Estimasi Model Parametrik Komponen Feedback, Feedforward, dan Nois pada Sistem Lup Tertutup dengan *Teknik Extended Least Square*

Harijono A. Tjokronegoro

Departemen Teknik Fisika
Institut Teknologi Bandung
Jl. Ganesa No. 10, Bandung, 40132

Abstrak. Pada makalah ini dilaporkan hasil penelitian tentang teknik estimasi langsung terhadap model parametrik komponen-komponen sistem di dalam struktur lup tertutup, dengan teknik *extended least squares*. Tiga komponen (subsistem) sekaligus menjadi obyek estimasi, yaitu komponen umpan maju, umpan balik, dan komponen nois. Dalam penelitian ini telah diasumsikan bahwa komponen sistem yang menjadi obyektif penelitian adalah linier dan tidak berubah terhadap waktu. Umumnya hanya satu komponen yang dapat diestimasi, secara tidak langsung, dan dengan asumsi bahwa komponen yang lain di dalam lup tertutup diketahui modelnya. Analisis yang diberikan menunjukkan bahwa teknik yang diusulkan memberikan jaminan non-bias. Dari struktur estimasi yang diusulkan, salah satu komponen *umpan balik* atau komponen *umpan maju* dapat saja tidak stabil sepanjang sistem lup tertutup adalah stabil.

Abstract. In this paper is considered a direct estimation technique of model parameters of components (subsystems) of a feedback system using an extended least squares algorithm. There are three components of system may be estimated, feedback, feedforward, and noise. It has been assumed that the system considered was linear and time invariant. A common estimation technique for closed loop system is indirect, and under assumption that only one component will be estimated while the other components in the closed loop are known. The analysis shows that the proposed technique is unnbias. In the proposed structure, one of the components in the closed loop system maybe unstable, as long as the closed loop system is stable.

Keyword: *Model Estimation*, *Extended Least Squares Technique*, *Model Validation*, *Closed Loop System*

1. Pendahuluan

Estimasi model dinamik sistem banyak dilakukan dalam pekerjaan yang berhubungan dengan teori kontrol otomatik maupun dalam pengolahan sinyal modern. Pada teori kontrol otomatik, model dinamik (model matematik) sangat diperlukan pada tahap perancangan sampai dengan pada tahap penalaan sistem kontrol. Pekerjaan estimasi (atau identifikasi) model parametrik sistem tidak hanya terbatas aplikasinya pada teknik kontrol otomatik, tetapi juga pada banyak bidang lainnya, misalnya pada pekerjaan pemodelan dan analisis sinyal. Tahapan estimasi model dimulai dengan menetapkan terlebih dahulu secara *apriori* model dasar sistem yang menjadi perhatian. Untuk itu pengetahuan umum tentang sistem yang bersangkutan sangat diperlukan, sekurang-kurangnya untuk mengetahui kompleksitas model yang akan diperoleh. Dalam pemodelan matematik sistem, model dasar tidak kurang menggambarkan sifat-sifat linier atau non-linier, stasioner atau non-stasioner, deterministik atau stokastik, serta orde (kompleksitas) *time delay* maupun struktur sistem. Dari model dasar yang diperoleh selanjutnya dilakukan pengukuran input-output dari sistem yang menjadi perhatian. Dengan dipunyainya set data input-output sistem yang bersangkutan, dan berangkat dari model dasar yang telah ditetapkan, model sistem mulai diestimasi dengan menggunakan metoda yang sesuai.

Permasalahan estimasi model dinamik sistem dalam konfigurasi lup tertutup adalah sangat kompleks. Metode atau teknik estimasi model lup terbuka tidak dapat diterapkan pada sistem lup tertutup. Adanya pengaruh umpan balik pada sinyal terukur menyebabkan syarat perlu tidak bias pada metoda estimasi model dinamik sistem pada lup terbuka menjadi tidak terpenuhi. Sedangkan pada banyak kenyataan, dengan berbagai alasan dan keterbatasan yang ada, seringkali sistem dinamik yang menjadi perhatian tidak dapat dilepaskan dari konfigurasi lup tertutup. Selain hal tersebut kehadiran nois pada sistem lup tertutup membuat persoalan estimasi komponen-komponen sistem atau subsistem-subsistem di dalamnya menjadi semakin kompleks. Persoalan-persoalan tersebut menyebabkan estimasi model dinamik sistem dalam lup tertutup banyak menjadi objek penelitian sejak lama. Antara lain sehubungan dengan realisasi maupun penalaan sistem kontrol otomatik di lapangan[1]. Beberapa hasil penelitian tentang estimasi model dinamik sistem dalam lup tertutup diantaranya telah dipublikasikan oleh H.A. Tjokronegoro (1999)[2]. Dan yang terbaru antara lain oleh

Dongliang Huang and Tohru Katayama (2000)[3], JianLin Mo and XiaoMing Xu (2000)[4], dan Wei Xing Zheng (2000)[5]. H.A. Tjokronegoro (1997)[6] telah meninjau dan membuktikan bentuk khusus dari metoda *instrumental variable* untuk sistem lup tertutup. Kemudian Dongliang Huang and Tohru Katayama (2000)[3] menyelesaikan masalahnya dengan melakukan transformasi struktur *contionuous state-space* dari lup tertutup menjadi lup terbuka, kemudian memperkenalkan teknik *delta-operator*. Yang terpenting dari metoda ini adalah proses diskritasi yang dilakukan dengan *delta-operator* untuk eliminasi aspek non-linier yang muncul. Selanjutnya, JianLin Mo and XiaoMing Xu (2000)[4] menggunakan prinsip statistik order tinggi terutama untuk tujuan menekan aspek nois ARMA yang ada. Sementara metoda yang digunakan adalah dari kelas *modified mean square error criterion*. Dan yang terakhir, Wei Xing Zheng (2000)[5] menyelesaikan masalahnya dengan menggunakan teknik *instrumental variable* yang dimodifikasi. Di mana, realisasi dilakukan dengan dua tahap, estimasi sistem lup tertutup, kemudian manipulasi model yang didapatkan untuk memperoleh model sistem yang menjadi sasaran.

