

Frekuensi Getar Alami Balok Kantilever Timoshenko

Resmi Bestari¹⁾
Amrinsyah Nasution²⁾

Abstrak

Teori gerak dinamis sistem dengan sifat beban terbagi rata pada balok umumnya menggunakan teori Euler-Bernoulli, hal mana anggapan bidang penampang tegak lurus sumbu balok akan tetap tegak lurus setelah terjadi deformasi akibat beban. Didalam memperhitungkan pengaruh deformasi akibat gaya geser, ketetapan ini tidak lagi berlaku, bahwa bidang penampang tidak tegak lurus lagi terhadap sumbu balok setelah terjadi deformasi [Wang, 1995]. Efek deformasi geser ini mempunyai pengaruh yang berarti terhadap frekuensi getar alami struktur, bila ukuran penampang relatif besar dibandingkan dengan panjang struktur/balok, disamping momen inersia akibat percepatan rotasi dari penampang balok juga tak dapat diabaikan. Analisis sistem seperti ini diselesaikan berdasarkan teori dari Timoshenko yang memperhitungkan pengaruh deformasi geser dan inersia rotasi pada balok.

Makalah ini membahas penyelesaian eksak frekuensi getar alami balok dengan memperhitungkan pengaruh deformasi geser dan inersia rotasi pada balok. Jumlah ragam getar yang terjadi menjadi tertentu, jika kedua pengaruh tersebut diperhitungkan.

Kata-kata kunci : *Balok Timoshenko, deformasi geser & inersia rotasi, solusi eksaks, jumlah ragam getar dan frekuensi getar alami.*

Abstract

Exact solution for dynamic system with distributed mass in elastic state is commonly analyzed by Euler-Bernoulli theory, that is 'plane cross sections perpendicular to the axis of the beam remains plane and perpendicular to the axis after deformation [Wang, 1995]. Due to effect of transverse shear deformation, the plane cross sections remain plane but not necessarily normal to the longitudinal axis after deformation. This effect may have significant influence on the natural frequency of the large and deep beam. Also, the inertial resistance to rotational acceleration of the beam could not be ignored for the large and deep beam. Investigation is made for these two conditions by the use of Timoshenko's beam theory.

This paper presents exact solution of natural frequency, of which shear deformation and rotary inertia effects are included in the analysis. Numbers of mode-shapes become definite if which shear deformation and rotary inertia effects are included in the analysis

Keyword : *Timoshenko's beam theory, shear deformation and rotary inertia, mode-shapes.*

1. Pendahuluan

Banyak masalah nyata mempunyai perilaku dinamik yang kompleks. Hal ini mengakibatkan model matematika yang mempresentasikan perilaku dinamik tersebut juga bersifat kompleks karena melibatkan banyak variable dan parameter.

Analisis dinamik struktur balok menjadi kompleks, bila diperhitungkan pengaruh gaya inersia yang dihasilkan akibat adanya perpindahan struktur yang dipengaruhi besaran massa. Analisis yang paling sesuai dan mendekati kondisi sesungguhnya pada kasus ini, karena massa balok terdistribusi sepanjang bentang, perpindahan dan percepatan yang harus

-
1. - Mahasiwa S3, Departemen Teknik Sipil, Institut Teknologi Bandung.
- Staf Pengajar Jurusan Teknik Sipil, Universitas Mercu Buana, Jakarta.
 2. Staf Pengajar & Guru Besar Departemen Teknik Sipil, Institut Teknologi Bandung.

Catatan : Usulan makalah dikirimkan pada 13 Desember 2004 dan dinilai oleh peer reviewer pada tanggal 26 Desember 2004 - 27 Januari 2005. Revisi penulisan dilakukan antara tanggal 13 Januari 2005 hingga 16 Februari 2005.

terdefinisi untuk setiap titik sepanjang bentang, adalah persamaan differensial [Paz, 1990].

Kadangkala dilakukan penyederhanaan masalah. Massa balok dianggap terkonsentrasi pada sejumlah titik tertentu. Demikian juga perpindahan dan percepatan hanya ditinjau pada titik tertentu itu pula (koordinat diskrit). Cara ini menguntungkan jika bentuk strukturnya cukup rumit, namun hasil yang diperoleh tentulah kurang mendekati kondisi sesungguhnya.

Pemodelan gerak dinamik balok dalam bentuk persamaan differensial dimana posisi setiap titik pada balok merupakan variabel yang terpisah, biasa dikenal juga dengan sistim dengan parameter/sifat-sifat terbagi rata.

