ANALISIS MOTOR TAK SEREMPAK TIGA-FASA DENGAN METODA PARK KOMPLEK

Oleh : *Yanuarsyah Haroen** dan *Pekik Argo Dahono**

SARI

Tulisan ini menyajikan analisis unjukkerja mesin listrik jenis non-salien. Analisis kwantitatif dilakukan dengan metoda Park d, q yang digeneralisasi, dengan menempatkan sumbu d, q pada sudut sembarang, untuk mencari bentuk umum persamaan Park komplek.

Untuk menunjukkan bahwa teori ini berlaku umum dan dapat diterapkan pada hal khusus, maka diambil contoh pengasutan motor tak serempak dengan tegangan tiga-fasa sinusoidal dan inverter otonom tiga-fasa yang mencatu motor tak serempak. Persamaan listrik motor tak serempak yang dinyatakan dalam bentuk Park komplek menjadi lebih sederhana, sehingga penyelesaiannya lebih mudah. Dari hasil simulasi dapat diketahui besaran listrik maksimum yang diperlukan dalam disain inverter dan motor listrik.

ABSRACT

Performance analysis of non-salient type of electrical machines is described in this paper. Based on the *d-q* Park's equations the general form, i.e. by placing the d-q axes at an arbitrary angle, of Park complex equations are derived.

The general applicability of this theory is verified by two examples, i.e. the direct on line starting of asynchronous motor

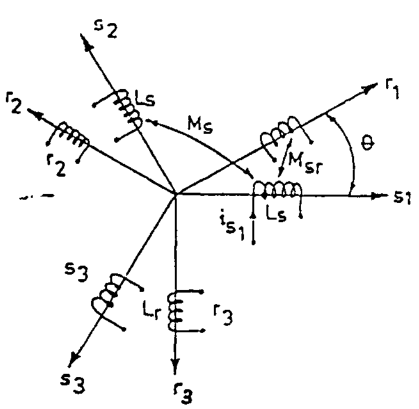
* Laboratorium Penelitian Konversi Energi Elektrik, Jurusan Teknik Elektro, Institut Teknologi Bandung

and the inverter fed asynchronous motor. It is shown in this paper that the performance equations of asynchronous machines in Park's complex form are simpler, and furthermore simplify the solution. Important design informations for inverter and electrical machines such as the peak values of electrical parameters are provided by the simulation results.

DASAR TEORI

Untuk mempermudah analisis gejala peralihan mesin elektrik maka jumlah persamaan listrik perlu disederhanakan, sehingga cara pemecahannya lebih mudah. Metoda yang dipergunakan untuk itu adalah metoda Park.

Dalam pembahasan akan diambil model suatu mesin elektrik 3-fasa yang mempunyai 3 belitan simetris pada stator, 3 belitan simetris pada rotor dan mempunyai ruang vektor yang dapat digambarkan seperti diperlihatkan pada gambar 1.



s_1, s_2, s_3 : vektor tegangan belitan stator

r_1, r_2, r_3 : vektor tegangan belitan rotor

M_s : induktansi mutual antar belitan stator

M_r : induktansi mutual antar belitan rotor

L_s : induktansi diri belitan stator

L_r : induktansi diri belitan rotor

M_{sr} : induktansi mutual antara belitan stator dan rotor

Dengan cara langsung akan diperoleh persamaan tegangan mesin elektrik yang mempunyai orde 6x6. Dalam tulisan ini, anggapan yang digunakan adalah sebagai berikut :

- **permeabilitas** μ dianggap konstan
- distribusi fluksi sinusoidal
- letak belitan tertentu.