H.A. Tjokronegoro dan Kusnadi (2001)[7] telah menawarkan solusi dari persoalan estimasi komponen *umpan maju* dari suatu sistem lup tertutup secara tidak langsung, melalui tiga tahapan. Salah satu persoalan yang dihadapi dari metoda yang ini adalah, selain harus dengan tiga tahapan, juga dihasilkan orde model yang tidak minimum.

Pada makalah ini diajukan suatu solusi yang lain untuk estimasi model parametrik komponen-komponen sistem (subsistem-subsistem) yang ada di dalam konfigurasi lup tertutup. Yang menjadi obyektif dalam penelitian ini adalah sekaligus estimasi komponen *umpan maju*, komponen *umpan balik* maupun komponen nois. Metoda yang diajukan dalam makalah ini adalah penyederhanaan dari metoda yang diajukan oleh H.A. Tjokronegoro (1999)[2], di mana pada metoda tersebut, realisasinya dimulai dengan kreasi *variable instrumental*, sehingga teknik estimasi model parametrik dari kelas *variable instrumental* dapat digunakan. Adapun estimator yang digunakan pada teknik estimasi yang diusulkan pada makalah ini adalah dari kelas *extended least square*, dan bukan strategi *instrumental variable*. Metoda pendekatan yang ditawarkan pada makalah ini pada dasarnya mirip dengan yang telah ditawarkan oleh H.A. Tjokronegoro dan Kusnadi (2001)[7], yaitu model sistem lup tertutup ditransformasikan menjadi struktur lup terbuka. Perbedaan utama adalah bahwa pada metoda yang ditawarkan di dalam makalah ini hanya terdapat satu tahap (langsung) untuk memperoleh model komponen *umpan maju* dan komponen model nois. Sedang komponen *umpan balik* diperoleh dari hasil estimasi komponen *umpan maju*. Sementara pada solusi yang diusulkan terdahulu memerlukan tiga tahap (tidak langsung)[7].

Dalam penelitian ini telah diasumsikan sebelumnya bahwa yang akan menjadi perhatian adalah kelas sistem linier dan stasioner. Sementara, seperti telah disebutkan di depan, teknik estimasi yang digunakan adalah dari kelas *extended least square*. Untuk memperoleh kejelasan, dalam makalah ini pertama-tama akan dikemukakan terlebih dahulu secara singkat metode estimasi *least-square*, beserta sifat-sifat yang diperlukan untuk realisasi. Kemudian akan dibahas dasar teori serta tahapan metode estimasi yang diusulkan. Bagian berikutnya adalah analisis dari metode estimasi model yang diusulkan. Juga dibahas adalah teknik validasi model terestimasi. Dan terakhir akan diberikan yang menjadi kesimpulan dari penelitian ini.

2. Estimator *Least-Squares* dan *Extended Least Square*

Misalkan sistem linier dan stabil tipe ARX (*AutoRegressive eXogeneous*) dengan gangguan stabil tipe kelas AR (*AutoRegressive*) yang dituliskan dalam persamaan input-output (persamaan diferens) berikut:

$$y(t) + a_1 y(t-1) + \cdots + a_{nA} y(t-n_A) = b_1 u(t-1) + \cdots + b_{nB} u(t-n_B) + e(t) \quad (1)$$

Atau dapat dituliskan pula dalam format yang lebih kompak sebagai berikut:

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t) + e(t)\,; \qquad (2)$$

Dimana $y(t)$ adalah output sistem, $u(t)$ adalah input sistem, $e(t)$ adalah *white noise* dengan statistik *Gaussian, zero mean* dan *unity variance*, $\{e(t)\} \propto N[0,1]$. Sedangkan polinomial $A(q^{-1})$ dan $B(q^{-1})$ diberikan oleh:

$$A(q^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^{nA} a_1 q^{-1}\ ;\ B(q^{-1}) = \sum_{i=1}^{nB} b_1 q^{-1}\ ; \text{dengan } q^{-i}x(t) = x(t-i) \qquad (3)$$

Persamaan (2) dapat dituliskan pula ke dalam format vektorial sebagai:

$$y(t) = \theta^T \varphi(t-1) + e(t) \qquad (4)$$

Dengan vektor regresi diberikan oleh:

$$\varphi(t-1) = \left[-y(t-1)\cdots -y(t-n_{nA}) \quad u(t-1)\cdots u(t-n_{nB})\right]^T \qquad (5)$$

dan vektor parameter sistem (koefisien polinomial $A(q^{-1})$ dan $B(q^{-1})$) adalah:

$$\theta = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & . & a_{nA} & b_1 & b_2 & . & b_{nB} \end{bmatrix}^T \tag{6}$$

Misalkan didefinisikan kesalahan prediksi output model *a posteriori* sebagai berikut:

$$\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t) \quad \text{dengan} \quad \hat{y}(t) = \hat{\theta}^T(t)\varphi(t-1) \tag{7}$$

Serta fungsi kriteria:

$$V\left(\hat{\theta}(N), Z^N\right) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\left(y(t) - \hat{\theta}^T(t)\varphi(t-1)\right)^2 \tag{8}$$

Dengan Z^N didefinisikan sebagai set informasi input-output sistem berdimensi *N*, atau $Z^N = \{y(N), u(N)\}$. Jika kemudian didefinisikan $\hat{\theta}_N^{LS}$ adalah hasil estimasi *least-square* atas fungsi kriteria (8), maka dapat diperoleh persamaan estimator *least square* tipe *batch* sebagai berikut[6]:

$$\hat{\theta}_N^{LS} = \left[\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi(t-1)\varphi^T(t-1)\right]^{-1}\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi(t-1)y(t) \tag{9}$$