Cara ini merupakan usaha mempresentasikan kondisi nyata balok yang paling mendekati kondisi sesungguhnya. Sehingga metoda ini merupakan teori eksak dalam penyelesaian gerak dinamik struktur balok.

2. Gerak Dinamik Balok

Gerak dinamik balok dapat dimodelkan dalam bentuk :

2.1 Sistim berkoordinat diskrit dan parameter terkelompok

Pada sistim ini masa balok dianggap terkelompok pada tempat-tempat yang ditentukan guna penyederhanaan masalah. Sistem ini cukup praktis dan mudah diselesaikan pada gerak dinamik sembarang struktur. Namun hasil yang diperoleh hanyalah merupakan pendekatan dari sifat gerak dinamik yang sebenarnya, karena pergerakan sistim diwakili oleh beberapa tempat yang ditentukan.

Pengaruh inersia pada struktur dengan sistim ini dapat berbentuk :

2.1.1 Massa terkelompok (*lumped-mass*)

Cara ini adalah cara termudah dalam meninjau sifat inersia sebuah sistim dinamis. Massa struktur dianggap terkelompok/terkonsentrasi pada tempat / titik tertentu (koordinat modal) dimana terjadi perpindahan translasi.

2.1.2 Massa sepadan (*consistent-mass*)

Dengan menggunakan massa sepadan, sistim pergerakan dinamis struktur lebih rasional dibanding massa terkelompok, dimana pengaruh inersia rotasi pada kelompok massa ikut diperhitungkan.

2.2 Sistim dengan parameter yang terbagi rata (*distributed - parameter systems*)

Ada 2 teori yang lazim digunakan pada sistim ini, yakni :

2.2.1 Teori Euler-Bernoulli

Teori Euler-Bernoulli mengasumsikan bahwa bidang penampang yang tegak lurus sumbu balok akan tetap tegak setelah terjadi deformasi pada balok (lihat **Gambar 2.1**).

Berdasarkan keseimbangan gaya dan momen pada freebody **Gambar 2.1 (b)**, serta memperhatikan hubungan gaya geser dengan momen dan hubungan

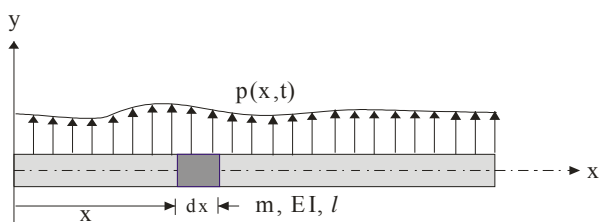
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = p(x, t) \quad (2.1)$$

kelengkungan, diperoleh persamaan gerak balok Euler Bernoulli sebagai berikut [Clough and Penzien, 1975],

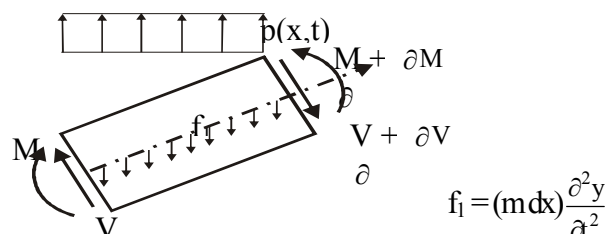
2.2.2 Teori Timoshenko

Teori Timoshenko merupakan pengembangan dari teori Euler-Bernoulli. Penampang yang tegak lurus terhadap sumbu balok / struktur sebelum berdeformasi, tidak tegak lurus lagi terhadap sumbu terhadap sumbu balok setelah terjadi deformasi. (lihat **Gambar 2.2**).

Ada dua faktor tambahan yang ikut diperhitungkan pada teori Timoshenko ini, yaitu deformasi sudut akibat gaya geser dan inersia rotasi akibat percepatan

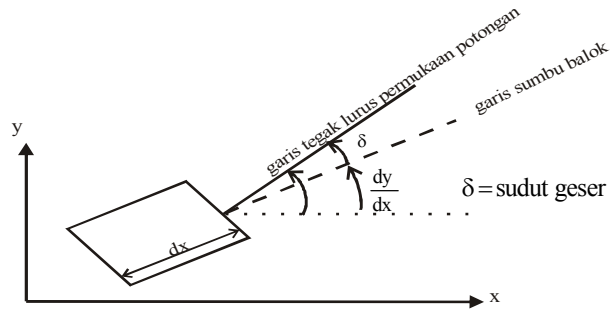


a. Balok dengan beban merata

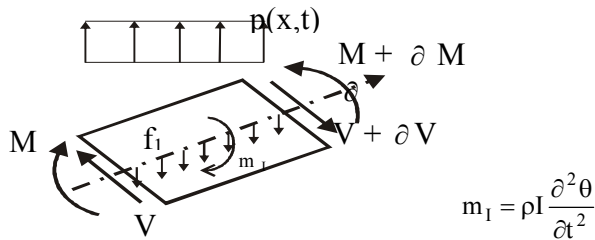


b. Badan bebas setelah deformasi

Gambar 2.1 Balok Euler-Bernoulli dengan massa dan beban terbagi rata [Clough and Penzien, 1975]



