

Model Refraksi-Difraksi Gelombang Air Oleh Batimetri

Syawaluddin Hutahaean

Pusat Studi Teknik Kelautan
Fakultas Teknik Sipil dan Lingkungan
Institut Teknologi Bandung
Jl. Ganesha No.10 Bandung 40132
E-mail: syawaluddin@ocean.itb.ac.id

Abstrak

Paper ini merupakan kelanjutan dari Hutahaean (2007c). Pengembangan yang dilakukan adalah pada persamaan arah gelombang, dan persamaan amplitudo gelombang. Persamaan arah gelombang atau persamaan refraksi-difraksi dan persamaan amplitudo gelombang dirumuskan dengan menggunakan persamaan kontinuitas dan persamaan momentum. Hasil simulasi menunjukkan bahwa persamaan yang dikembangkan dapat memodelkan refraksi-difraksi oleh batimetri, serta shoaling dan breaking.

Kata-kata Kunci: Refraksi-difraksi, shoaling dan breaking.

Abstract

This paper is an extension of previous paper written by Hutahaean (2007c). The improvements are in wave direction and wave amplitude equation. The wave direction equation or wave refraction-diffraction equation and wave amplitude equation are developed using continuity and momentum equation. Simulation results show that the new equations can model refraction-diffraction due to bathymetry, shoaling and breaking.

Keywords: Refraction-diffraction, shoaling and breaking.

1. Pendahuluan

Hutahaean (2005a)(2007a) telah menunjukkan bahwa persamaan gelombang panjang Airy dapat digunakan untuk memodelkan dinamika gelombang pendek, termasuk fenomena pembelokan arah gelombang oleh batimetri (*refraksi*), penyebaran energi gelombang (*difraksi*) dan pembesaran tinggi gelombang (*shoaling*). Dengan latar belakang tersebut, maka dikembangkan persamaan *refraksi-difraksi* dengan menggunakan persamaan kontinuitas dan persamaan momentum, sebagaimana halnya dengan persamaan gelombang panjang Airy.

Latar belakang berikutnya adalah bahwa potensial aliran dari persamaan gelombang nonlinier yang dikembangkan oleh Hutahaean (2007c), mengandung fenomena *breaking*. Tetapi model refraksi yang dikembangkan pada penelitian tersebut harus dibantu dengan memberikan suatu harga tertentu pada komponen persamaan potensial aliran pada saat terjadi

breaking agar model dapat terus berjalan. Hal ini kemungkinan dikarenakan ketidak harmonisan antara persamaan gelombang dengan persamaan tinggi gelombang atau persamaan amplitudo gelombang yang digunakan dimana pada model tersebut digunakan persamaan kekekalan laju transfer energi dari teori gelombang linier.

Persamaan arah gelombang dirumuskan dengan menggunakan persamaan kontinuitas yang terintegrasi terhadap kedalaman, yaitu dengan mensubstitusikan potensial aliran gelombang nonlinier dari Hutahaean (2007c) yang berbentuk $\phi = Ge^{kh}\beta(z)\cos k\xi \sin \sigma t$ kepersamaan kontinuitas tersebut, dimana persamaan untuk G untuk gelombang yang bergerak pada arah sumbu ξ diketahui. Pada persamaan arah gelombang terdapat suku yang mengandung $\partial G / \partial x$ dan $\partial G / \partial y$. Persamaan untuk $\partial G / \partial x$ dan $\partial G / \partial y$ diperoleh dengan menggunakan persamaan momentum fluida ideal arah-x dan arah-y dari Hutahaean (2007b,c).

Persamaan muka air diperoleh dengan menggunakan persamaan kontinuitas yang terintegrasi terhadap kedalaman. Substitusi potensial aliran ϕ kepersamaan, selanjutnya persamaan diintegrasikan terhadap waktu, diperoleh persamaan muka air yang merupakan fungsi dari arah gelombang θ , bilangan gelombang k , G , $\partial G / \partial x$ dan $\partial G / \partial y$. Dengan diketahuinya arah gelombang, k , G , $\partial G / \partial x$ dan $\partial G / \partial y$ maka dapat dihitung elevasi muka air pada suatu harga fasa gelombang.

2. Persamaan Potensial Aliran dan Persamaan Dispersi

2.1 Persamaan potensial aliran

Persamaan potensial aliran gelombang nonlinier yang bergerak pada arah sumbu ξ , Huthaean (2007c), adalah,

$$\phi = Ge^{kh} \beta(z) \cos k\xi \sin \sigma t \quad (1)$$

$$G = \frac{\sigma A}{k \gamma \beta(\eta)} \quad (2)$$

$$\gamma = \frac{\beta_1(\eta) - (\alpha - 1)}{\beta(\eta)} - \frac{k A}{2} + \left(2 \frac{\beta_1(\eta)}{\beta(\eta)} + 2 - \frac{3 \alpha}{\beta(\eta)} + \frac{1}{\beta(\eta)} \right) \frac{\partial h}{\partial \xi} \quad (3)$$

dimana:

ϕ = potensial kecepatan
 k = bilangan gelombang
 h = kedalaman perairan pada muka air diam
 ξ = $x \cos \theta + y \sin \theta$
 θ = arah gelombang terhadap sumbu x
 σ = frekuensi sudut = $2\pi / T$
 T = perioda gelombang
 A = amplitudo gelombang

$$\beta(\eta) = \alpha e^{k(h + \frac{A}{2})} + e^{-k(h + \frac{A}{2})}$$

$$\beta_1(\eta) = \alpha e^{k(h + \frac{A}{2})} - e^{-k(h + \frac{A}{2})}$$

$$\alpha = \frac{1 + \frac{\partial h}{\partial \xi}}{1 - \frac{\partial h}{\partial \xi}} \quad (4)$$

$$\frac{\partial h}{\partial \xi} = \text{kemiringan dasar perairan}$$

Potensial aliran ini mengandung fenomena *breaking* pada kondisi $\gamma \rightarrow 0$, Huthaean (2007c). Keterbatasan persamaan ini adalah pada kemiringan $\partial h / \partial \xi = 1$, dimana $\alpha = \infty$.