Dan setelah substitusi (4) ke dalam (10) diperoleh::

$$\hat{\theta}_N^{LS} = \theta + \left[\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi(t-1)\varphi^T(t-1)\right]^{-1}\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi(t-1)e(t) \tag{10}$$

Dari persamaan (10) diketahui bahwa, syarat yang harus dipenuhi agar $\hat{\theta}_N^{LS}$ non-bias adalah[6]:

1. $\left[\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi(t-1)\varphi^T(t-1)\right]$ adalah matrik non singular (11)

dan

2. $\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi(t-1)e(t) = 0$ (12)

Syarat yang dinyatakan oleh persamaan (12) di atas akan dipenuhi bila $u(t)$ dan $e(t)$ pada persamaan (4) tidak berkorelasi satu terhadap yang lain. Sedangkan syarat yang dinyatakan oleh persamaan (11) akan dipenuhi jika kompleksitas model sistem yang diperoleh cukup mewakili kompleksitas model sistem sebenarnya[8]. Sintesa algoritma rekursif dari estimator yang dinyatakan oleh persamaan (9) telah diturunkan[6]:

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + \frac{P(t)\varphi(t)\varepsilon^o(t+1)}{1 + \varphi^T(t)P(t)\varphi(t)} \tag{13}$$

$$\varepsilon^{o}(t+1) = y(t+1) - \hat{\theta}^{T}(t)\varphi(t) \tag{14}$$

$$P(t) = P(t-1) - \frac{P(t-1)\varphi(t-1)\varphi^{T}(t-1)P(t-1)}{1+\varphi^{T}(t-1)P(t-1)\varphi(t-1)}, \; P(0) = \gamma I, \;\; \gamma > 0 \tag{15}$$

Dicatat bahwa pada set algoritma rekursif di atas, $\varepsilon^{o}(t+1)$ disebut sebagai kesalahan prediksi output *a priori*, dan $P(t)$ disebut sebagai gain adaptasi. Dengan algoritma rekursif tersebut, maka tes terhadap sifat seperti yang dinyatakan oleh persamaan (11) menjadi tidak perlu. Lebih jauh realisasi praktis teknik estimasi model sistem (identifikasi model sistem) secara mendalam antara lain telah dituliskan oleh Ljung (1987)[8] maupun oleh H.A. Tjokronegoro (1997)[6].

Dalam hal struktur model sistem mempunyai nois ARMA (*AutoRegressive Moving Average*) yang stabil, maka model sistem selalu dapat dinyatakan ke dalam struktur ARMAX (*AutoregRessive Moving Average eXogeneous*)[6,8]:

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t) + C(q^{-1})e(t) \tag{16}$$

Bandingkan dengan persamaan (2), diperoleh model nois:

$$v(t) = C(q^{-1})e(t) \qquad \text{dengan} \;\; C(q^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^{nC} c_1 q^{-1} \tag{17}$$

sebagai model gangguan dari kelas *moving average*. Dalam hal ini goal estimasi, bukan hanya model sistem $A(q^{-1})$ dan $B(q^{-1})$, tetapi juga model filter $C(q^{-1})$. Selanjutnya, dengan format baru tersebut, teknik *least square* untuk persoalan terakhir ini dikenal sebagai *extended least squares*[6] atau ELS, dengan vektor parameter:

$$\theta = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & . & a_{nA} & b_1 & b_2 & . & b_{nB} & c_1 & c_2 & . & c_{nC} \end{bmatrix}^{T} \tag{18}$$

Sedangkan vektor informasi (vektor regresi) diberikan oleh:

$$\begin{aligned} \varphi(t-1) = [-y(t-1) \quad -y(t-2) \quad . \quad -y(t-nA) \quad u(t-1) \quad u(t-2) \quad . \quad u(t-nB) \\ \varepsilon(t-1) \quad \varepsilon(t-2) \quad . \quad \varepsilon(t-nC)]^{T} \end{aligned} \tag{19}$$

Dengan kesalahan prediksi output (*a posteriori*) diberikan oleh:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= y(t) - \hat{y}\left(t \middle| \hat{\theta}(t)\right) \\ &= y(t) - \hat{\theta}^{T}(t)\varphi(t-1) \end{aligned} \tag{20}$$

Dalam realisasi, pada kenyataannya $\varepsilon(t)$ tidak dapat diperoleh dari persamaan (20), karena parameter $\hat{\theta}(t)$ belum diperoleh. Untuk itu, dapat digantikan dengan[6]:

$$\varepsilon(t) = \frac{y(t) - \hat{\theta}^T(t-1)\varphi(t-1)}{1 + \varphi^T(t-1)P(t-1)\varphi(t-1)} \tag{21}$$

Dengan formula di atas, maka bentuk serta persyaratan non-bias dari estimator adalah sama dengan yang dituliskan pada persamaan (9)-(12), kecuali bahwa vektor regresi digantikan seperti yang dinyatakan oleh persamaan (19).

Analisis kondisi konvergen estimator ELS telah dikemukakan antara lain di dalam[6,8]. Untuk jelasnya, misalkan didefinisikan fungsi *Lyapunov* berikut:

$$V(\hat{\theta}, R) = \left(\hat{\theta}(t) - \theta\right)^T R(t)\left(\hat{\theta}(t) - \theta\right) \tag{22}$$

dengan $R(t)$ adalah matriks positip-riil. Selanjutnya persamaan (22) memberikan:

$$\frac{dV(\hat{\theta}, R)}{dt} = f^T\left(\hat{\theta}(t)\right)\left(\hat{\theta}(t) - \theta\right) + \left(\hat{\theta}(t) - \theta\right)^T\left(g\left(\hat{\theta}(t)\right) - R(t)\right)\left(\hat{\theta}(t) - \theta\right) + \left(\hat{\theta}(t) - \theta\right)^T f\left(\hat{\theta}(t)\right) \tag{23}$$