a. Deformasi badan bebas balok



b. Gaya-gaya yang bekerja pada badan bebas balok

Gambar 2.2. Efek deformasi geser dan inersia rotasi pada balok Timoshenko [Clough and Penzien, 1975]

perputaran sudut.

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \rho I \left(\frac{E}{kG} + 1 \right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{kG} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4}$$

$$= p + \frac{EI}{kGA} \left(\frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right) \quad \text{D e n g a n} \quad (2.2)$$

memperhatikan keseimbangan gaya vertikal & momen, hubungan gaya geser dengan momen dan hubungan momen dengan kelengkungan, serta hubungan gaya geser V dengan sudut geser δ ($V = k A G \delta$ [Clough and Penzien, 1975]) pada badan bebas **Gambar 2.2b**, diperoleh persamaan getar balok Timoshenko [Clough and Penzien, 1975]

Persamaan (2.1) dengan mudah dapat diselesaikan secara analitik & numerik yang sederhana [Clough

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \rho I \left(\frac{E}{kG} + 1 \right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{kG} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} = 0$$

(3.1)

and Penzien, 1975], [Paz, 1990], namun tidak demikian halnya untuk **persamaan (2.2)**, diperoleh

$$y(x, t) = \phi(x) f(t) = \phi(x) (B \cos(\omega t) + C \sin(\omega t)) \quad (3.2)$$

persamaan yang cukup rumit, sehingga penyelesaian bentuk ini sering dilakukan secara diskrit dengan

$$\{a^2 s^4 + b \omega^2 s^2 + \omega^2 (c \omega^2 - 1)\} = 0, \quad \text{dimana:} \quad \begin{matrix} m a s s a \\ s e p a d a \end{matrix}$$

$$a^2 = \frac{EI}{\rho A} \quad ; \quad b = \frac{I}{A} \left(\frac{E}{kG} + 1 \right) \quad ; \quad c = \frac{\rho I}{kGA} \quad \text{pada} \quad (3.3)$$

b a b 2.1.2.

3.

$$s_1^2 = \omega_1^2 (-c_1 + h) \quad \& \quad s_2^2 = \omega_1^2 (-c_1 - h) \quad (3.4)$$

Getaran Bebas

Balok

Timoshenko

$$\omega_1^2 = \omega^2 \frac{\rho}{2E} \quad ; \quad c_1 = \left(\frac{E}{kG} + 1 \right) \quad ;$$

$$h = \sqrt{\left(1 - \frac{E}{kG} \right)^2 + \frac{4EA}{\omega^2 \rho I}}$$

Getaran bebas balok Timoshenko diperoleh dengan memberi nilai 0

sesudah tanda sama dengan pada **persamaan (2.2)**, yakni

$$1. \quad \phi(x)_a = D_1 \cos \beta_3 x + D_2 \sin \beta_3 x + D_3 \quad ;$$

$$\omega^2 = \frac{kGA}{\rho I} \quad \text{Misalkan solusi persamaan (3.1) di atas} \quad (3.5)$$

$$2. \quad \phi(x)_b = D_1 \cos \beta_1 x + D_2 \sin \beta_1 x + D_3 \cos \beta_3 x + D_4 \sin \beta_3 x \quad ;$$

$$\omega^2 > \frac{kGA}{\rho I} \quad \text{adalah:} \quad (3.6)$$

$$3. \quad \phi(x)_c = D_1 \cosh \beta_2 x + D_2 \sinh \beta_2 x + D_3 \cos \beta_3 x + D_4 \sin \beta_3 x \quad ;$$

Akan diperoleh persamaan karakteristik yang berhubungan dengan **persamaan (3.1)** di atas sbb :

$$\beta_1 = \omega \sqrt{\frac{\rho}{2E} \left\{ \left(\frac{E}{kG} + 1 \right) - \sqrt{\left(1 - \frac{E}{kG} \right)^2 + \frac{4EA}{\omega^2 \rho I}} \right\}} \quad (3.8)$$

$$\beta_2 = \omega \sqrt{\frac{\rho}{2E} \left\{ \sqrt{\left(1 - \frac{E}{kG} \right)^2 + \frac{4EA}{\omega^2 \rho I}} - \left(\frac{E}{kG} + 1 \right) \right\}} \quad (3.9)$$