PERSAMAAN FLUKSI

Hubungan fluksi dan arus dapat dituliskan menurut persamaan :

$$[\Phi] = [L(\theta)].[I] \tag{1}$$

di mana $[\Phi]$: matrik kolom fluksi

$[L(\theta)]$: matrik induktansi

$[i]$: matrik kolom arus

Untuk mesin elektrik 3-fasa.hubungannya secara umum dapat dinyatakan dengan

$$\begin{bmatrix} \Phi_s \\ \Phi_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{ss} & L_{sr}(\theta) \\ L_{rs}(\theta) & L_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} \tag{2}$$

di mana $[L_{ss}]$: matrik induktansi diri stator

$[L_{rr}]$: matrik induktansi diri rotor

$[L_{rs}]=[L_{sr}]^t$: matrik induktansi mutual antara stator dan rotor

Dengan demikian hubungan yang lengkap dapat dirinci sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} \phi_{s1} \\ \phi_{s2} \\ \phi_{s3} \\ \phi_{r1} \\ \phi_{r2} \\ \phi_{r3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & M_s & M_s & M_{sr}\cos\theta & M_{sr}\cos(\theta+\frac{2\pi}{3}) & M_{sr}\cos(\theta+\frac{4\pi}{3}) \\ M_s & L_s & M_s & M_{sr}\cos(\theta+\frac{4\pi}{3}) & M_{sr}\cos\theta & M_{sr}\cos(\theta+\frac{2\pi}{3}) \\ M_s & M_s & L_s & M_{sr}\cos(\theta+\frac{2\pi}{3}) & M_{sr}\cos(\theta+\frac{4\pi}{3}) & M_{sr}\cos\theta \\ M_{sr}\cos\theta & M_{sr}\cos(\theta+\frac{4\pi}{3}) & M_{sr}\cos(\theta+\frac{2\pi}{3}) & L_r & M_r & M_r \\ M_{sr}\cos(\theta+\frac{2\pi}{3}) & M_{sr}\cos\theta & M_{sr}\cos(\theta+\frac{4\pi}{3}) & M_r & L_r & M_r \\ M_{sr}\cos(\theta+\frac{4\pi}{3}) & M_{sr}\cos(\theta+\frac{2\pi}{3}) & M_{sr}\cos\theta & M_r & M_r & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{s1} \\ i_{s2} \\ i_{s3} \\ i_{r1} \\ i_{r2} \\ i_{r3} \end{bmatrix} \tag{3}$$

PERSAMAAN TEGANGAN

Secara umum tegangan yang ada dapat dituliskan

$$[V_k] = [R_k][i_k] + \frac{d}{dt}[\Phi_k] \tag{4}$$

di mana $[V_k]$ = tegangan belitan fasa k

$[R_k]$ = resistansi belitan fasa k

$[i_k]$ = arus belitan fasa k

$[\Phi_k]$ = fluksi belitan fasa k

Karena $[\Phi] = [L][i]$, maka :

$$[V_k] = [R_k][i_k] + L(\theta)\frac{d}{dt}[i_k] + \frac{d\theta}{dt}\frac{\partial}{\partial\theta}[L(\theta)][i_k] \tag{5}$$

di mana $[V_k]^t = [V_{s1}\ V_{s2}\ V_{s3}\ V_{r1}\ V_{r2}\ V_{r3}]$

$[i_k]^t = [i_{s1}\ i_{s2}\ i_{s3}\ i_{r1}\ i_{r2}\ i_{r3}]$

$[R_k] = \text{diag}\ [R_s\ R_s\ R_s\ R_r\ R_r\ R_r]$

Secara rinci :

$$\begin{bmatrix} V_{s1} \\ V_{s2} \\ V_{s3} \\ V_{r1} \\ V_{r2} \\ V_{r3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{s1} \\ i_{s2} \\ i_{s3} \\ i_{r1} \\ i_{r2} \\ i_{r3} \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} L_s & M_s & M_s & M_{sr}\cos\theta & M_{sr}\cos(\theta+\frac{2\pi}{3}) & M_{sr}\cos(\theta+\frac{4\pi}{3}) \\ M_s & L_s & M_s & M_{sr}\cos(\theta+\frac{4\pi}{3}) & M_{sr}\cos\theta & M_{sr}\cos(\theta+\frac{2\pi}{3}) \\ M_s & M_s & L_s & M_{sr}\cos(\theta+\frac{2\pi}{3}) & M_{sr}\cos(\theta+\frac{4\pi}{3}) & M_{sr}\cos\theta \\ M_{sr}\cos\theta & M_{sr}\cos(\theta+\frac{4\pi}{3}) & M_{sr}\cos(\theta+\frac{2\pi}{3}) & L_r & M_r & M_r \\ M_{sr}\cos(\theta+\frac{2\pi}{3}) & M_{sr}\cos\theta & M_{sr}\cos(\theta+\frac{4\pi}{3}) & M_r & L_r & M_r \\ M_{sr}\cos(\theta+\frac{4\pi}{3}) & M_{sr}\cos(\theta+\frac{2\pi}{3}) & M_{sr}\cos\theta & M_r & M_r & L_r \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{s1} \\ i_{s2} \\ i_{s3} \\ i_{r1} \\ i_{r2} \\ i_{r3} \end{bmatrix} +$$