Dengan $g\left(\hat{\theta}(t)\right) = E\left[\varphi_\varepsilon(t-1)\varphi_\varepsilon^T(t-1)\right]$ (24)

$$f\left(\hat{\theta}(t)\right) = E\left[\varphi_\varepsilon(t-1)\varepsilon(t)\right] \tag{25}$$

Dengan kenyataan bahwa $E\left[\varphi_\varepsilon(t-1)e(t)\right] = 0$, persamaan (25) dapat dituliskan sebagai:

$$f\left(\hat{\theta}(t)\right) = E\left[\varphi_\varepsilon(t-1)\left(\varepsilon(t) - e(t)\right)\right] \tag{26}$$

Selanjutnya, dapat diperoleh bahwa:

$$\varepsilon(t) - e(t) = \left(y(t) - \hat{\theta}^T(t)\varphi_\varepsilon(t-1)\right) - \left(y(t) - \theta^T(t)\varphi(t-1)\right) \tag{27}$$

atau

$$\varepsilon(t) - e(t) = -\varphi_\varepsilon^T(t-1)\left(\hat{\theta}t(t) - \theta\right) - \left(\varphi_\varepsilon(t-1) - \varphi(t-1)\right)^T\theta \tag{28a}$$

$$= -\varphi_\varepsilon^T(t-1)\left(\hat{\theta}(t) - \theta\right) - \left(C(q^{-1}) - 1\right)\left(\varepsilon(t) - e(t)\right) \tag{28b}$$

$$= -\frac{1}{C(q^{-1})}\varphi_\varepsilon^T(t-1)\left(\hat{\theta}(t) - \theta\right) \tag{29}$$

Misalkan:

$$\tilde{g}\left(\hat{\theta}(t)\right) = \varphi_{\varepsilon}(t-1)\frac{1}{C(q^{-1})}\varphi_{\varepsilon}^{T}(t-1) \tag{30}$$

dan kemudian substitusi ke dalam persamaan (29), dari persamaan (26) diperoleh:

$$f\left(\hat{\theta}(t)\right) = -\tilde{g}\left(\hat{\theta}(t)\right)\left(\hat{\theta}(t)-\theta\right) \tag{31}$$

Sehingga persamaan (23) menjadi:

$$\frac{dV\left(\hat{\theta},R\right)}{dt} = -\left(\hat{\theta}(t)-\theta\right)^{T}\left[\tilde{g}^{T}\left(\hat{\theta}(t)\right) - g\left(\hat{\theta}(t)\right) + R(t) + \tilde{g}\left(\hat{\theta}(t)\right)\right]\left(\hat{\theta}(t)-\theta\right) \tag{32}$$

Dari persamaan (32) dapat disimpulkan bahwa kondisi konvergen diperoleh jika:

$$H = \tilde{g}^{T}\left(\hat{\theta}(t)\right) + \tilde{g}\left(\hat{\theta}(t)\right) - g\left(\hat{\theta}(t)\right) + R(t) \tag{33}$$

adalah positip riil.

Misalkan sembarang vektor parameter x dari sistem linier $z(t) = x^{T}\varphi_{\varepsilon}(t-1)$, dimana $\phi_{z}(\omega)$ adalah padat spektral dari $\{z(t)\}$. Maka dapat dituliskan:

$$x^{T}Hx = 2E\left(z(t)\frac{1}{C(q^{-1})}z(t)\right) - E\left(z^{2}(t)\right) + x^{T}R(t)x \tag{34}$$

$$\geq 2E\left(z(t)\left(\frac{1}{C(q^{-1})}-\frac{1}{2}\right)z(t)\right) = 2\int_{-\pi}^{\pi}\phi_{z}(\omega)\left(\frac{1}{C(e^{j\omega})}-\frac{1}{2}\right)d\omega$$

$$= 2\int_{-\pi}^{\pi}\phi_{z}(\omega)\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{C(e^{j\omega})}-\frac{1}{2}\right)d\omega \tag{35}$$

Sehingga diperoleh kondisi konvergen global $\hat{\theta}(t) \to \theta$ dari estimator *extended least squares* rekursif berikut:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{C(e^{j\omega})}-\frac{1}{2}\right) > 0\,;\forall\omega \tag{36}$$

Analisis diatas menyatakan bahwa estimator ELS menghendaki dipenuhinya kondisi *positive realness* dari polinomial terestimasi $\hat{C}(q^{-1})$. Untuk itu, di dalam sintesa estimator ELS, diperlukan pula algoritma untuk test kondisi (36).

3. **Permasalahan Estimasi Parameter Sistem Dalam Lup Tertutup**

Misalkan, sistem stokastik dalam konfigurasi lup tertutup berikut (Gambar 1):

$$y(t) = G(q^{-1})u(t) + H(q^{-1})e(t) \tag{37}$$

$$u(t) = r(t) - F(q^{-1})y(t) \tag{38}$$

Dengan $\{e(t)\} \propto N[0, \sigma_e^2]$ adalah *Gaussian white noise*, *zero mean* dengan varians σ_e^2. Dimisalkan yang menjadi goal adalah memperoleh estimasi terbaik dari parameter model komponen sistem lup tertutup, $G(q^{-1})$, jika diberikan set informasi input-output system $Z^N = \{y(t), r(t)\}$.