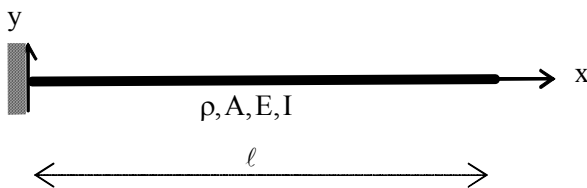
$$\beta_3 = \omega \sqrt{\frac{\rho}{2E} \left\{ \left(\frac{E}{kG} + 1 \right) + \sqrt{\left(1 - \frac{E}{kG} \right)^2 + \frac{4EA}{\omega^2 \rho I}} \right\}} \quad (3.10)$$

diperoleh,

dimana

$$\{a^2 s^4 - \omega^2\} = 0 \quad (4.1)$$

Ada tiga kemungkinan yang terjadi pada nilai S_1^2 , yaitu : $c_1 = h$, $c_1 = h$ atau $c_1 = h$, $\phi(x) = D_1 \cos \beta x + D_2 \sin \beta x + D_3 \cosh \beta x + D_4 \sinh \beta x$, dimana $\beta = \sqrt{\frac{\omega}{a}}$ sehingga diperoleh 3 kemungkinan bentuk persamaan pola getar $\phi(x)$ balok, yakni



Gambar 5.1. Balok kantilever

Dimana D_1, D_2, D_3 , dan D_4 , merupakan konstanta yang diperoleh dari syarat batas, dan

$$\phi(0) = \phi'(0) = \phi''(\ell) = \phi'''(\ell) = 0 \quad (5.1)$$

4. Getaran $\tan \beta_3^2 \ell = -1$ Bebas Balok Euler-Bernoulli

Untuk balok Euler-Bernoulli, dimana $\omega^2 = \frac{kGA}{\rho I}$ pengaruh gaya geser dan perputaran sudut diabaikan maka suku ke 3 dan ke 4 dari persamaan (3.1) tidak ada, atau pengaruh koefisien b dan c pada persamaan

$$2\beta_1 \beta_3^3 \cos \beta_1 \ell \cos \beta_3 \ell + \sin \beta_1 \ell \sin \beta_3 \ell (\beta_3^4 + \beta_1^2 \beta_3^2) = \frac{\beta_3}{\beta_1} (\beta_1^4 + \beta_3^4) \quad (3.3) \text{ tidak ada, sehingga}$$

bentuk persamaan karakteristik dari balok Euler-Bernoulli lebih sederhana, yakni

bentuk persamaan pola getar $\phi(x)$ balok

$$\omega^2 = \Psi \frac{kGA}{\rho I}$$

5. Ragam Getar dan Frekuensi Alami Balok Kantilever

Pada ujung terjepit ($x = 0$) dari balok, simpangan dan perputaran sudut harus sama dengan nol dan pada

$$\left\{ \sqrt{3 - \frac{3}{\Psi}} \right\} \left\{ \left(\sqrt{3 - \frac{3}{\Psi}} \right) \cos \beta_1 \ell \cos \beta_3 \ell + 2 \sin \beta_1 \ell \sin \beta_3 \ell \right\} = \left\{ \frac{1}{\Psi} + \frac{3}{\Psi} \right\} \text{ dan } \Psi > 1 \quad (5.4)$$

ujung bebas ($x = \ell$) momen lentur dan gaya lintang harus sama dengan nol. Sehingga diperoleh syarat batas $\omega^2 > \frac{kGA}{\rho I}$

Substitusi syarat batas (5.1) ke persamaan (3.4), diperoleh \rightarrow tidak mungkin

$$\beta_2^4 + \beta_3^4 + 2\beta_2^2 \beta_3^2 \cosh \beta_2 \ell \cos \beta_3 \ell + \quad (5.5)$$

Dengan demikian kondisi tidak terjadi.

b) Substitusi syarat batas (5.1) ke persamaan (3.5), didapat persamaan karakteristik

Diperoleh satu persamaan dengan 2 variabel yang belum diketahui yaitu β_1 dan β_3 . Namun jika diperhatikan persamaan (3.18) dan (3.19), terlihat $\cosh \beta \ell \cos \beta \ell = -1$ bahwa kedua variabel tersebut saling berhubungan.