2.2 Persamaan dispersi

Bentuk dari persamaan dispersi adalah,

$$\left(\frac{\sigma^2 A k}{2 \gamma} - \frac{\sigma^2 A k}{2 \gamma} \frac{\partial h}{\partial \xi} \frac{\beta_1(\eta)}{\beta(\eta)} - \frac{\sigma^2 A}{2 \gamma^2 \beta(\eta)} \frac{\partial F}{\partial \xi} \right) + \left(- \frac{\sigma^2 A k}{2 \gamma} \frac{\beta_1^2(\eta)}{\beta^2(\eta)} + \frac{\sigma^2 A k}{2 \gamma} \frac{\partial h}{\partial \xi} \frac{\beta_1(\eta)}{\beta(\eta)} - \frac{\sigma^2 A}{2 \gamma^2} \frac{\beta_1^2(\eta)}{\beta^3(\eta)} \frac{\partial F}{\partial \xi} \right) - \left(- \sigma^2 + \sigma^2 \frac{\partial h}{\partial \xi} \frac{\beta_1(\eta)}{\beta(\eta)} - \frac{\sigma^2}{k \gamma \beta(\eta)} \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\sigma}{\gamma \beta(\eta)} \frac{\partial F}{\partial t} \right) = g k \gamma \quad (5)$$

$$\beta(\eta) = \alpha e^{k(h + \frac{A}{2})} + e^{-k(h + \frac{A}{2})}$$

$$\beta_1(\eta) = \alpha e^{k(h + \frac{A}{2})} - e^{-k(h + \frac{A}{2})}$$

$$F = \gamma \beta(\eta)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = \left(\beta(\eta) - \frac{k A}{2} \beta_1(\eta) + 2 \frac{\partial h}{\partial \xi} (\beta(\eta) + \beta_1(\eta)) \right)$$

$$\left(k \frac{\partial h}{\partial \xi} - \frac{k^2 A}{2} \right) \quad (6)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\sigma A k}{2} \left(\beta(\eta) - \frac{k A}{2} \beta_1(\eta) + 2 \frac{\partial h}{\partial \xi} (\beta(\eta) + \beta_1(\eta)) \right) \quad (7)$$

Persamaan ini adalah persamaan yang digunakan untuk menghitung bilangan gelombang k untuk suatu gelombang yang bergerak pada arah ξ .

3. Persamaan Arah Gelombang

Untuk merumuskan persamaan arah gelombang digunakan persamaan potensial aliran dalam bentuk $\phi = Ge^{kh} \beta(z) \cos k\xi \sin \sigma t$. Untuk sumbu ξ yang membentuk sudut sebesar θ terhadap sumbu- x , maka berlaku persamaan $\xi = x \cos \theta + y \sin \theta$. Dengan relasi ini persamaan potensial kecepatan menjadi,

$$\phi = Ge^{kh} \beta(z) \cos k(x \cos \theta + y \sin \theta) \sin \sigma t, \text{ atau}$$

$$\phi = Ge^{kh} \beta(z) \cos(k_x x + k_y y) \sin \sigma t \quad (8)$$

dimana $k_x = k \cos \theta$ dan $k_y = k \sin \theta$

Selanjutnya dikerjakan persamaan kontinuitas yang terintegrasi terhadap kedalaman yaitu,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} v dz = 0$$

$\partial \eta / \partial t$ didekati dengan persamaan muka air dari teori gelombang linier yaitu

$\eta = A \cos(k_x x + k_y y) \cos \sigma$, sehingga diperoleh

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\sigma A}{2}$$

Substitusi $u = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$ dan $v = -\frac{\partial \phi}{\partial y}$,

dengan ϕ dari **Persamaan (1)** dan dengan menyelesaikan integrasi dan dengan mengambil kondisi

$$\cos(k_x x + k_y y) = \sin(k_x x + k_y y) = \cos \sigma = \sin \sigma = \frac{1}{2} \sqrt{2},$$

diperoleh persamaan arah gelombang adalah,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\cos \theta)}{\partial x} + \frac{\partial(\sin \theta)}{\partial y} &= \frac{\sigma A}{G e^{kh} B_1} - k \cos^2 \theta \\ -\frac{1}{B_1} \frac{\partial B_1}{\partial x} \cos \theta - \left(2 + \frac{B_2}{B_1}\right) k \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} \\ -\frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial x} \cos \theta - \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial x} \cos \theta - \frac{1}{B_1} \frac{\partial B_1}{\partial y} \sin \theta \\ -\left(2 + \frac{B_2}{B_1}\right) k \sin \theta \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial y} \sin \theta \end{aligned} \quad (9)$$

Harga G diperoleh dari analisis satu dimensi yaitu **Persamaan (2)**. Persamaan untuk $\partial G / \partial x$ dan $\partial G / \partial y$ dirumuskan dari persamaan momentum.

4. Persamaan untuk $\partial G / \partial x$ dan $\partial G / \partial y$

Persamaan untuk $\partial G / \partial x$ dan $\partial G / \partial y$ dirumuskan dengan menggunakan persamaan momentum arah-x dan arah-y

Persamaan momentum-x untuk fluida ideal, Hutahaeen (2007b,c) adalah,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u_{\eta}^2 + v_{\eta}^2 + w_{\eta}^2) - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \phi_{\eta}}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (10)$$

Persamaan momentum pada sumbu-y

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (u_{\eta}^2 + v_{\eta}^2 + w_{\eta}^2) - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \phi_{\eta}}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (11)$$

Dengan menggunakan persamaan potensial aliran seperti pada **Persamaan (8)** dan dengan menggunakan

pada **Persamaan (10-11)**, diperoleh persamaan untuk

$$\text{persamaan } u = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \text{dan} \quad w = -\frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial G}{\partial y} \quad \text{yaitu,}$$

$$a_1 \frac{\partial G}{\partial x} = b_1 \quad (12)$$

$$a_2 \frac{\partial G}{\partial y} = b_2 \quad (13)$$

Dengan menggunakan **Persamaan (12)** dan **(13)**, dapat dihitung harga $\partial G / \partial x$ dan $\partial G / \partial y$.