Persamaan (4) dan (5) selanjutnya dapat dituliskan kedalam bentuk sebagai berikut:

$$y(t) = \left(1 + G(q^{-1})F(q^{-1})\right)^{-1}\left(G(q^{-1})r(t) + H(q^{-1})e(t)\right) \tag{39}$$

dan

$$u(t) = \left(1 + G(q^{-1})F(q^{-1})\right)^{-1}\left(r(t) - F(q^{-1})H(q^{-1})e(t)\right) \tag{40}$$

Jika $\{r(t)\}$ bebas secara statistik terhadap $\{e(t)\}$ maka spektrum sistem lup tertutup (39) dan (40) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$S_u(\omega) = \frac{1}{\left|1 + G(e^{j\omega})F(e^{j\omega})\right|^2}\left(S_r(\omega) + S_z(\omega)\right) \tag{41}$$

dan

$$S_{yu}(\omega) = \frac{1}{\left|1 + G(e^{j\omega})F(e^{j\omega})\right|^2}\left(G(e^{j\omega})S_r(\omega) - \frac{1}{F(e^{j\omega})}S_z(\omega)\right) \tag{42}$$

Dengan $F(q^{-1})H(q^{-1})e(t) = z(t)$, $S_u(\omega) = TF\left(R_{uu}(\tau)\right)$, dan $S_{yu}(\omega) = TF\left(R_{yu}(\tau)\right)$. Jika estimasi nonbias dari model sistem yang dinyatakan oleh persamaan (41) dan (42) diperoleh maka, dinamik sistem dapat diperoleh dari:

$$\hat{G}(e^{j\omega}) = \frac{\hat{S}_{yu}(\omega)}{\hat{S}_u(\omega)}$$

$$= \frac{G(e^{j\omega})S_r(\omega) - \frac{1}{F(e^{j\omega})}S_z(\omega)}{S_r(\omega) + S_z(\omega)} \tag{43}$$

Terlihat dari persamaan terakhir tersebut, bahwa estimasi non-bias komponen sistem $\hat{G}(q^{-1})$ dalam konfigurasi lup tertutup hanya dapat diperoleh jika sistem adalah deterministik, yaitu jika $e(t)=0$.

Selanjutnya, dari persamaan $F(q^{-1})H(q^{-1})e(t)=z(t)$ diperoleh spektrum sinyal berikut:

$$S_z(\omega)=\left|F\left(e^{j\omega}\right)\right|^2\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 S_e(\omega) \tag{44}$$

Sehingga, dari persamaan (43) diperoleh:

$$\hat{G}\left(e^{j\omega}\right)-G\left(e^{j\omega}\right)=-\left(1+G\left(e^{j\omega}\right)F\left(e^{j\omega}\right)\right)\frac{F\left(e^{j\omega}\right)\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 S_e(\omega)}{S_r(\omega)} \tag{45}$$

Ditunjukkan pula oleh persamaan (45) bahwa, suatu alternatif yang lain, estimasi non-bias $\hat{G}(q^{-1})$ akan diperoleh jika di dalam konfigurasi tidak terdapat komponen *umpan balik*, atau jika $F\left(e^{j\omega}\right)=0$.

4. Solusi Estimasi Parameter Model Komponen Sistem Lup Tertutup

Persoalan utama yang dihadapi pada estimasi model sistem pada struktur lup tertutup adalah adanya korelasi sinyal informasi sistem yang menjadi perhatian terhadap nois pada output. Solusi umum yang dilakukan pada dasarnya adalah harus mencari sinyal informasi yang baru dari sistem yang bersangkutan yang sangat kurang berkorelasi dengan nois pada output. Selanjutnya akan ditunjukkan usulan solusi untuk estimasi model dinamik sistem dalam konfigurasi lup tertutup. Perhatikan kembali sistem yang dinyatakan oleh persamaan (37) dan (38), sebagaimana ditunjukan oleh Gambar 1, dimana:

$$G(q^{-1})=\sum_{i=1}^{nG} g_i q^{-i}\ ;\ H(q^{-1})=1+\sum_{i=1}^{nH} h_i q^{-i}\ ;\ F(q^{-1})=1+\sum_{i=1}^{nF} f_i q^{-i} \tag{48}$$

Pada kasus ini, yang menjadi sasaran utama adalah estimasi komponen umpan maju $\mathrm{G(q^{-1})}$, komponen nois $H(q^{-1})$, serta komponen umpan balik $F(q^{-1})$, jika diberikan set informasi sistem $Z^N=\{u(N),y(N),r(N)\}$.

Persamaan (37) dan (38) dapat ditulis ulang ke dalam struktur ARMAX berikut:

$$u(t)=\frac{1}{1+G(q^{-1})F(q^{-1})}r(t)-\frac{F(q^{-1})H(q^{-1})}{1+G(q^{-1})F(q^{-1})}e(t) \tag{49}$$

$$y(t) = \frac{G(q^{-1})}{1 + G(q^{-1})F(q^{-1})} r(t) + \frac{H(q^{-1})}{1 + G(q^{-1})F(q^{-1})} e(t) \quad (50)$$

Bila didefinisikan:

$$Q(q^{-1}) = 1 + G(q^{-1})F(q^{-1}) \text{ dan } L(q^{-1}) = F(q^{-1})H(q^{-1}) \quad (51)$$

maka persamaan (49) dan (50) dapat dituliskan sebagai:

$$u(t) = \frac{1}{Q(q^{-1})} r(t) - \frac{L(q^{-1})}{A(q^{-1})} e(t) \quad (52)$$

$$y(t) = \frac{G(q^{-1})}{Q(q^{-1})} r(t) + \frac{H(q^{-1})}{Q(q^{-1})} e(t) \quad (53)$$

Kedua persamaan (52) dan (53) mempunyai struktur ARMAX. Sehingga dari persamaan (53), dengan teknik ELS, komponen umpan maju $G(q^{-1})$ dan komponen nois $H(q^{-1})$, maupun $Q(q^{-1})$, dapat diestimasi secara langsung dari set data $Z_y^N = \{y(N), r(N)\}$. Syarat yang harus dipenuhi untuk memperoleh model yang tidak bias adalah bahwa $\{e(t)\}$ *white noise* serta $\{r(t)\}$ dan $\{e(t)\}$ tidak berkorelasi. Jika estimasi tidak bias dari $\hat{Q}(q^{-1})$ dan $\hat{G}(q^{-1})$ diperoleh, komponen $F(q^{-1})$ dapat diperoleh dari persamaan (51):

$$\hat{F}(q^{-1}) = \left(\hat{G}(q^{-1})\right)^{-1} \left(\hat{Q}(q^{-1}) - 1\right) \quad (54)$$

