8 APR 1982

INSTITUT TEKNOLOGI ... PERPUSTAKAAN

PROCEEDINGS ITB Vol. 14, No. 3, 1981

BEBERAPA ASPEK TEORI DAN PEMAKAIAN DALAM MASALAH DEKOMPOSISI SINGULIR*)

Oleh : M.A. Djauhari **)

SARI

Dekomposisi singulir suatu matriks real dapat dipandang dari berbagai sudut. Dengan bantuan rangkaian dual, di sini akan dipandang dari sudut operator Escoufier yang berkaitan dengan matriks tersebut. Selanjutnya akan dikemukakan beberapa aspek yang diakibatkan oleh pandangan ini.

ABSTRACT

The singular decomposition of a real matrix can be approached from several points of view. Here we use the Escoufier's operator and the instrument called diagram of duality. With this instrument we can visualize all mathematical terms involved in that problem.

1. PENDAHULUAN

Dekomposisi singulir suatu matriks real X ukuran $(p \times n)$ dalam bentuk yang sederhana adalah dekomposisi dalam elemen-elemen karakteristik dari XX' dan $X'X$.

Pada umumnya peranan dari baris-baris dan kolom-kolom dari X tidaklah sama. Mereka tidak menempati ruang vektor yang sama, baik mungkin dimensinya maupun metriknya. Oleh karena itu yang kita hadapi sesungguhnya bukan matriks X akan tetapi suatu triplet (X, M, D) di mana M dan D adalah matriks-matriks simetris definit positif, masing-masing ukuran $(p \times p)$ dan $(n \times n)$. Matriks M berperan mengukur jarak dan sudut antara vektor-vektor kolom dari X, sedangkan D berperan mengukur hal yang sama antar vektor-vektor baris dari X. Mengingat peranan tersebut, matriks M dan matriks D selanjutnya disebut metrik.

Ditinjau dari segi pemakaian seperti dalam analisis data, terutama dalam analisis komponen utama, dekomposisi singulir berguna sekali dalam melaksanakan reduksi suatu matriks data.

---

*) Penelitian ini dilaksanakan di Jurusan Pendidikan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Bandung.

**) Dosen pada Jurusan Pendidikan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Bandung, Jalan Ganesa 10, Bandung.

Ditinjau dari segi teori, banyak pendekatan telah dilaksanakan. Di sini, dengan bantuan instrumen rangkaian dual, pendekatan yang akan dilaksanakan adalah dengan melihat sifat-sifat operator Escoufier dari triplet (X, M, D). Dilaksanakannya pendekatan ini tidak lain dikandung maksud agar dapat:

a. membuat visualisasi semua mekanisme yang berkaitan dengan dekomposisi singulir.
b. memberikan peluang dalam pengembangan selanjutnya tentang analisis matriks data tiga dimensi atau lebih, X ukuran ($p \times n \times m$).

2. RANGKAIAN DUAL YANG INDAH

Misalkan X adalah matriks real ukuran ($p \times n$) di mana elemen pada baris ke-i dalam kolom ke-j adalah x_{ij}. Pembahasan dalam bagian ini akan dipusatkan pada pembentukan ruang-ruang vektor di mana vektor-vektor kolom dari X terletak, dan ruang-ruang vektor di mana vektor-vektor baris dari X terletak. Selain daripada itu akan ditinjau pula kaitan antar ruang-ruang vektor tersebut.

2.1 Representasi vektor kolom dan vektor baris dari X

Terhadap basis kanonik $\{e_1, e_2, \ldots, e_p\}$ dari ruang vektor $E = R^p$, setiap barisan terurut p bilangan $(x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{pj})$ yang terdiri dari elemen-elemen kolom ke-j dari X, dapat dinyatakan dengan vektor

$$X^j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{pj} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{p} x_{ij}\, e_i \; ; \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Jadi setiap kolom ke-j dari X dinyatakan oleh vektor X^j di E. Pernyataan ini berarti pula bahwa, untuk setiap i dari 1 sampai dengan p, sumbu yang dibangun oleh vektor e_i kita kaitkan dengan baris ke-i dari X dalam arti bahwa x_{ij} adalah harga dari X^j pada sumbu tersebut.