$$\frac{d\theta}{dt}\frac{\partial}{\partial\theta}\begin{bmatrix} L_s & M_s & M_s & M_{sr}\cos\theta & M_{sr}\cos(\theta+\frac{2\pi}{3}) & M_{sr}\cos(\theta+\frac{4\pi}{3}) \\ M_s & L_s & M_s & M_{sr}\cos(\theta+\frac{4\pi}{3}) & M_{sr}\cos\theta & M_{sr}\cos(\theta+\frac{2\pi}{3}) \\ M_s & M_s & L_s & M_{sr}\cos(\theta+\frac{2\pi}{3}) & M_{sr}\cos(\theta+\frac{4\pi}{3}) & M_{sr}\cos\theta \\ M_{sr}\cos\theta & M_{sr}\cos(\theta+\frac{4\pi}{3}) & M_{sr}\cos(\theta+\frac{2\pi}{3}) & L_r & M_r & M_r \\ M_{sr}\cos(\theta+\frac{2\pi}{3}) & M_{sr}\cos\theta & M_{sr}\cos(\theta+\frac{4\pi}{3}) & M_r & L_r & M_r \\ M_{sr}\cos(\theta+\frac{4\pi}{3}) & M_{sr}\cos(\theta+\frac{2\pi}{3}) & M_{sr}\cos\theta & M_r & M_r & L_r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_{s1} \\ i_{s2} \\ i_{s3} \\ i_{r1} \\ i_{r2} \\ i_{r3} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Analisis transien dengan mencari solusi persamaan diatas akan sangat sulit karena mengandung koefisien yang berubah terhadap waktu, sebagai akibat adanya induktansi mutual yang merupakan fungsi dari posisi rotor. Untuk itu digunakan metoda Park yang akan mentransformasikan sistem 3 fasa menjadi sistem 2 fasa.

TRNASFORMASI SISTEM 3-FASA KEDALAM SISTEM 2-FASA α, β

Sistem 2 fasa α, β adalah suatu sistem, ekivalen dengan sistem 3 fasa. Belitan fasa α diambil pada sumbu mendatar dan belitan fasa β tegak lurus terhadap belitan fasa α.

Kita perhatikan persamaan fluksi stator 3 fasa :

$[\Phi_s] = [L_{ss}][i_s] + [L_{sr}(\theta)][i_r]$

Secara matematis $[\Phi_s]$ dapat dinyatakan dengan sistem referensi baru menurut hubungan :

$[X_s] = [A][X_{sN}]$ atau $[X_{sN}] = [A]^{-1}[X_s]$ (7)

di mana $[X_s]$: variabel sistem lama

$[X_{sN}]$: variabel sistem baru

$[A]$: matrik transformasi dasar sistem referensi baru ke sistem lama

Dengan demikian dalam sistem referensi baru,

$[\Phi_{sN}] = [A]^{-1}[L_{ss}][A][i_{sN}] + [A]^{-1}[L_{sr}(\theta)][A][i_{rN}]$ (8)

atau

$$[\Phi_{sN}] = [L_{ssN}][i_{sN}] + [L_{srN}(\theta)][i_{rN}] \tag{9}$$

dimana

$[L_{ssN}]$: matrik induktansi diri stator dalam sistem baru

$[L_{srN}(\theta)]$: matrik induktansi stator dan rotor dalam sistem baru.

Untuk mencari matrik transformasi [A] dapat dipergunakan metoda:
- analisis matematis murni
- analisis kerapatan fluksi.