Berbeda dengan $\hat{Q}(q^{-1})$ dan $\hat{G}(q^{-1})$ yang diperoleh dari estimasi langsung, komponen $\hat{F}(q^{-1})$ diperoleh dari estimasi tidak langsung. Namun demikian, ketiga komponen sistem lup tertutup dapat diperoleh sekaligus dalam rangkaian algoritma rekursif. Dimana, komponen $\hat{F}(q^{-1})$ dihitung pada setiap langkah segera polynomial $\hat{Q}(q^{-1})$ dan $\hat{G}(q^{-1})$ diperoleh. Catat bahwa $Q(q^{-1})$ adalah invers fungsi sensitivitas sistem lup tertutup. Sebagaimana telah ditunjukan dalam analisis konvergensial algoritma rekursif ELS, stabilitas algoritma pada kasus ini bergantung pada stabilitas polinomial $\hat{H}(q^{-1})$ dan $\hat{L}(q^{-1})$.

5. Validasi Model Terestimasi: *Whiteness Test*

Untuk uji validasi model terestimasi dilakukan dengan tes kondisi seperti yang dinyatakan oleh persamaan (11) dan (12). Untuk persyaratan (11) tidak lagi perlu dilakukan tes, mengingat estimasi dilakukan dengan menggunakan algoritma rekursif. Sementara tes sifat seperti yang dinyatakan oleh persamaan (12), pada dasarnya meliputi tes *whiteness* dan tes korelasi silang masing-masing terhadap informasi sistem yang menjadi obyektif. Yang menjadi kendala dalam persoalan yang dihadapi adalah bahwa tidak mungkin melakukan tes terhadap $\{e(t)\}$. Untuk itu, dalam penelitian ini, guna validasi hasil estimasi $\hat{G}(q^{-1})$, $\hat{H}(q^{-1})$ maupun $\hat{Q}(q^{-1})$ dilakukan tes *whiteness* (tes sifat statistik) terhadap (persamaan (53)):

$$\varepsilon(t) = \frac{\hat{Q}(q^{-1})}{\hat{H}(q^{-1})}y(t) - \frac{\hat{G}(q^{-1})}{\hat{H}(q^{-1})}r(t) \qquad (55)$$

serta tes ketidak-bergantungan antara $\{r(t)\}$ dan $\{\varepsilon(t)\}$ (lihat persamaan sistem (53)). Telah dikemukakan di depan bahwa kesalahan prediksi (55) haruslah *white noise* dan bebas terhadap sinyal eksitasi $\{r(t)\}$.

6. Sinyal Eksitasi

Dari struktur persamaan (53), untuk estimasi parametrik komponen sistem memerlukan set informasi $Z_y^N = \{y(N), r(N)\}$, dengan sinyal eksitasi adalah $\{r(t)\}$. Yang menjadi pertanyaan kemudian adalah sinyal eksitasi yang bagaimana yang diperlukan agar produk estimasi adalah akurat. Di dalam teori estimasi, sinyal eksitasi yang demikian dikenal sebagai *persistence of excitation*. Sinyal yang demikian adalah (input) yang kaya dengan informasi relatif terhadap dinamik dari sistem yang akan diestimasi. Hal ini dapat dijelaskan secara sederhana sebagai berikut. Misalkan spektrum dari sistem $G\left(e^{j\Omega_G}\right)$ yang akan diestimasi mempunyai dinamik pada $\Omega_G \in \Omega_N$, maka spektrum daya dari $\{r(t)\}$, $S_{rr}\left(e^{j\Omega}\right)$, haruslah lebih luas relatif terhadap Ω_G, atau $\Omega_N \in \Omega_r$ atau sekurang-kurangnya adalah $\Omega_G \in \Omega_r$.

Secara teoritis, amplituda dari sinyal eksitasi tidak sangat penting. Tentang ini dapat dibuktikan sebagai berikut. Misalkan suatu observasi atas sistem yang ditinjau dapat dituliskan sebagai berikut:

$$y_A(t) = \varphi_A^T(t-1)\theta + n(t) \qquad (56a)$$

$$= \alpha y_B(t) \quad (56b)$$

$$= \varphi_B^T(t-1)M^T\theta + Mn_B(t) \quad (56c)$$

Dengan

$$\varphi_A(t-1) = M\varphi_B(t-1)\,;\; M = \alpha \mathrm{I} \quad (57)$$

Terlihat bahwa sinyal eksitasi yang baru diberikan skala dengan factor α terhadap sinyal eksitasi sebelumnya. Selanjutnya, dari estimator linier *least square* seperti yang dinyatakan oleh persamaan (9), diperoleh:

$$\hat{\theta}_N^{LS} = \left(\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi_A(t-1)\varphi_A^T(t-1)\right)^{-1}\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi_A(t-1)y_A(t) \quad (58a)$$

$$= \left(\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}M\varphi_B(t-1)\varphi_B^T(t-1)M^T\right)^{-1}\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}M\varphi_B(t-1)\alpha y_B(t) \quad (58b)$$

$$= \left(\frac{\alpha^2}{N}\sum_{t=1}^{N}\mathrm{I}\varphi_B(t-1)\varphi_B^T(t-1)\mathrm{I}^T\right)^{-1}\frac{\alpha^2}{N}\sum_{t=1}^{N}\mathrm{I}\varphi_B(t-1)y_B(t) \quad (58c)$$

$$= \left(\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi_B(t-1)\varphi_B^T(t-1)\right)^{-1}\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi_B(t-1)y_B(t) \quad (58d)$$

Persamaan-persamaan di atas menyatakan bahwa hasil estimasi adalah sama baik digunakan $\varphi_B(t-1)$ maupun $\varphi_A(t-1) = M\varphi_B(t-1)$.