Demikian pula terhadap basis kanonik $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ dari $F = R^n$, setiap baris ke-i dari X; $i = 1, 2, \ldots, p$, dapat dinyatakan oleh vektor X_i di F sebagai berikut:

$$X_i = \begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{in} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\, f_j$$

Dengan alasan yang sama seperti di atas, hubungan ini berarti pula bahwa sumbu yang dibangun oleh f_j tidak lain adalah kolom ke-j dari X; y = 1, 2, . . . , n.

Pendekatan yang lebih modern tentang arti geometris baris-baris dan kolom - kolom suatu matriks real, adalah dengan memandang ruang-ruang dual E* dari E dan F* dari F. Misalkan $\{e_1^*, e_2^*, \ldots, e_p^*\}$ dan $\{f_1^*, f_2^*, \ldots, f_n^*\}$ adalah basis-basis dual kanonik masing-masing dari E* dan F*;

$$e_i^* (e_j) = \delta_{ij}$$

$$\text{dan} \quad f_k^* (f_l) = \delta_{kl}$$

di mana δ_{ij} dan δ_{kl} adalah delta Kronecker.

Bila f_j^* diterapkan pada vektor X_i, kita peroleh bahwa, untuk setiap i dari 1 sampai dengan p;

$$f_j^* (X_i) = x_{ij} \; ; \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Ini berarti bahwa harga dari f_j^* pada baris ke-i dari X, tidak lain adalah elemen vektor kolom ke-j dari X pada baris tersebut. Dengan demikian vektor f_j^* di F* adalah representasi dari kolom ke-j dari X: j = 1, 2, . . . , n.

Dengan cara dan alasan yang sama, setiap vektor e_i^*; i = 1, 2, . . . , p, tidak lain adalah representasi baris ke-i dari X pada E*.

Sebagai kesimpulan dapat dikemukakan bahwa, untuk setiap j dari 1 sampai dengan n, terhadap kolom ke-j dari X dikaitkan:

i vektor X^j di E

ii sumbu yang dibangun oleh vektor f_j di F

iii bentuk linear f_j^* di F*.

Demikian pula, untuk setiap i dari 1 sampai dengan p, terhadap baris ke-i dari X dikaitkan:

i vektor X_i di F

ii sumbu yang dibangun oleh vektor e_i di E

iii bentuk linear e_i^* di E*.

2.2 Matriks X sebagai transformasi linear

Dari pembahasan dalam butir 2.1 kita lihat bahwa setiap kolom dari X mempunyai dua representasi vektor; satu di E dan satu lagi di F*. Demikian pula halnya dengan setiap baris dari X. Melihat hal ini, sewajarnyalah jika kita mempermasalahkan hubungan antara X^j di E dan f_j^* di F*, serta antara X_i di F dan e_i^* di E*.

Pandang transformasi linear:

$$\begin{aligned} t : F^* &\longrightarrow E \\ f_j^* &\longmapsto X^j = \sum_{i=1}^{p} x_{ij}\; e_i \end{aligned}$$

untuk setiap j dari 1 sampai dengan n.

Terhadap basis-basis kanonik dari F* dan dari E di atas, kita lihat bahwa matriks transformasi dari t tidak lain adalah matriks X sendiri.

Jadi kita peroleh diagram;

$$\begin{aligned} F^* &\xrightarrow{\quad X \quad} E \\ f_j^* &\longmapsto X^j \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama, matriks transformasi dari transformasi linear yang memetakan e_i^* di E^* menjadi X_i di F adalah X' yaitu transpose dari X:

$$\begin{aligned} E^* &\xrightarrow{\quad X' \quad} F \\ e_i^* &\longmapsto X_i \end{aligned}$$