5. Persamaan Amplitudo Gelombang

Persamaan amplitudo gelombang dirumuskan dari persamaan kontinuitas yang terintegrasi terhadap kedalaman.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} v dz = 0$$

$$\text{Substitusi } u = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \text{dan} \quad w = -\frac{\partial \phi}{\partial z}$$

dengan potensial aliran ϕ dari **Persamaan (8)**, dan selanjutnya persamaan diintegrasikan terhadap waktu t , diperoleh persamaan muka air $\eta(x,y,t)$. Mengingat integrasi yang dilakukan adalah integrasi tak tentu, maka akan terdapat suatu konstanta $c(t)$. Tetapi integrasi persamaan muka air yang bersifat periodik ini, maka berdasarkan Dean (1984) dapat diambil $c(t) = 0$.

Dengan menggunakan persamaan muka air tersebut dihitung elevasi muka air pada kondisi dimana

$$\cos(k_x x + k_y y) =$$

$$\sin(k_x x + k_y y) = \cos \sigma = \sin \sigma = \frac{1}{2} \sqrt{2}$$

yaitu pada kondisi persamaan dispersi dan persamaan refraksi-difraksi dirumuskan. Elevasi muka air pada fasa ini adalah sebesar $A / 2$.

6. Metoda Perhitungan

Perhitungan θ dan A pada suatu titik dilakukan

dengan metoda selisih hingga dan integrasi, penjelasan lengkap disajikan pada lampiran A.

7. Contoh Hasil Model

Untuk meninjau hasil model, maka model dikerjakan pada sejumlah konfigurasi batimetri pantai. Gelombang yang digunakan adalah gelombang dengan perioda 6 detik dengan amplitudo gelombang $A_0 = 1.8$ m. Simulasi dilakukan pada suatu batimetri yang membentuk teluk, tanjung dan pulau tenggelam. Pada ke 3 hasil simulasi tersebut terlihat bahwa model yang dikembangkan dapat mensimulasikan peristiwa *refraksi-difraksi*, *shoaling* dan gelombang pecah (*breaking*).

7.1 Kandungan fenomena *breaking* pada persamaan potensial aliran

Pada $\gamma \rightarrow 0$ potensial aliran menjadi \sim , dimana kondisi ini dapat dianggap sebagai kondisi *breaking*.

Pada dasar perairan datar, $\gamma = \frac{\beta_1(\eta)}{\beta(\eta)} - \frac{k A}{2}$

Untuk amplitudo kecil, $\gamma = \tanh kh - \frac{k A}{2}$,

sehingga untuk $\gamma = 0$ diperoleh persamaan $2 \tanh kh = A k$ atau $H / L = 2 / \pi = \tanh kh$ dimana $H = 2A =$ tinggi gelombang

Kriteria *breaking* dari Miche adalah $H / L = 0.142 \tanh kh$. Jadi bentuk kondisi *breaking* dari potensial aliran yang diperoleh adalah sama dengan kondisi *breaking* dari Miche. Yang terpenting dalam hal ini adalah bahwa pada potensial aliran terdapat fenomena *breaking* atau dengan kata lain persamaan potensial aliran dapat memodelkan *breaking*.

Pada **Tabel (1)** disajikan hasil perhitungan γ , untuk gelombang dengan perioda 6 detik dengan amplitudo 0.5 m, 0.6 m, 0.7 m dan 0.8 m. Terlihat bahwa harga γ berkurang seiring dengan berkurangnya kedalaman.

Pada kedalaman 1.5 m harga γ untuk gelombang dengan perioda 6 detik adalah disekitar 0.45-0.47, selanjutnya pada kedalaman 1 m, harga γ jadi tidak berpola, ada yang menjadi negatif, ada yang menjadi sangat besar. Dari kondisi ini maka dapat disimpulkan bahwa pada harga $\gamma < 0.47$ terjadi *breaking*. Karena itu pada penelitian ini, digunakan kriteria bahwa *breaking* terjadi pada saat harga $\gamma < 0.47$. Setelah *breaking* gelombang tidak langsung menjadi stabil tetapi dapat terjadi *breaking* terus menerus. Karena itu pada saat $\gamma < 0.47$, maka harga γ diubah menjadi 0.47, yaitu harga pada kondisi kritis. Pada penelitian ini, setelah kondisi kritis tersebut amplitudo gelombang dapat membesar dengan sendirinya dan mengecil lagi seiring dengan terjadinya *shoaling* yang selanjutnya akan diikuti dengan *breaking* berikutnya.

Tabel 1. Hasil perhitungan harga γ

h(m)	g - 0.5	g - 0.6	g - 0.7	g - 0.8
9.50	.85	.85	.85	.85
9.00	.84	.84	.84	.83
8.50	.83	.82	.82	.82
8.00	.81	.81	.81	.81
7.50	.80	.79	.79	.79
7.00	.78	.78	.78	.78
6.50	.76	.76	.76	.76
6.00	.74	.74	.74	.74
5.50	.72	.72	.72	.72
5.00	.70	.70	.70	.70
4.50	.67	.67	.67	.67
4.00	.64	.65	.65	.65
3.50	.61	.62	.62	.62
3.00	.58	.58	.59	.59
2.50	.54	.55	.55	.55
2.00	.50	.51	.51	.51
1.50	.45	.46	.47	.45
1.00	-.38	12.37	-.38	11.02

Keterangan :

H : kedalaman perairan (m)

g - 0.x : harga g untuk amplitudo gelombang 0.x m.