PENRUNAN [A] DENGAN ANALISIS MATEMATIS MURNI

Pada suatu matrik sembarang, misalkan $[L_{ss}]$ berlaku

$$[\mathbf{L}_{ss} - \lambda\ \mathbf{I}][\mu] = 0 \tag{10}$$

di mana $\mathbf{I}$: matrik satuan

μ : matrik kolom eigen vektor $[\mu_1\ \mu_2\ \mu_3]^t$

λ : matrik diagonal eigen value

Jika diambil determinan $[\mathbf{L}_{ss} - \lambda\mathbf{I}] = 0$ maka diperoleh

$\lambda_o = L_s + 2\ M_s$

$\lambda_1 = L_s - M_s$

$\lambda_2 = L_s - M_s$

Untuk $\lambda_o = L_s + 2M_s$, didapatkan

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \tag{11}$$

Sedangkan untuk $\lambda_1 = \lambda_2 = L_s - M_s$, diperoleh

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0 \tag{12}$$

Matrik transformasi dasar disusun berdasarkan nilai μ_1, μ_2, dan μ_3 yang memenuhi persamaan (11) dan (12).

Bila $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$ maka eigen vektor kolom 1 matrik [A] adalah $[\upsilon_1] = [1\ 1\ 1]^t$

Sedangkan bila $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0$ maka eigen vektor kolom 2 dan 3 dari matrik [A] adalah $[\upsilon_2] = [1\ 0\ -1]^t$ dan $[\upsilon_3] = [0\ 1\ -1]^t$.

Jadi akan diperoleh

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

dan matrik invers [A]

$$[A]^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

maka matrik induktansi sistem,baru dapat ditentukan

PENENTUAN MATRIK $[L_{ssN}]$

Dengan memasukkan harga [A] dan $[A]^{-1}$ ke dalam nilai $[L_{ssN}]$, yaitu $[L_{ssN}] = [A]^{-1}[L_{ss}][A]$ maka matrik induktansi sendiri stator sistem baru adalah :

$$[L_{ssN}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}L_s & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2}L_s \end{bmatrix} = \frac{3}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_s & 0 \\ 0 & 0 & L_s \end{bmatrix} \tag{15}$$

Jadi dari matrik 3x3 pada sistem 3-fasa disederhanakan menjadi matrik 2x2 pada sistem baru.

PENENTUAN MATRIK $[L_{srN}(\theta)]$

Matrik $L_{srN}(\theta)$ diberikan oleh

$[L_{srN}(\theta)] = [A]^{-1}[L_{sr}(\theta)][A]$

sehingga :

$$[L_{srN})] = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} M_{sr}\begin{bmatrix} \cos\theta & \cos(\theta+\frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta+\frac{4\pi}{3}) \\ \cos(\theta+\frac{4\pi}{3}) & \cos\theta & \cos(\theta+\frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta+\frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta+\frac{4\pi}{3}) & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \tag{16}$$

dan diperoleh

$$[L_{srN}(\theta) = \frac{3}{2} M_{sr} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{17}$$

PENENTUAN MATRIK $[L_{rrN}(\theta)]$

Matrik fluksi $[\phi_r]$ dinyatakan oleh

$[\phi_r] = [L_{rr}][i_r] + [L_{rs}(\theta)][i_s]$

$[\phi_{rN}] = [L_{rrN}][i_{rN}] + [L_{rsN}(\theta)][i_{sN}]$

karena $[L_{rs}(\theta)]=[L_{sr}(\theta)]^t$

maka analogi dengan perhitungan penentuan matrik $[L_{ssN}]$ dan $[L_{srN}(\theta)]$ diperoleh :

$$[L_{rrN}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}L_r & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2}L_r \end{bmatrix} = \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_r & 0 \\ 0 & 0 & L_r \end{bmatrix} \tag{18}$$

$$[L_{rsN}(\theta) = \frac{3}{2} M_{sr} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{19}$$

Dengan demikian dalam sistem baru, matrik fluksi dapat diubah menjadi matrik 4x4, karena komponen komponen homopolar adalah nol.