2.3 Rangkaian dual

Misalkan M (p x p) dan D(n x n) adalah metrik-metrik (Euclides) yang diterapkan masing-masing pada E dan F. Metrik M berperan mengukur jarak dan sudut antar dua vektor kolom dari X:

$$\begin{aligned} E &\xrightarrow{\quad M \quad} E^* \\ x &\longmapsto M_x \end{aligned}$$

di mana $M_x(y) = M(x, y) = \langle x, y\rangle_M = x' M y$ untuk setiap y di E. Sedangkan metrik D berperan mengukur jarak dan sudut antar dua vektor baris dari X:

$$\begin{aligned} F &\xrightarrow{\quad D \quad} F^* \\ x &\longmapsto D_x \end{aligned}$$

Di mana $D_x(y) = D(x, y) = \langle x, y\rangle_D = x' D y$ untuk setiap y di F.

Dari semua pembicaraan terdahulu, dengan mengambil transformasi-transformasi:

$V = X D X'$ dan $W = X' M X$

kita peroleh,

i diagram komutatif,

$$\begin{array}{ccc} E & \xleftarrow{\quad X \quad} & F^* \\ M \downarrow\uparrow V & & W \downarrow\uparrow D \\ E^* & \xrightarrow{\quad X' \quad} & F \end{array}$$

yang disebut rangkaian dual yaitu rangkaian dari semua transformasi linear dan semua ruang vektor yang berkaitan dengan triplet (X, M, D), di mana

$X(f_j^*) = X^j \quad : \quad j = 1, 2, \ldots, n$

$X'(e_i^*) = X_i \quad : \quad i = 1, 2, \ldots, p$

ii bahwa V dan W adalah bentuk-bentuk bilinear simetris semi definit positif dan memenuhi.

a) untuk setiap vektor a dan b di F*,

$$\langle a, b\rangle_W = a' W b = a' X' MXb = (Xa)' M (Xb)$$
$$= \langle X(a), X(b)\rangle_M$$

Khususnya, $\langle f_j^*, f_{j'}^*\rangle_W = \langle X^j, X^{j'}\rangle_M$

Catatan Karena M definit, maka W(a, a) = 0 jika dan hanya jika a di Ker (X).

Jadi W adalah definit positif jika dan hanya jika X injektif. Selanjutnya, dalam pemakaian, biasanya $p < n$ sehingga X tidak injektif yang berarti bahwa W hanyalah semi definit positif.

b) untuk setiap vektor x dan y di E*,

$$\langle x, y\rangle_V = x' V y = x' X D X' y = (X' x) D (X' y)$$
$$= \langle X'(x), X'(y)\rangle_D$$

Khususnya, $\langle e_i^*, e_{i'}^*\rangle_V = (X_i, X_{i'})_D$.

Di sini pun berlaku sifat bahwa V adalah definit positif jika dan hanya jika X' injektif.

Dalam pembahasan selanjutnya, kita akan selalu mempergunakan instrumen rangkaian dual di atas sebagai alat visualisasi dan sekaligus sebagai tempat berpijak.

3. OPERATOR KARAKTERISTIK DARI (X, M, D)

Telah kita ketahui bahwa setiap kolom dari X dapat dinyatakan oleh suatu vektor di E. Bentuk konfigurasi dari vektor-vektor kolom tersebut, terhadap metrik M, dinyatakan oleh matriks W yang merupakan pemetaan linear dari F* ke dalam F. Dalam pembahasan ini bentuk konfigurasi tersebut adalah merupakan pusat kajian. Dengan demikian kita akan memusatkan perhatian pada operator WD yang merupakan operator dari F ke dalam dia sendiri.

Kedua sifat berikut memperlihatkan hubungan antara elemen-elemen karakteristik dari operator-operator MV dan WD.

Sifat 1 Jumlah semua harga karakteristik dari operator-operator MV, VM, dan WD adalah sama.

Sifat ini jelas sekali; cukup dilihat trace dari ketiga operator tesebut.

Sifat 2. Jika a di E^*, MV a = λ a, dan c = X'(a), maka WD c = λ c. Sebaliknya setiap vektor c di F yang memenuhi WD c = λ c dengan $\lambda \neq 0$, adalah berbentuk c = X'(a) di mana a di E^* dan MV a = λ a.