Untuk itu diperkenalkan suatu faktor/variabel baru Ψ , dimana :

$$\beta_n \ell \approx (2n - 1) \frac{\pi}{2}, \text{ dimana } n = 4, 5, \dots \text{ dst.} \quad (5.7)$$

Ψ bernilai > 1 , untuk kondisi , dan bernilai < 1 untuk kondisi

Untuk penampang empat persegi, maka ([Clough and Penzien, 1975] hal 319), sehingga persamaan (5.2) menjadi

Akan diperoleh bahwa tidak ada nilai yang dapat memenuhi persamaan (5.4), sehingga kondisi juga tidak mungkin terjadi

c) Akhirnya kondisi yang memungkinkan adalah jika

$$f(\Psi) = A + B \cosh \beta_2 \ell \cos \beta_3 \ell + C \sinh \beta_2 \ell \sin \beta_3 \ell = 0 \quad \text{Substitusi syarat batas (5.1) ke} \quad (5.8)$$

$$A = \beta_2^4 + \beta_3^4 ; B = 2\beta_2^2 \beta_3^2 ; C = \beta_2 \beta_3 (\beta_3^2 - \beta_2^2) \quad (5.9)$$

$$\beta_2 = \sqrt{\frac{\Psi}{3r^2} \left\{ \left(1 + \frac{3}{\Psi} \right)^{1/2} - 2 \right\}} ; \quad \beta_3 = \alpha \beta_2 ;$$

$$\alpha = \left(2 + \sqrt{1 + \frac{3}{\Psi}} \right) \left(\sqrt{\frac{3}{\Psi} - 3} \right)^{-1} \quad (5.10)$$

Pasangan nilai Ψ , β_2 & β_3 yang memberikan $f(\Psi) = 0$ merupakan solusi **persamaan (5.8)**. Dan nilai Ψ yang memberikan $= 0$ pertama kali, ke 2, ke 3 dst merupakan ragam (mode) ke 1, ke 2, ke 3 dst dari getaran bebas balok kantilever.

Nilai tersebut dapat ditentukan secara numerik dengan metoda **Newton-Raphson** menurut persamaan

$$\Psi_{\text{baru}} = \Psi_0 - \frac{f(\Psi_0)}{f'(\Psi_0)} ; \quad f'(\Psi_0) \text{ adalah turunan pertama } f(\Psi) \text{ pada titik } \Psi_0$$

Iterasi dilakukan sampai dengan nilai Ψ_{baru} mendekati nilai Ψ_0 , atau $\Psi_{\text{baru}} - \Psi_0 < \text{toleransi}$ yang ditentukan.

Mengingat Ψ_0 yang harus ditentukan lebih dari satu, yaitu untuk ragam 1, 2, 3 dst, maka Ψ_0 awal untuk masing-masing ragam didekati dengan

$$\Psi_{0n} = \frac{\omega_{0n}^2 \rho I}{kGA} = \frac{\omega_{0n}^2 \rho r^2}{kG} ; \quad (5.11)$$

dimana Ψ_{0n} adalah Ψ_0 awal untuk ragam ke n

Ψ_{0n} = frekuensi getar alami struktur kantilever tanpa pengaruh inersia rotasi dan deformasi geser

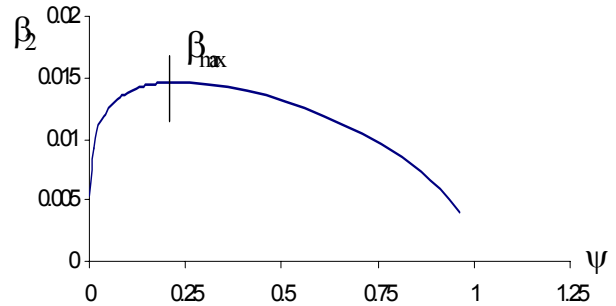
$$= (\beta_n \ell)^2 \sqrt{\frac{EI}{m \ell^4}}$$

Nilai $\beta_n \ell$ diperoleh dari penyelesaian secara numerik **persamaan (5.7)**

Untuk masing-masing Ψ_n yang diperoleh dapat dihitung pula frekuensi getar alami ragam getarnya menurut persamaan,

$$\omega_n = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\Psi_n kG}{\rho}} \quad (5.12)$$

Jika diperhatikan **persamaan (5.10)**, β_2 merupakan fungsi akar dari seperti **Gambar**



Gambar 5.2. Grafik hubungan dengan pada $r = 0.04$

Hanya ada satu pasangan nilai Ψ dan β_2 untuk setiap ragam getar pada penyelesaian **persamaan (5.8)** diatas. Untuk itu yang memenuhi syarat hanyalah $0 < \beta_2 < \beta_{\text{max}}$. Untuk penampang empat persegi $\beta_{\text{max}} = 0.36602441/r$, dimana r = jari-jari girasi penampang. Dengan terbatasnya nilai β_2 , maka terbatas jugalah jumlah ragam getar balok Timoshenko.