8. Kesimpulan

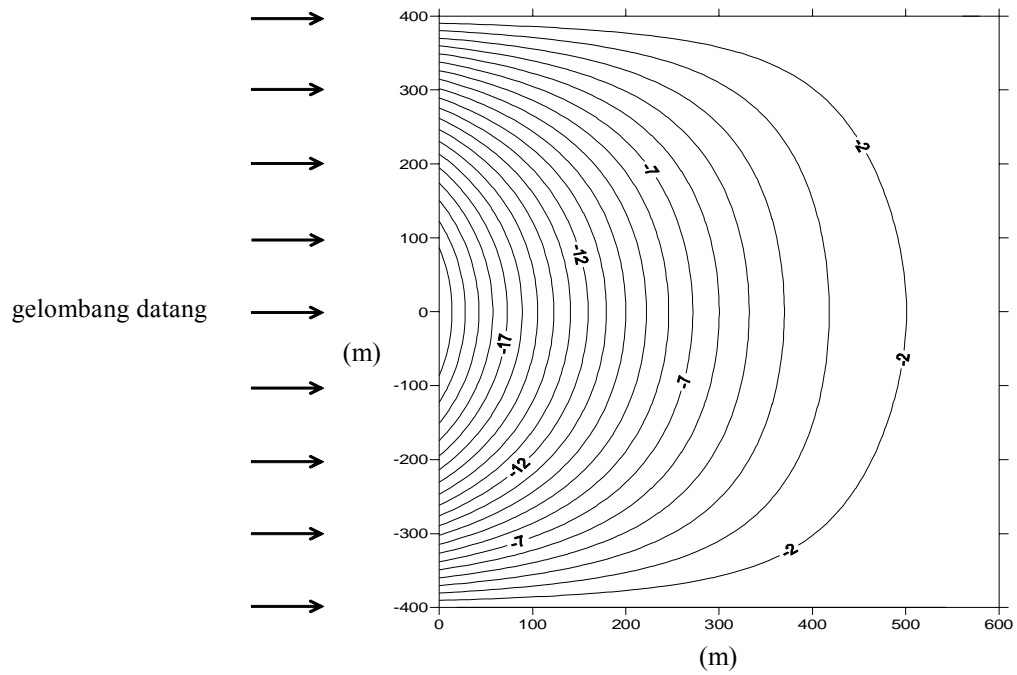
Dari hasil ke 3 simulasi tersebut, dapat disimpulkan bahwa model bekerja seperti yang diharapkan yaitu dapat mensimulasikan *refraksi-difraksi*, *shoaling* dan *breaking*. Dibandingkan dengan hasil sebelumnya yaitu pada Hutahaeen (2007c) maka perubahan tinggi gelombang menjelang dan sesudah *breaking* pada penelitian ini terlihat kontinu. Tetapi pada pemodelan *breaking* ini, seperti pada model sebelumnya, proses *breaking* masih belum otomatis, yaitu digunakan kriteria *breaking* dimana pada saat γ pada **Persamaan (3)** berharga kurang dari 0.47 maka harga γ diubah menjadi 0.47, dimana perlu diingat bahwa harga ini adalah untuk gelombang dengan perioda 6 detik, sedangkan untuk perioda gelombang yang lain diperoleh harga γ yang lain. Jadi dari aspek pemodelan *breaking*, model masih mempunyai kendala.

Pada hasil *refraksi-difraksi* gelombang, dibandingkan dengan hasil sebelumnya, terlihat pola *refraksi-difraksi* yang lebih jelas yaitu penyebaran energi gelombang pada teluk dan pengumpulan energi gelombang pada tanjung.

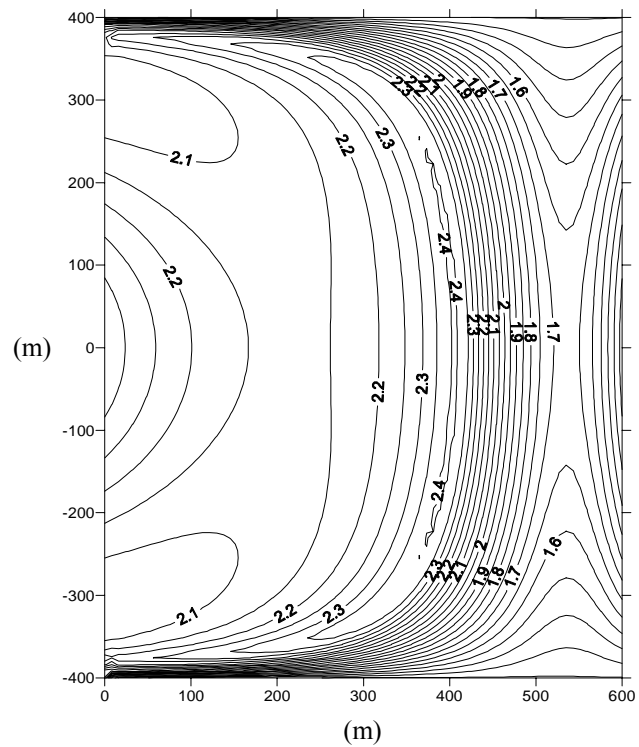
Telah diketahui bahwa pada saat gelombang mengalami *breaking*, terjadi arus sejajar pantai, atau dengan kata lain terjadi perubahan energi potensial gelombang menjadi energi kinetik. Transformasi energi potensial gelombang menjadi energi kinetik terdapat pada persamaan momentum. Karena itu salah satu kemungkinan penyebab keterbatasan model pada pemodelan *breaking* adalah dikarenakan model kurang efisiennya transformasi energi pada persamaan momentum. Dengan demikian untuk pengembangan lebih lanjut perlu diteliti pengembangan pada persamaan momentum.