Bukti:
Pernyataan pertama adalah jelas. Oleh karena itu kita buktikan saja pernyataan kedua. Dengan melihat pada rangkaian dual, dari hubungan WD c = λ c kita peroleh:

$$MVMXD\ c = \lambda\ MXD\ c$$

Tulis b = MXD c. Jadi X'(b) = X'MXD c = WD c = λ c. Karena $\lambda \neq 0$, dengan mengambil a = λ^{-1} b, kita peroleh c = X'(a) di mana a di E^* dan a memenuhi MV a = λ a. ■

Sifat-sifat itulah, selain bahwa WD ditentukan oleh X, M, dan D, yang membuat operator WD sebagai operator karakteristik dari triplet (X, M, D). Operator WD ini bisa disebut operator Escoufier.

4. HASIL-HASIL PRAKTIS YANG DIPEROLEH

Misalkan WD $c_i = \lambda_i c_i$, $c_i \neq 0$, i = 1, 2, . . . ,n dan $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_r \geq \lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_n = 0$ di mana r adalah rank dari WD. Jadi untuk setiap i dari 1 sampai dengan r, $c_i = X'(a_i)$ untuk suatu a_i di E^*. Di sini kita kenali bahwa bila $\| c_i \|_D^2 = \lambda_i$, c_i tidak lain komponen utama ke-i dari triplet (X, M, D) untuk setiap i dari 1 sampai dengan r.

Dalam pembahasan selanjutnya kita hanya akan memperhatikan akar karakteristik yang tidak nol.

Dengan mengambil $\| c_i \|_D^2 = \lambda_i$, maka dengan sedikit manipulasi operasi-operasi matriks kita peroleh sifat berikut.

Sifat 3. Jika VM $u_i = \lambda_i u_i$, u_i di E;
i = 1, 2, . . . , r dan panjang u_i terhadap metrik *M* adalah 1, maka $u_i = \lambda_i^{-1}$ XD c_i.

Jika selanjutnya sifat 2 dan sifat 3 digabungkan, maka kita peroleh akibat berikut.

Akibat 1. Untuk setiap i dari 1 sampai dengan r berlaku:

i $a_i = M u_i$ atau $u_i = M^{-1} a_i$

ii $u_i = \lambda_i^{-1} V a_i$

iii $\| a_i \|_{M^{-1}} = 1$

iv $\| a_i \|_V^2 = \lambda_i$

Catatan. Vektor-vektor u_i dan a_i biasa disebut sebagai sumbu utama ke-i dan faktor utama ke-i.

Ketiga vektor c_i, u_i dan a_i sekarang dapat dirangkumkan dalam hubungan linear berikut.

$$c_i = X'(a_i) = X'M u_i$$
$$u_i = \lambda_i^{-1} V a_i = \lambda_i^{-1} XD c_i$$

Akibat 2. (Dekomposisi singulir). Matriks D dapat kita tuliskan sebagai $D = T'T$ di mana T adalah suatu isomorfisma dari F ke dalam dia sendiri. Isomorfisma ini menimbulkan perubahan metrik di dalam F menjadi metrik satuan I ukuran $(n \times n)$. Selanjutnya dari hubungan $WD c_i = \lambda_i c_i$ dan $\| c_i \|_D^2 = \lambda_i$ kita peroleh bahwa vektor

$$y_i = T(\lambda_i^{-\frac{1}{2}} c_i)$$

memenuhi $W_0 y_i = \lambda_i y_i$ dan $\| y_i \|_I^2 = 1$, di mama $W_0 = TWT'$. Dengan mengambil kumpulan $\{y_1, y_2, \ldots, y_r\}$ yang I-ortonormal, maka kumpulan tersebut dapat kita lengkapi menjadi $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ yang merupakan basis I-ortonormal dari F [Lihat Halmos (1958), Theorem, halaman 127]. Vektor-vektor y_i; $i > r$, adalah vektor karakteristik dari W_0 dengan harga karakteristik sama dengan nol. Selanjutnya matriks Y, ukuran $(n \times n)$, dengan y_i sebagai kolom ke-i, memenuhi sifat:

$$YY' = I \quad \text{dan } Y'Y = I$$

Telah kita ketahui bahwa antara u_i dan c_i terdapat hubungan linear berikut.

$$XD c_i = \lambda_i u_i \quad \text{atau} \quad XT' y_i = \lambda_i^{\frac{1}{2}} u_i$$

untuk setiap i dari 1 sampai dengan r.

