$

Bila $A > A_0$ photon akan lepas dan bilamana $A = A_0$ photon akan mentjapai radius $r = r_0$ dan bergerak dalam orbit lingkaran. Orbit lingkaran ini tidak stabil, gangguan sedikit sadja akan menjebakkan photon bergerak spiral djatuh kembali ke bintang atau lepas ketempat tak hingga.

5. Arti fisis A.

Harga A sebuah photon ditentukan oleh sudut arah pementjarannya. Misalkan photon dipantjarkan dari $r = r_s$ dengan sudut arah ψ terhadap arah normal. Untuk geometri ruang-waktu dinjatakan oleh metrik (1), sudut ψ didefinisikan memenuhi

$$\cot \psi = \frac{e^{\frac{1}{2}\rho}}{e^{\frac{1}{2}\sigma}} \frac{1}{r} \frac{dr}{d\psi} \quad (13)$$

Dari pers. 2 (11) dan (13) maka ketidaksamaan (12) dapat dituliskan:

$$\sin^2 \psi > \frac{e^{\tau_s - \sigma_s}}{e^{\tau_0 - \sigma_0}} \frac{r_0^2}{r_s^2} \quad (14)$$

dimana $r_s < r_0$ (indeks² s dan o pada τ dan σ masing² berarti harga² fungsi τ dan σ pada r_s dan r_0). Ini adalah syarat agar photon djatuh kembali ke bintang.

Syarat ini dapat dituliskan,

$$\psi > \psi_{kr} \quad (15)$$

dimana sudut ψ_{kr} didefinisikan sbb.:

$$\sin^2 \psi_{kr} = \frac{e^{\tau_s - \sigma_s} r_o^2}{e^{\tau_o - \sigma_o} r_s^2} \quad (16)$$

ψ_{kr} disebut sudut kritis. Djadi agar tertarik kembali ke bintang photon harus dipantjarkan sedemikian hingga sudut arah pemantjaran terletak diluar suatu kerutjut batas dengan setengah sudut puntjak ψ_{kr} . Bilamana $\psi = \psi_{kr}$ photon akan bergerak dalam orbit lingkaran, sedangkan bilamana $\psi < \psi_{kr}$ photon akan lepas. Dengan menggunakan metrik Schwarzschild eksterior, Sygne (1966) memperoleh,

$$\sin^2 \psi_{kr} = \frac{27 m^2 (r_s - 2m)}{r_s^3} \quad (17)$$

Dapat dilihat, bila $r_s \rightarrow 2m$, maka $\psi_{kr} \rightarrow 0$, artinja hanya photon jang dipantjarkan dengan arah radial jang dapat lepas.

Tjara seperti diatas djuga dapat digunakan untuk menindjau apakah ada tjahaja jang dipantjarkan dari dalam bintang jang tidak dapat lepas keluar permukaan bintang tersebut. Jaffe (1970), dengan menganggap berlakunja metrik Schwarzschild interior untuk daerah didalam bintang, menundjukkan bila radius bintang $r_b < 3m$ ada kerutjut batas dimana tjahaja jang dipantjarkan dengan arah didalamnja akan lepas keluar permukaan bintang, sedang jang dipantjarkan dengan arah diluarnja tidak mungkin lepas. Tetapi bila $r_b > 3m$, semua tjahaja lepas.

6. Kesimpulan.

Dari uraian diatas dapat ditarik kesimpulan bahwa bintang jang radiusnja terletak antara $2m$ dan $3m$ akan memiliki medan gravitasi jang sangat kuat jang mampu mengikat sebagian photon jang dipantjarkan dari dalam atau luar bintang. Photon tersebut akan bergerak dalam orbit lingkaran atau djatuh kembali ke bintang.

Bilamana radius bintang mendekati harga $2m$ (djadi bintang hampir „masuk” dalam daerah singularitas Schwarzschild) maka hanya photon jang dipantjarkan dengan arah radial jang dapat lepas. Dengan demikian sebagian besar photon akan djatuh kembali ke bintang dan bintang hampir tidak mungkin dilihat.

Untuk bintang jang massanja sama dengan massa matahari peristiwa penangkapan kembali photon tersebut hanya bisa terdjadi kalau rapat massa rata² bintang jaitu $\bar{\rho} = 3M/4\pi r_b^3$ lebih besar dari $5,4 \times 10^{15}$ gram per cm^3 . Ini adalah orde rapat massa bintang² neutron. Djadi mungkin sekali didalam

Galaksi kita ini terdapat banjak bintang² neutron jang tidak terlihat karena tjahajanja tidak sampai pada kita. Apakah medan gravitasi disekitar pulsar tjukup kuat untuk menarik kembali sebagian tjahaja jang dipantjarkannya, ini belum dapat ditest setjara observasi.

Tulisan ini merupakan sebagian dari tugas penulis guna melengkapi sjarat² untuk menjapai tingkat sardjana astronomi. Terimakasih penulis utjapkan pada Drs. Jorga Ibrahim M.Sc. jang telah membimbing serta memberikan saran² dalam tugas ini. Djuga penulis utjapkan terima kasih pada Dr. Tjia May On dan Dr. Bambang Hidajat jang telah berkenan memeriksa tulisan ini dengan teliti.

DAFTAR BATJAAN:

- Atkinson, R. d'E., 1965, *Astron. J.*, **70**, 517.
- Chiu, H. Y., 1965, *Neutrino Astrophysics* (Gordon and Breach, New York).
- Hewish, A., Bell, S.J., Pilkington, J.D.H., Scott, P.F., and Collins, R.A., 1968, *Nature*, **217**, 709.
- Jaffe, J., 1970, *Mon. Not. R. astr. Soc.*, **149**, 395.
- Landau, L., and Lifshitz, E., 1951, *The Classical Theory of Fields* (Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.).
- McVittie, G.C., 1962, *General Relativity and Cosmology* (The University of Illinois Press, Urbana).
- Synge, J.L., 1966, *Mon. Not. R. astr. Soc.*, **131**, 463.
-