7. Validasi Silang

Untuk menjamin kualitas hasil estimasi, perlu pula dilakukan tes validasi silang. Prinsip validasi silang yang digunakan dijelaskan sebagai berikut. Misalkan telah diperoleh dua set data $Z^A = \{u_A(t), y_A(t)\}$ dan $Z^B = \{u_B(t), y_B(t)\}$, dengan $Z^A \neq Z^B$. Misalkan set data $Z^A = \{u_A(t), y_A(t)\}$ memberikan hasil estimasi terbaik $\hat{\theta}_A$, sehingga diperoleh prediksi output:

$$\hat{y}_A\left(t\middle|\hat{\theta}_A\right) = \hat{\theta}_A^T\left[\{u_A(t-1)\}\quad\left\{\hat{y}_A\left(t-1\middle|\hat{\theta}_A\right)\right\}\right] \quad (59)$$

dengan kesalahan prediksi output *a posteriori*:

$$\varepsilon\left(t\middle|\hat{\theta}_A\right) = y_A(t) - \hat{y}(t|\hat{\theta}_A) \quad (60)$$

Jika kemudian terhadap model yang diperoleh dilakukan tes input dengan menggunakan set data $\{u_B(t)\}$, maka akan diperoleh prediksi output sistem:

$$\hat{y}_B\left(t\middle|\hat{\theta}_A\right)=\hat{\theta}_A^T\left[\{u_B(t-1)\} \quad \left\{\hat{y}_B\left(t-1\middle|\hat{\theta}_N\right)\right\}\right] \tag{61}$$

dengan kesalahan prediksi output *a posteriori*:

$$\varepsilon_B\left(t\middle|\hat{\theta}_A\right)=y_B(t)-\hat{y}_B\left(t\middle|\hat{\theta}_A\right) \tag{62}$$

Dengan $\{y_B(t)\}$ adalah output model dengan $\hat{\theta}_A$ jika diberikan input $\{u_B(t)\}$. Hasil estimasi terbaik adalah jika kualitas kemiripan set data $\left\{y_B(t), \hat{y}_B\left(t\middle|\hat{\theta}_A\right)\right\}$ adalah maksimum, yaitu melalui tes sifat statistik terhadap $\left\{\varepsilon_A\left(t\middle|\hat{\theta}_A\right)\right\}$ maupun $\left\{\varepsilon_B\left(t\middle|\hat{\theta}_A\right)\right\}$.

8. Analisis

Guna melihat sifat *biasness* dari estimator yang diusulkan di atas, substitusi hasil pada persamaan (4) ke dalam persamaan (9) akan menghasilkan persamaan sebagai berikut:

$$\hat{\theta}_N^{LS}=\left[\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi(t-1)\varphi^T(t-1)\right]^{-1}\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi(t-1)\left(\varphi^T(t-1)\theta+e(t)\right) \tag{63}$$

Yang dapat dituliskan pula sebagai:

$$\hat{\theta}_N^{LS}=\left[\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi(t-1)\varphi^T(t-1)\right]^{-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi(t-1)\varphi^T(t-1)\right]\theta$$
$$+\left[\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi(t-1)\varphi^T(t-1)\right]^{-1}\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi(t-1)e(t) \tag{64}$$

Sehingga diperoleh persamaan (11). Jika kemudian ditarik ekspektasi dari persamaan (11), akan diperoleh:

$$E\left[\hat{\theta}_N^{LS}\right]=\theta+\left[\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi(t-1)\varphi^T(t-1)\right]^{-1}\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}E[\varphi(t-1)e(t)] \tag{65}$$

Yang menunjukkan syarat *biasness* sebagai diberikan oleh persamaan (11) dan (12). Selanjutnya dengan memperhatikan vektor informasi pada persamaan (5) relatif terhadap persamaan (1), terlihat bahwa tidak satupun komponen dari vektor informasi pada persamaan (5) yang berkorelasi dengan $e(t)$, atau $E[\varphi(t-1)e(t)]=0$. Dengan demikian terbukti bahwa $\{\varphi(t-1)\}$ dan $\{e(t)\}$ tidak berkorelasi. Permasalahan berikutnya adalah persyaratan yang dinyatakan oleh persamaan (11). Namun persyaratan ini sangat erat kaitannya dengan algoritma *batch* seperti yang ditunjukan oleh persamaan (9). Sementara untuk implementasi algoritma rekursif syarat (11) menjadi tidak diperlukan.

Dalam hal kasus yang menjadi perhatian adalah persamaan (53), dengan demikian, syarat non-bias untuk estimasi $\hat{G}(q^{-1})$, $\hat{H}(q^{-1})$ maupun $\hat{Q}(q^{-1})$ adalah bahwa $\{r(t)\}$ dan $\{e(t)\}$ haruslah tidak berkorelasi. Untuk itu ditunjukkan oleh kedua persamaan (46) dan (47) bahwa, sekurang-kurangnya dapat dibuat sinyal eksitasi $\{r(t)\}$ sedemikian sehingga tidak berkorelasi dengan $\{e(t)\}$. Dengan kata lain dipastikan bahwa syarat tidak berkorelasi antara kedua sinyal $\{r(t)\}$ dan $\{e(t)\}$ selalu dapat dipenuhi. Untuk membuktikan dapat dilakukan uji statistik terhadap *residue*, seperti ditunjukan pada Gambar 2. Untuk ini, yang menjadi perhatian adalah sifat statistik dari sinyal $\{r(t)\}$ serta *residue* $\{\eta(t)\}$. Jika $\hat{G}_o(q^{-1})$ adalah non-bias, maka *residue* $\{\eta(t)\}$ akan mempunyai sifat statistik yang sama dengan $\{e(t)\}$, yaitu *white noise*. Mengenai hal ini dapat ditunjukkan sebagai berikut (perhatikan pula Gambar 2):

$$\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t)$$

$$= G(q^{-1})u(t) + H(q^{-1})e(t) - \hat{G}(q^{-1})u(t) \tag{66}$$

$$= H(q^{-1})e(t), \quad \text{jika dipenuhi } \hat{G}(t) = G(t) \tag{67}$$

Sehingga diperoleh kondisi:

$$\eta(t) = \frac{H(q^{-1})}{\hat{H}(q^{-1})} e(t) \tag{68}$$

Persamaan terakhir ini menyatakan bahwa, jika hasil estimasi sistem adalah non bias, yaitu jika $\hat{G}(t) = G(t)$ dan $\hat{H}(q^{-1}) = H(q^{-1})$, maka $\{\eta(t)\} = \{e(t)\}$.