Jika kedua ruas dikalikan, dari kanan, dengan y_i' dan kemudian dijumlahkan untuk semua i dari 1 sampai dengan n, maka kita peroleh hubungan,

$$XT' \sum_{i=1}^{n} y_i \, y_i' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{\frac{1}{2}} u_i \, y_i'$$

Sedangkan $\sum_{i=1}^{n} y_i \, y_i' = YY' = I$. Jadi, akhirnya kita peroleh hubungan (dekomsisi singulir) bahwa:

$$X = \sum_{i=1}^{r} u_i \, c_i'$$

5. ASPEK PEMAKAIAN

5.1 Reduksi matriks X

Misalkan k suatu bilangan asli antara 1 dan r, dan σ suatu permutasi pada kumpulan $\{1, 2, \ldots, r\}$.

Selanjutnya kita tuliskan,

$$X_{\sigma/k} = \sum_{i=1}^{k} u_{\sigma(i)} \; c'_{\sigma(i)}$$

Khususnya bila k = r,

$$X_{\sigma/r} = X = \sum_{i=1}^{r} u_i \; c_i'$$

untuk setiap permutasi σ.

Jika σ_0 adalah permutasi satuan, yakni $\sigma_0(i) = i$ untuk setiap i dari 1 sampai dengan r, secara khusus pula kita tuliskan:

$$X_{(k)} = X_{\sigma_0/k} = \sum_{i=1}^{k} u_i \; c_i'$$

Dengan sedikit perhitungan yang sederhana, untuk setiap permutasi σ, matriks $X_{\sigma/k}$ dapat kita tuliskan sebagai perkalian dua matriks U ukuran (p × k) dan C' ukuran (k × n):

$$X_{\sigma/k} = UC'$$

di mana kolom ke-i dari U adalah vektor $u_{\sigma(i)}$ dan kolom ke-i dari C adalah vektor $c_{\sigma(i)}$.

Misalkan MAT_{pn} adalah ruang vektor semua matriks real ukuran (p × n). Untuk mengartikan dan mengkuantitatifkan pengertian reduksi matriks X(p × n), penulis mengusulkan dua proposisi berikut. Proposisi 1 berisi usulan berbentuk alat reduksi dan Proposisi 2 mengemukakan hasil reduksi beserta kualitas reduksi. Untuk itu kita pergunakan definisi matriks-matriks M(p × p) dan D(n × n) seperti pada butir 2,3.

Proposisi 1 Pemetaan $f : MAT_{pn} \times MAT_{pn} \longrightarrow R$ yang didefinisikan oleh f(A, B) = Trace (ADB'M) untuk setiap A dan B di MAT_{pn} adalah suatu bentuk bilinear simetris definit positif.

Bukti Sifat bilinear dan simetris dari f adalah jelas sebab;

$$\begin{aligned}
&\text{Trace}\,(P + Q) = \text{Trace}\,(P) + \text{Trace}\,(Q)\\
&\text{Trace}\,(\alpha P) = \alpha\, \text{Trace}\,(P)\\
&\text{Trace}\,(P) = \text{Trace}\,(P')\\
&\text{Trace}\,(RS) = \text{Trace}\,(SR)
\end{aligned}$$

untuk setiap α real, P dan Q bujur sangkar serta setiap matriks R(1 × m) dan S(m × 1). Akan ditunjukkan sekarang bahwa f definit positif.