6. Studi Kasus

Studi kasus dilakukan pada balok kantilever dengan bentuk penampang empat persegi pejal ukuran 32x32 ft² dan empat persegi berlubang (*hollow*) dengan ukuran luar 25x25 ft² dan ukuran dalam 20x20 ft². Panjang balok berkisar dari 65.983 ft s/d 700 ft, atau kelangsingan balok (perbandingan antara jari-jari girasi penampang dengan panjang balok - r/I) berkisar antara 0.013 s/d 0.14. Modulus Elastisitas bahan 5.2×10^8 lb/ft², Poisson's ratio 0.125 dan rapat massa bahan = 4.658 lb-det²/ft⁴.

Dengan cara yang telah disebutkan di atas diperoleh besaran frekuensi getar alami balok seperti **Tabel 6.1** untuk penampang pejal dan **Tabel 6.2** untuk penampang berlubang. Berdasarkan kedua tabel tersebut diperoleh grafik hubungan antara frekuensi getar alami struktur dengan r/I pada **Gambar 6.1 dan 6.2**. Pasangan harga I dan r/I dipilih sedemikian rupa sehingga dapat terlihat dengan jelas bentuk perubahan Grafik hubungan frekwensi getar alami balok terhadap perubahan r/I . Disamping itu juga dapat dilihat perbandingan antara frekwensi getar alami balok Timoshenko berpenampang berlubang dengan penampang pejal pada **Tabel 6.3**.

Tabel 6.1 Frekuensi getar alami struktur (penampang 4 persegi pejal)

		mode 1			mode 2			mode 3			mode 4		
L(ft)	r/L	ω	ω'	Δ (%)	ω	ω'	Δ (%)	ω	ω'	Δ (%)	ω	ω'	Δ (%)
700	0.013	0.7	0.7	1.17	4.4	4.5	1.57	12.3	13.1	6.45	24.0	23.9	0.40
550	0.017	1.1	1.1	1.25	7.1	7.2	2.08	19.9	21.5	8.07	38.9	37.0	4.99
462	0.02	1.6	1.6	1.34	10.1	10.3	2.63	28.2	27.3	3.27	55.2	51.6	6.53
400	0.023	2.1	2.2	1.44	13.4	13.9	3.28	37.6	37.0	1.53	73.6	67.3	8.62
350	0.026	2.8	2.8	1.56	17.5	18.2	4.09	49.1	49.5	0.78	96.2	85.8	10.81
300	0.031	3.8	3.9	1.74	23.9	23.9	0.27	66.8	70.0	4.79	131	113	13.80
275	0.034	4.5	4.6	1.88	28.4	28.1	1.03	79.5	73.8	7.23	156	131	15.69
250	0.037	5.5	5.6	2.05	34.4	33.6	2.30	96.2	92.6	3.71	189	155	17.96
240	0.038	5.9	6.1	2.14	37.3	36.2	2.77	104	103	1.77	205	166	18.99
231	0.04	6.4	6.6	2.23	40.3	39.0	3.06	113	113	0.39	221	177	20.00
200	0.046	8.6	8.8	2.63	53.7	51.3	4.36	150	139	7.71	295		
154	0.06	14.4	15.0	3.77	90.5	83.4	7.89	254			498		
115	0.08	25.7	27.3	6.09	161	141	12.67	452			885		
92	0.1	40.2	43.9	9.39	252			706			1383		
77	0.12	57.8	65.9	14.03	363			1016			1991		

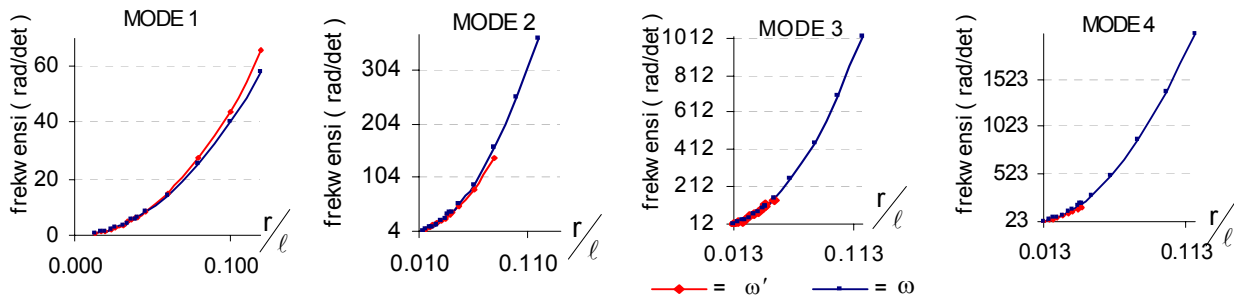
Keterangan :