9. Orde Sistem Terestimasi

Sudah banyak dilakukan studi tentang validasi orde model pada teknik estimasi parameter model sistem maupun sinyal. Untuk realisasinya dapat dilihat antara lain di dalam buku Ljung (1987)[8]. Dalam kasus ini yang perlu dicatat adalah bahwa orde dari model komponen *umpan balik*, $\hat{F}(q^{-1})$, ditentukan oleh hasil estimasi dari komponen sistem yang lainnya, seperti ditunjukan oleh persamaan (51), sehingga:

$$Ord(\hat{F}(q^{-1})) = Ord(\hat{G}(q^{-1})) + Ord(\hat{Q}(q^{-1})) \tag{69}$$

Dengan $Ord(\hat{Q}(q^{-1}))$ pada persamaan (69) di atas adalah orde dari invers fungsi sensitivitas sistem lup tertutup yang diberikan oleh persamaan (51).

10. Kesimpulan

Telah ditunjukan kompleksitas estimasi model sistem dalam struktur lup tertutup. Sejumlah persyaratan perlu harus dipenuhi untuk memperoleh hasil estimasi model yang non-bias telah pula ditunjukan. Untuk itu telah dikemukakan suatu alternatif estimasi langsung yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah estimasi model dari masing-masing komponen atau subsistem-subsistem pada sistem dalam struktur lup tertutup, meliputi komponen *umpan maju*, komponen nois dan komponen *umpan balik*. Dihasilkan pula pada teknik yang diusulkan adalah invers dari komponen fungsi sensitivitas sistem lup tertutup yang bersangkutan. Metoda yang diusulkan adalah metoda yang langsung, menghasilkan sekaligus estimasi komponen *umpan maju* dan komponen nois. Diperoleh pula secara langsung invers fungsi sensitivitas system lup tertutup. Sementara komponen *umpan balik* diperoleh dari kedua hasil estimasi komponen *umpan maju* dan komponen fungsi sensitivitas. Algoritma yang digunakan adalah teknik rekursif dari jenis *extended least square*. Analisis non-bias dari metoda yang diusulkan telah pula diberikan pada makalah ini. Juga telah diberikan metoda validasi model terestimasi, meliputi teknik *whiteness test* serta teknik validasi silang. Dari struktur model untuk estimasi (struktur ARMAX, persamaan (53)), diketahui bahwa salah satu dari komponen *umpan maju* atau komponen *umpan balik* dapat dari kelas polinomial tidak stabil, sejauh sistem lup tertutup telah distabilkan, yaitu $\{y(t)\}$ adalah stabil. Catat bahwa informasi yang digunakan untuk estimasi model di dalam sistem lup tertutup (53) adalah pasangan stabil dari $Z_y^N = \{y(N), r(N)\}$, yaitu masing-masing adalah input serta output sistem lup tertutup stabil. Sementara telah diasumsikan bahwa komponen nois adalah stabil. Hal ini dapat diperhatikan dari model invers fungsi sensitivitas sistem lup tertutup, seperti ditunjukan oleh persamaan (51). Dari struktur yang ditunjukan oleh persamaan (53), sejauh polinomial $Q(q^{-1}) = 1 + G(q^{-1})F(q_{-1})$ adalah stabil, maka stabilitas algoritma rekursif hanya bergantung pada stabilitas polinomial $\hat{H}(q^{-1})$ serta polinomial $\hat{L}(q^{-1})$, sebagaimana ditunjukan dalam analisis konvergensial estimator ELS.♦

Daftar Pustaka

1. I. Gustavsson, L. Ljung, and T. Soderstrom, *Identification of Process in Closed Loop – Identification and Accuracy Aspects*, Automatica, Vol. 13, No. 1, pp 59-75 (1977)
2. H.A. Tjokronegoro, *Parameter Estimation of Systems: Closed Loop Issue and Analysis*, dalam Proceeding ITB (1999), Vol. 31, No. 2, hal. 213-222.
3. Dongliang Huang and Tohru Katayama, *A Closed-loop State-Space Identification of Continuous-Time Systems using d-Operator Model*, dalam Proceedings of The 3rd Asian Control Conference (2000), pp. 670-675.
4. JianLin Mo and XiaoMing Xu, *Noisy Closed Loop Identification Based on Three Order Cumulant Approach*, dalam Proceedings of The 3rd Asian Control Conference (2000), pp. 1941-1945.
5. Wei Xing Zheng, *An Efficient Approach to Identification of Feedback Control Systems*, dalam Proceedings of The 3rd Asian Control Conference (2000), pp. 2940-2945.
6. Harijono A. Tjokronegoro, *Estimator Parameter Model Sistem*, Laporan Riset Unggulan Terpadu III, Jurusan Teknik Fisika ITB (1997), hal. 23-33.
7. Harijono A. Tjokronegoro dan Kusnadi Halim, *Estimasi Tidak Langsung Model Dinamik Sistem Di Dalam Lup Tertutup Dengan Teknik Least Square*, Majalah Ilmiah Sistem Kendali Vol. 4, No.2 (2001), hal 2-9.
8. Lennart Ljung, *System Identification*: *Theory for The User*, Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall Inc. (1987).♦