Daftar Pustaka

- Dean, R. G., and Dalrymple, 1984, *Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Hutahaeen, S., 2005a, *Model Difraksi dengan Persamaan Gelombang Airy yang Disempurnakan*, Thesis S3, Departemen Teknik Sipil ITB.
- Hutahaeen, S., 2005b, Integrasi Numeris dengan Menggunakan Polinomial Lagrange, *Jurnal Teknik Sipil*, Vol. 12 No. 2, Fakultas Teknik Sipil dan Lingkungan ITB.
- Hutahaeen, S., 2007a, Pemodelan Dinamika Gelombang dengan Mengerjakan Persamaan Kekekalan Energi, *Jurnal Teknik Sipil*, Vol. 14, No. 1, Fakultas Teknik Sipil dan Lingkungan, ITB.
- Hutahaeen, S., 2007b, Kajian Teoritis terhadap Persamaan Gelombang Nonlinier, *Jurnal Teknik Sipil*, Vol. 14 No. 3, Fakultas Teknik Sipil dan Lingkungan ITB..
- Hutahaeen, S., 2007c, Model Refraksi Gelombang dengan Menggunakan Persamaan Gelombang Nonlinier, *Jurnal Infrastruktur dan Lingkungan Binaan*, Vol. 3, No. 2, Fakultas Teknik Sipil dan Lingkungan ITB.

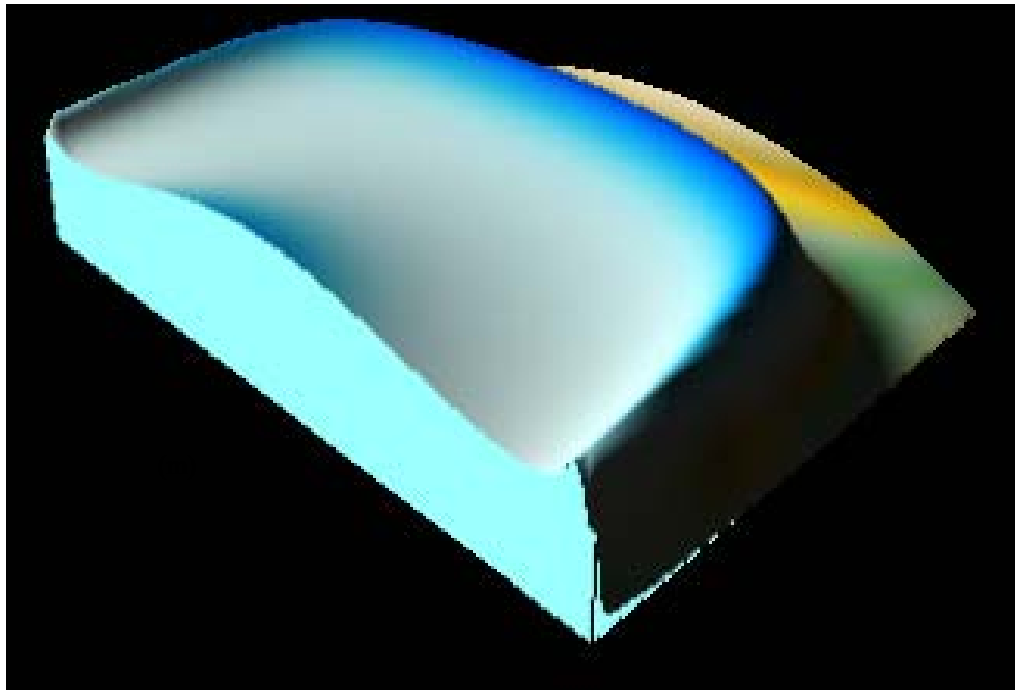


(a) Batimetri berkonfigurasi teluk



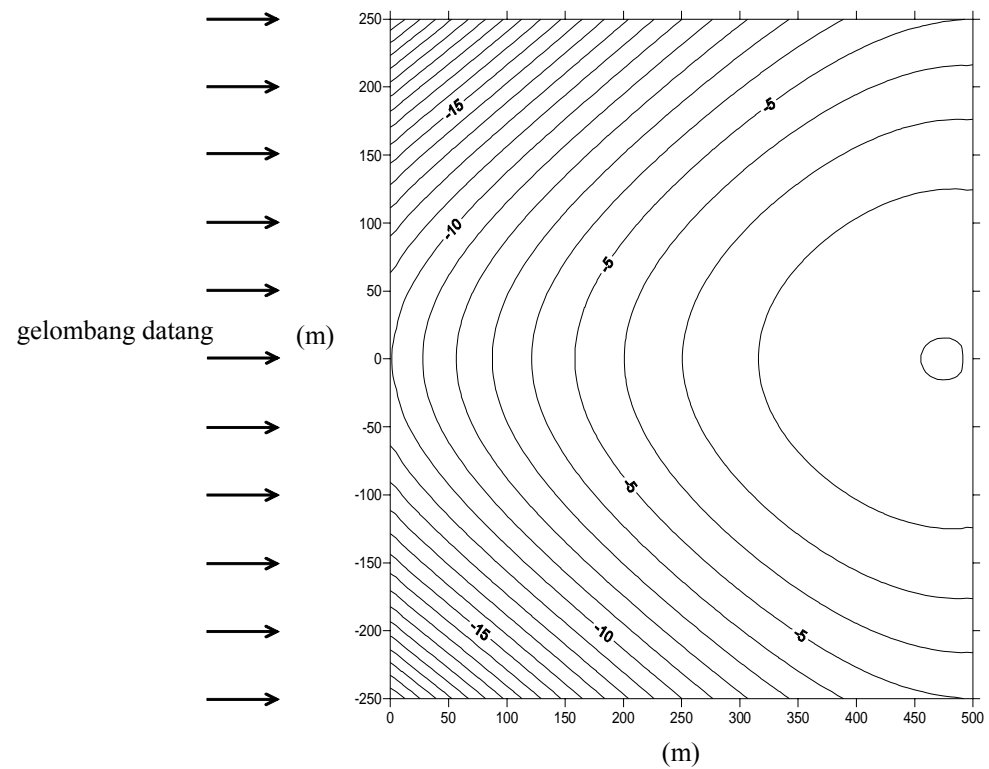
(b) Kontur tinggi gelombang pada teluk

(m)