ω' = frekuensi getar balok Timoshenko

ω = frekuensi getar alami balok Euler-Bernoulli

r = 9.238 ft

Δ = persentase perbedaan frekuensi



Gambar 6.1. Grafik hubungan frekuensi getar alami balok dengan r/l pada mode 1,2,3 dan 4 untuk penampang empat persegi pejal

Tabel 6.2. Frekuensi getar alami balok penampang 4 persegi berlubang (hollow)

		mode 1			mode 2			mode 3			mode 4		
L(ft)	r/L	ω	ω'	Δ (%)	ω	ω'	Δ (%)	ω	ω'	Δ (%)	ω	ω'	Δ (%)
700	0.013	0.7	0.7	1.19	4.4	4.5	1.57	12	13	6.45	24	24	0.40
550	0.017	1.1	1.1	1.25	7.1	7.2	2.08	20	21	8.07	39	37	4.99
462	0.02	1.6	1.6	1.34	10.1	10.3	2.63	28	27	3.27	55	52	6.53
400	0.023	2.1	2.2	1.44	13.4	13.9	3.28	38	37	1.52	74	67	8.62
350	0.026	2.8	2.8	1.56	17.5	18.3	4.10	49	49	0.79	96	86	10.82
300	0.031	3.8	3.9	1.74	23.9	23.9	0.27	67	70	4.81	131	113	13.81
275	0.034	4.5	4.6	1.88	28.4	28.1	1.03	80	74	7.21	156	131	15.71
250	0.037	5.5	5.6	2.05	34.4	33.6	2.31	96	93	3.69	189	155	17.98
240	0.039	6.0	6.1	2.14	37.3	36.3	2.77	104	103	1.75	205	166	19.00
231	0.04	6.4	6.6	2.23	40.2	39.0	3.06	113	113	0.39	221	177	20.00
200	0.046	8.6	8.8	2.63	53.7	51.4	4.36	150	139	7.67	295		
154	0.06	14.4	15.0	3.77	90.5	83.4	7.89	254			497		
116	0.08	25.7	27.2	6.09	161	141	12.67	451			884		
92	0.1	40.1	43.9	9.39	252			705			1382		
77	0.12	57.8	65.9	14.03	363			1015			1990		

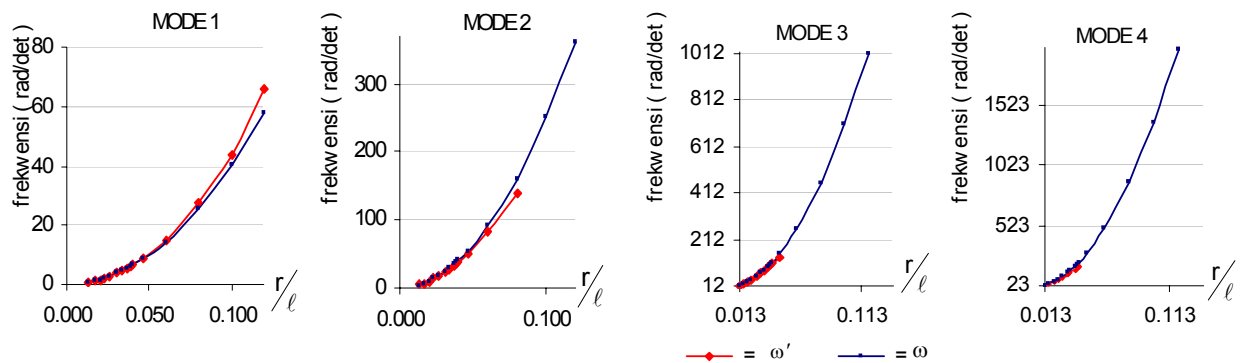
Keterangan :

ω' = frekuensi getar alami alami balok

ω = frekuensi getar alami balok Euler- Bernoulli

r = 9.238 ft

Δ = persentase perbedaan frekuensi



Gambar 6.2. Grafik hubungan frekuensi getar alami balok dengan r/l pada mode 1,2,3 dan 4 untuk penampang empat persegi berlubang