$$
\begin{aligned}
f(A, A) &= \text{Trace}\,(ADA'M) \\
&= \text{Trace}\,(AP'PA'Q'Q), \text{ dengan } P'P = D \text{ dan } Q'Q = M \\
&= \text{Trace}\,(QAP'PA'Q') \\
&= \text{Trace}\,(RR'), \text{ dengan } R = QAP' \\
&= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} r_{ij}^2
\end{aligned}
$$

dengan r_{ij} adalah elemen baris ke-i dan kolom ke-j dari R. Jelas bahwa $f(A, A) \geqslant 0$ untuk setiap A di MAT_{pn} dan $f(A, A) = 0$ jika dan hanya jika $R = 0$. Sedangkan $R = QAP'$ atau $A = Q^{-1}R(P')^{-1}$. Jadi $f(A, A) = 0$ jika dan hanya jika $A = 0$. ■

Akibat. Pemetaan f adalah suatu produk skalar di MAT_{pn} dan besaran $|||A||| = \sqrt{\text{Trace}\,(ADA'M)}$ adalah norma dari A, untuk setiap A di MAT_{pn}.

Proposisi 2. Untuk setiap permutasi σ pada kumpulan $\{1, 2, \ldots, r\}$ dan setiap k dari 1 sampai dengan r, matriks $X_{\sigma/k}$ memenuhi:

i $X_{\sigma/k}$ di MAT_{pn} dan rank $(X_{\sigma/k}) = k$

ii norma matriks $(X - X_{\sigma/k})$ adalah,

$$|||X - X_{\sigma/k}||| = \sqrt{\sum_{i=k+1}^{r} \lambda_{\sigma(i)}}$$

iii $f(X_{\sigma/k}, (X - X_{\sigma/k})) = 0$

Bukti. Pernyataan pertama adalah jelas, sebab $X_{\sigma/k} = UC'$ di mana $U(p \times k)$, $C(n \times k)$ dan masing-masing mempunyai rank sebesar k. Untuk membuktikan pernyataan kedua, kita pergunakan ketiga hubungan berikut.

a) $f(X, X) = \text{Trace}\,(XDX'M) = \text{Trace}\,(X'MXD)$

$$= \text{Trace}\,(WD) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \lambda_{\sigma(i)} \text{ untuk setiap permutasi } \sigma$$

b). $f(X, X_{\sigma/k}) = f(X_{\sigma/k}, X_{\sigma/k}) + \sum_{i=k+1}^{r} \sum_{j=1}^{k} f(u_{\sigma(i)}\, c'_{\sigma(i)}, u_{\sigma(j)}\, c'_{\sigma(j)})$

$$= f(X_{\sigma/k}, X_{\sigma/k}) \text{ sebab bila } i \neq j,\ c'_{\sigma(i)} D\, c_{\sigma(j)} = 0$$

c). $f(X_{\sigma/k}, X_{\sigma/k}) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} f(u_{\sigma(i)}\, c'_{\sigma(i)}, u_{\sigma(j)}\, c'_{\sigma(j)})$

$$= \sum_{i=1}^{k} f(u_{\sigma(i)}\, c'_{\sigma(i)}, u_{\sigma(i)}\, c'_{\sigma(i)})$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \lambda_{\sigma(i)} \text{ sebab } u'_{\sigma(i)} M\, u_{\sigma(i)} = 1\,;\ i = 1, 2, \ldots, r.$$

Jadi : $|||X - X_{\sigma/k}|||^2 = f(X - X_{\sigma/k}, X - X_{\sigma/k})$

$$= f(X, X) - 2f(X, X_{\sigma/k}) + f(X_{\sigma/k}, X_{\sigma/k})$$

$$= \sum_{i=k+1}^{k} \lambda_{\sigma(i)}$$

Selanjutnya dengan menggunakan hubungan b) di atas pernyataan ketiga segera kita peroleh keabsahannya. ■

Dari ketiga butir pada Proposisi 2 dapat dikemukakan kesimpulan berikut:

1. Untuk setiap permutasi σ, $X_{\sigma/k}$ adalah matriks ukuran $(p \times n)$, dengan rank-nya sebesar k, yang merupakan reduksi dari matriks X.
2. Untuk setiap permutasi σ, kualitas reduksi dari matriks $X_{\sigma/k}$ dapat dihayati melalui kedua besaran di bawah ini.
   a). Dengan melihat X dan $X_{\sigma/k}$ sebagai vektor-vektor dalam ruang vektor MAT_{pn}, kualitas $X_{\sigma/k}$ dapat dinyatakan oleh perbandingan norma dari $X_{\sigma/k}$ terhadap norma dari X:

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} \lambda_{\sigma(i)}}{\sum_{i=1}^{r} \lambda_{\sigma(i)}}} \times 100\%$$

   b). Dilihat dari segi statistika, bila X merupakan matriks hasil pengukuran p buah variabel kuantitatif pada n buah individu dan D merupakan metrik diagonal dengan elemen diagonal ke-j adalah bobot vektor kolom ke-j dari X, maka $\lambda_{\sigma(i)}$ tidak lain adalah variansi dari komponen utama $c_{\sigma(i)}$ [Lihat bagian 4, Paragraf pertama]. Selanjutnya bila $M = I_p$, $\sum_{i=1}^{r} \lambda_{\sigma(i)}$ adalah variansi total dari semua variabel [Lihat sifat 1, bagian 3]. Dalam artian variansi ini, biasanya diambil besaran:

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} \lambda_{\sigma(i)}}{\sum_{i=1}^{r} \lambda_{\sigma(i)}} \times 100\%$$

   sebagai kualitas reduksi $X_{\sigma/k}$.

   Berdasarkan kedua ukuran kualitas di atas, kita peroleh bahwa $X_{(k)}$ adalah matriks reduksi dari X yang paling baik di antara semua $X_{\sigma/k}$.

3. Misalkan $MAT_{pn}(k) = \{X_{\sigma/k} \mid \sigma$ adalah permutasi pada $\{1, 2, \ldots, r\}\}$. Jelas $MAT_{pn}[(k)$ adalah kumpulan bagian dari $MAT_{pn}]$, tapi tidak merupakan ruang bagian. Berdasarkan butir (iii), Proposisi 2, kita lihat bahwa $X_{\sigma/k}$ tidak lain adalah proyeksi tegak lurus (dalam artian produk skalar f) dari X pada $MAT_{pn}(k)$.

   Oleh karena itu walaupun kualitas reduksinya tinggi, karena MAT_{pn} hanya merupakan kumpulan bagian dari MAT_{pn}, matriks $X_{(k)}$ belum tentu merupakan matriks yang paling dekat ke X di antara semua matriks di MAT_{pn} yang mempunyai rank sama dengan $k < r$.

5.2 Pengertian geometris

Dari hubungan $c_i = X' M u_i$ dan $u_i = \lambda_i^{-1} XD c_i$ dapat kita baca bahwa:

i elemen u_{ij} dari U' ; $i = 1, 2, \ldots, k$ dan $j = 1, 2, \ldots, p$, tidak lain adalah kordinat vektor baris ke-j dari X pada komponen utama ke-i, dibagi oleh λ_i di F.

ii elemen c_{ij} dari C' ; $i = 1, 2, \ldots, k$ dan $j = 1, 2, \ldots, n$, adalah kordinat vektor kolom ke-j dari X pada sumbu utama ke-i di E.

DAFTAR PUSTAKA

1. CAILLEZ F. dan PAGES J.P. (1976). *Introduction à l'Analyse des Données.* SMASH, Paris.
2. ESCOUFIER Y. (1976). *Opérateur associé à un tableau de données.* Annales de l' INSEE, no. 22 - 23.
3. ESCOUFIER Y. (1978). *Cours d' Analyse des Données.* USTL, Montpellier.
4. GABRIEL K.R., HILL M. dan LAW-YONE H. (1974). *A multivariate statistical technique for regionalization.* Journal of Regional Science, vol. 14, no. 1.
5. HALMOS, P. R., (1958). *Finite-dimensional vector spaces*, 2nd edition, Van Nostrand Company, Inc, N.Y.
6. PAGES J.P., ESCOUFIER Y. dan CAZES P. (1976). *Opérateur et Analyse des Tableaux à plus de deux dimensions.* Cahier du BURO, no. 25.