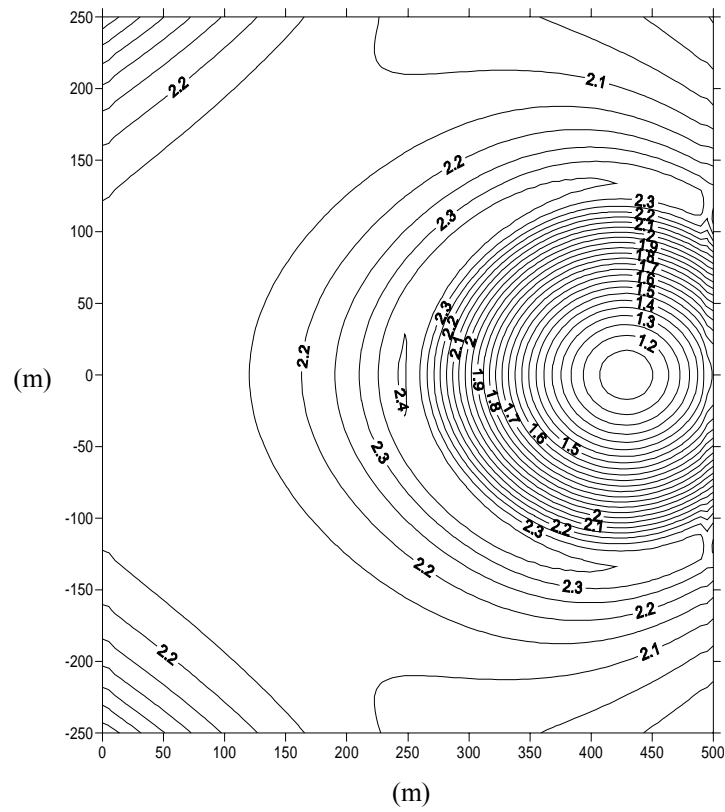


(c) Tinggi gelombang pada teluk

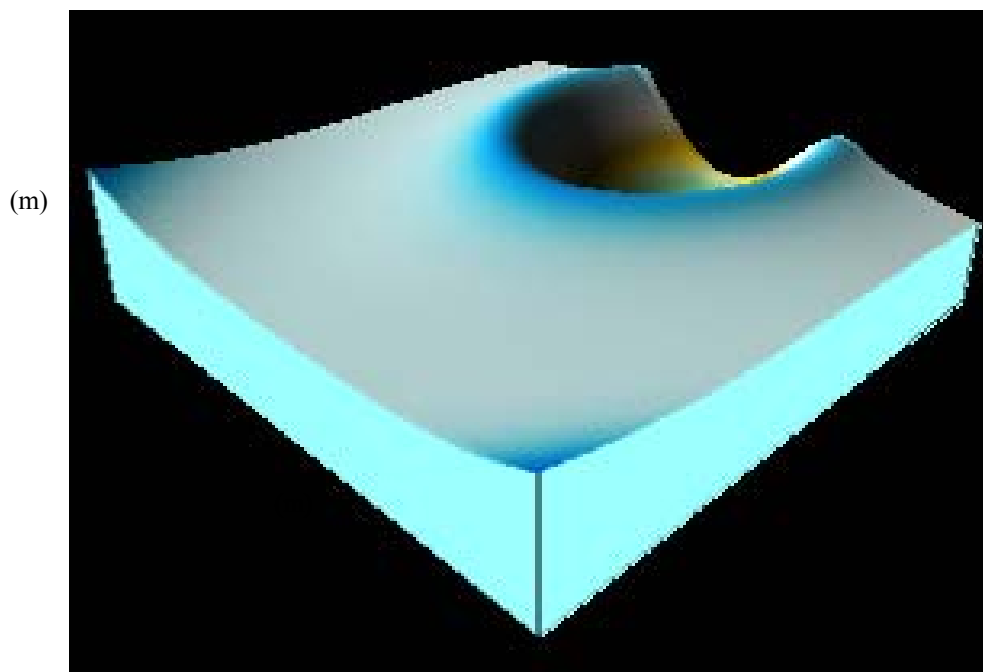
Gambar 1. Hasil simulasi Refraksi-difraksi pada teluk (a.b.c)