Tabel 6.3. Perbandingan frekuensi getar alami penampang berlubang (*hollow*) dengan penampang pejal pada balok Timoshenko

		Frekuensi getar alami (ω)'											
		mode 1			mode 2			mode 3			mode 4		
L(ft)	r/L	<i>hollow</i>	pejal	Δ (%)	<i>hollow</i>	pejal	Δ (%)	<i>hollow</i>	pejal	Δ (%)	<i>hollow</i>	pejal	Δ (%)
700	0.013	0.708	0.708	0.06	4.453	4.451	0.05	13.068	13.062	0.05	23.962	23.950	0.05
550	0.017	1.148	1.147	0.05	7.249	7.246	0.05	21.491	21.479	0.05	37.025	37.004	0.06
461.88	0.02	1.627	1.628	0.05	10.326	10.331	0.05	27.250	27.263	0.05	51.595	51.621	0.05
400	0.023	2.173	2.172	0.05	13.868	13.861	0.05	37.025	37.004	0.06	67.321	67.289	0.05
350	0.026	2.842	2.841	0.05	18.256	18.247	0.05	49.492	49.463	0.06	85.819	85.785	0.04
300	0.031	3.875	3.874	0.05	23.935	23.924	0.05	70.053	70.008	0.06	112.89	112.85	0.04
275	0.034	4.618	4.616	0.05	28.114	28.101	0.05	73.808	73.760	0.07	131.39	131.35	0.04
250	0.037	5.598	5.595	0.05	33.581	33.566	0.05	92.695	92.629	0.07	154.70	154.65	0.03
240	0.038	6.079	6.076	0.05	36.263	36.247	0.05	102.61	102.53	0.07	165.76	165.70	0.03
230.94	0.04	6.565	6.568	0.05	39.010	39.029	0.05	113.12	113.17	0.05	176.65	176.74	0.05
200	0.046	8.796	8.791	0.05	51.367	51.344	0.04	138.85	138.72	0.09			
153.96	0.06	14.993	14.99	0.00	83.402	83.403	0.00						
115.47	0.08	27.250	27.26	0.05	140.57	140.64	0.05						
92.38	0.1	43.901	43.92	0.05									
76.98	0.12	65.902	65.93	0.05									

Keterangan :

Δ : persentase perbedaan frekuensi getar alami antara penampang berlubang dengan penampang pejal pada balok Timoshenko

7. Kesimpulan

Dari hasil studi kasus yang dilakukan terlihat bahwa :

- 7.1. Dengan menggunakan teori Timoshenko yang memperhitungkan pengaruh inersia rotasi dan deformasi geser, kelangsingan balok (r/I) menentukan jumlah ragam getar (*mode*) balok. Ini terlihat dari **Tabel 6.1**, dan **6.2** maupun **Gambar 6.1** dan **6.2**. Makin besar r/I , makin sedikit jumlah ragam getar balok. Untuk penampang empat persegi dengan $r/I > 0.1$ jumlah ragam getar yang terjadi hanya satu macam yaitu ragam ke satu saja. Sedangkan jika digunakan teori Euler-Bernoulli jumlah ragam getar balok yang terjadi tak terhingga untuk semua ukuran balok.
- 7.2. Pada r/I yang kecil, pengaruh inersia rotasi dan deformasi geser sangat kecil. Dari **Gambar 6.1 s/ d 6.2**, makin besar r/I makin berarti juga pengaruh inersia rotasi dan deformasi geser, terutama pada *mode* yang rendah .
- 7.3. Pengaruh inersia rotasi dan deformasi geser agak kurang beraturan pada ragam getar 3.
- 7.4. Dari **Tabel 6.3** terlihat bahwa perbedaan frekuensi getar alami antara balok Timoshenko berpenampang pejal dengan balok berpenampang berlubang (*hollow*) untuk r/I yang sama, sangat kecil yaitu dibawah 6 %. Dengan kata Frekuensi Getar balok Timoshenko hanya dipengaruhi oleh nilai r/I penampang.

Daftar Pustaka

- Clough, R. W., Penzien, J., 1975, “*Dynamics of Structures*”, McGraw-Hill International Editions.
- Paz M., 1990, “*Dinamika Struktur*”, Teori dan Perhitungan, Erlangga, Edisi kedua.
- Wang, C. M., 1995, “*Timoshenko Beam-Bending Solutions in Terms of Euler-Bernoulli Solutions*”, Journal of Engineering Mechanics, Vol 121 No. 6. June, ASCE.
- Nasution, A., “*Mekanika Benda Pejal*”, Penerbit ITB.