(a) Batimetri berkonfigurasi tanjung

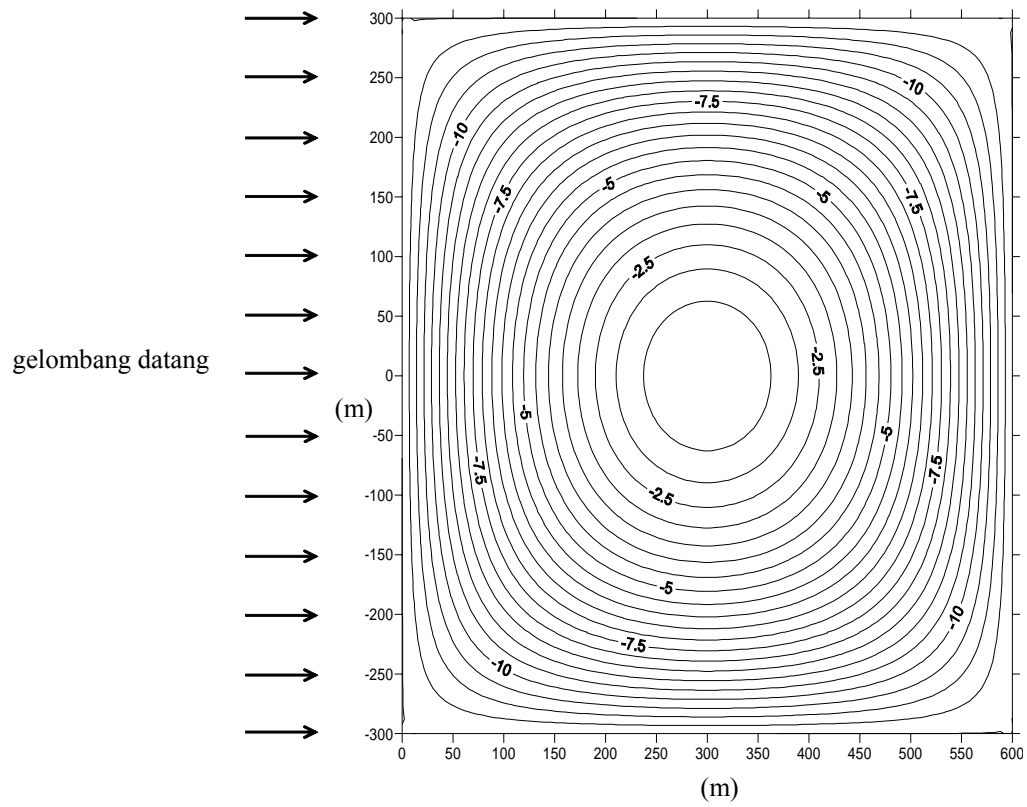


(b) Kontur tinggi gelombang pada tanjung

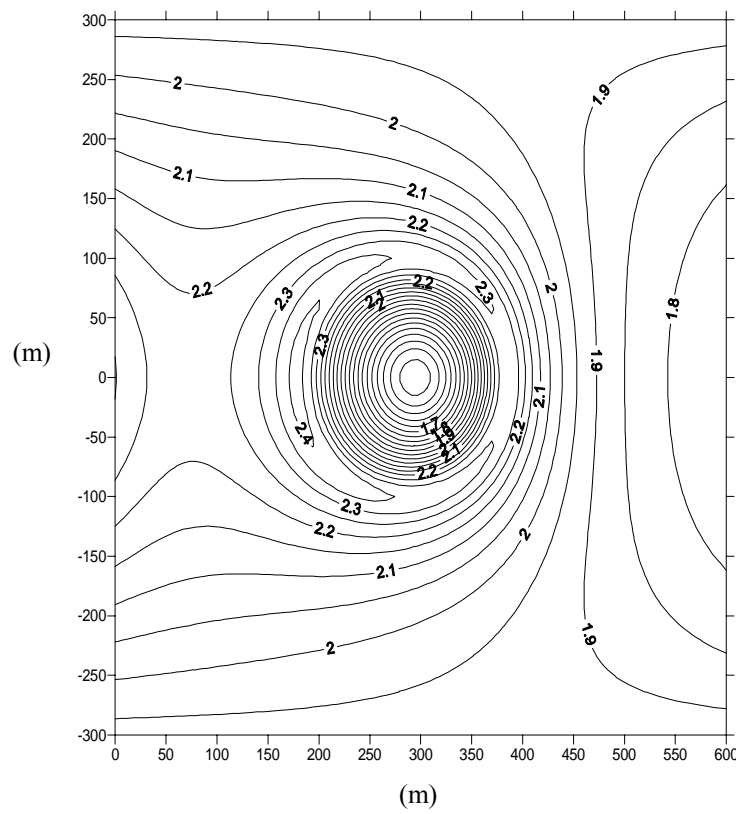


(c) Tinggi gelombang pada tanjung

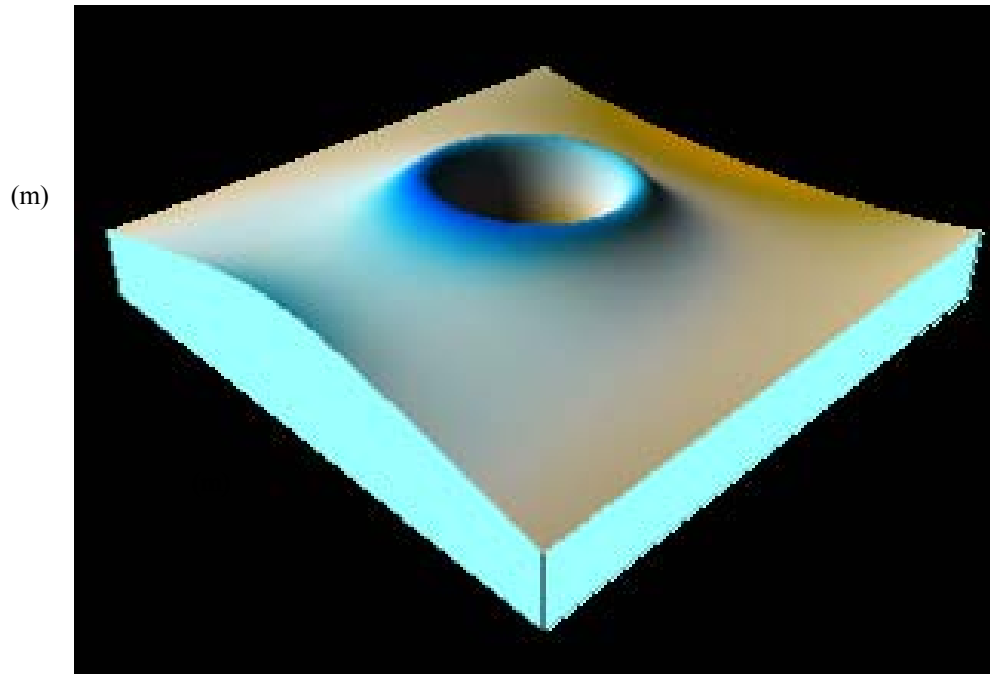
Gambar 2. Hasil simulasi Refraksi-difraksi pada tanjung (a,b,c)



(a) Batimetri berkonfigurasi pulau tenggelam



(b) Kontur tinggi gelombang pada pulau tenggelam

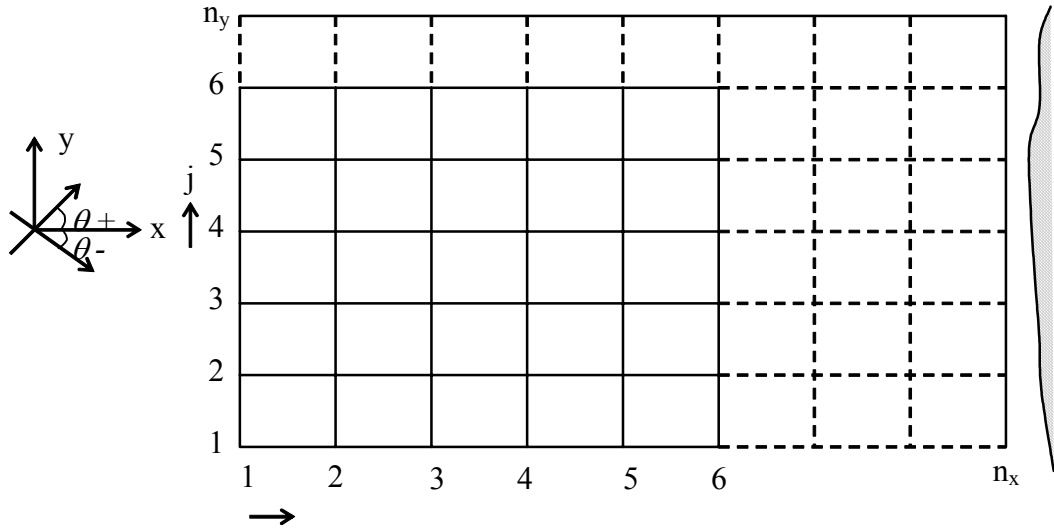


(c) Tinggi gelombang pada pulau tenggelam

Gambar 3. Hasil simulasi Refraksi-difraksi pada pulau tenggelam (a,b,c)

LAMPIRAN A

PENYELESAIAN NUMERIS DARI PERSAMAAN REFRAKSI-DIFFRAKSI



Gambar 4. Sistem salib sumbu dan definisi arah gelombang

Persamaan arah gelombang dapat ditulis dalam bentuk,

$$\frac{\partial(\cos \theta)}{\partial x} = F \quad (14)$$

$$F = \frac{\sigma A}{G e^{kh} B_1} - k \cos^2 \theta - \frac{1}{B_1} \frac{\partial B_1}{\partial x} \cos \theta - \left(2 + \frac{B_2}{B_1}\right) k \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial x} \cos \theta - k \sin^2 \theta - \frac{1}{B_1} \frac{\partial B_1}{\partial y} \sin \theta - \left(2 + \frac{B_2}{B_1}\right) k \sin \theta \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial(\sin \theta)}{\partial y} \quad (15)$$

Persamaan (15) dikalikan dengan dx dan diintegrasikan terhadap x ,

$$\int_{x_1}^{x_2} \partial \cos \theta = \int_{x_1}^{x_2} F dx$$

$$(\cos \theta)_{x=x_2} = (\cos \theta)_{x=x_1} + \int_{x_1}^{x_2} F dx \quad (16)$$

Dimana $\int_{x_1}^{x_2} F dx$ diselesaikan dengan metoda Newton-

Cote, dengan koefisien integrasi sebagai berikut, Hutahaeen (2005b).

a. Untuk 2 titik integrasi

$$(\cos \theta)_{x=x_2} = (\cos \theta)_{x=x_1}$$

$$+ \frac{x_2 - x_1}{2} (F_{x_1} + F_{x_2})$$

b. Untuk 3 titik integrasi

$$(\cos \theta)_{x=x_1} (\cos \theta)_{x=x_2} = + \frac{x_2 - x_1}{2} \left(\frac{1}{3} F_{x_1} + \frac{4}{3} F_{x_1+\Delta x} + \frac{1}{3} F_{x_2} \right)$$

b. Untuk 3 titik integrasi

$$(\cos \theta)_{x=x_2} = (\cos \theta)_{x=x_1} + \frac{x_2 - x_1}{2} (0.25 F_{x_1} + 0.75 F_{x_1+\Delta x} + 0.75 F_{x_1+2\Delta x} + 0.25 F_{x_2})$$

Selanjutnya dapat dihitung. $\theta_2 = \text{Arc}(\cos \theta_2)$ F_{x_2} adalah bilangan yang belum diketahui, karena θ $x = x_2$

belum diketahui. Untuk itu dilakukan perhitungan secara iterasi.

Langkah Perhitungan

1. Tentukan $\theta_{x,y} = \theta_0 = 0$
2. Hitung G dan k dengan menggunakan persamaan dispersi

3. Hitung $\partial G / \partial x$ dan $\partial G / \partial y$ dengan menggunakan persamaan momentum
4. Hitung F dengan **Persamaan (15)**
5. Hitung θ dengan **Persamaan (16)**
6. Hitung A dengan persamaan muka air
7. Periksa konvergensi
$$\left| \theta_{x,y}^{old} - \theta_{x,y}^{new} \right| \leq \varepsilon \quad \text{dan} \quad \left| A_{x,y}^{old} - A_{x,y}^{new} \right| \leq \varepsilon$$
8. Bila sudah konvergen perhitungan selesai
9. Bila belum konvergen kembali ke langkah 2

Semua perhitungan, digunakan amplitudo gelombang diperairan dalam yaitu A_0 .