Jika sistem baru dinyatakan dengan referensi α, β maka matrik fluksi pada persamaan (3) dapat dituliskan sebagai :

$$\begin{bmatrix} \Phi_{s\alpha} \\ \Phi_{s\beta} \\ \Phi_{r\alpha} \\ \Phi_{r\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_s & 0 & \mu_{sr}\cos\theta & -\mu_{sr}\sin\theta \\ 0 & \Lambda_s & \mu_{sr}\sin\theta & \mu_{sr}\cos\theta \\ \mu_{sr}\cos\theta & \mu_{sr}\sin\theta & \Lambda_r & 0 \\ -\mu_{sr}\sin\theta & \mu_{sr}\cos\theta & 0 & \Lambda_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \\ i_{r\alpha} \\ i_{r\beta} \end{bmatrix} \tag{20}$$

di mana

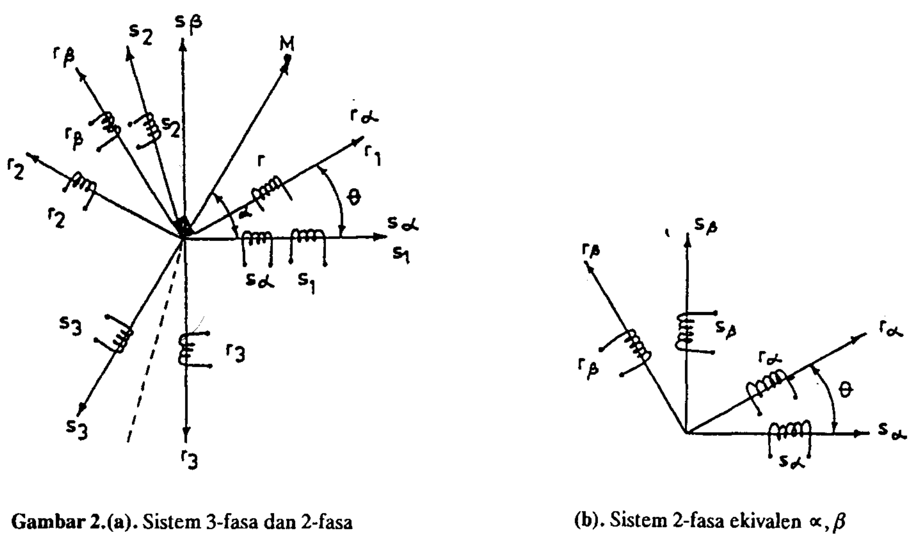
$L_s = \frac{3}{2} L_s$ induktansi-diri belitan stator sistem 2-fasa

$m_{sr} = \frac{3}{2} M_{sr}$ induktansi-mutual antara stator dan rotor sistem 2 fasa

$L_r = \frac{3}{2} L_r$ induktansi-diri belitan rotor sistem 2-fasa

PENENTUAN [A] DENGAN ANALISIS KERAPATAN FLUKSI

Secara matematis telah kita buktikan bahwa sistem 3 fasa dapat diganti menjadi sistem 2 fasa. Sistem 2 fasa ini dapat ditunjukkan dengan 2 vektor saling tegaklurus, dan dipilih sedemikian rupa sehingga s_α berhimpit dengan s_1, sedangkan r_α berhimpit dengan r_1.



Gambar 2.(a). Sistem 3-fasa dan 2-fasa (b). Sistem 2-fasa ekivalen α, β

Karena itu bila terdapat suatu titik M dalam ruang maka kerapatan fluksi di titik M oleh sistem 3 fasa (B_{M3}) sama dengan kerapatan fluksi sistem 2 fasa (B_{M2}).Kerapatan fluksi tersebut masing masing diberikan oleh :

$$B_{M3} = \mu \; \{n_3 i_{s1} \cos \alpha + n_3 i_{s2} \cos (\alpha - \tfrac{2\pi}{3}) + n_3 i_{s3} \cos (\alpha - \tfrac{4\pi}{3})\} \qquad (21)$$

$$B_{M2} = \mu \; \{n_2 i_{s\alpha} \cos \alpha + n_2 i_{s\beta} \sin \alpha\} \qquad (22)$$

di mana B_M :kerapatan fluksi

μ :permeabilitas

n_3 :belitan primer sistem 3 fasa

n_2 :belitan primer sistem 2 fasa

Dengan mengingat $B_{M3} = B_{M2}$ dan pemisahkan komponen fluksi dalam faktor cos α dan sin α, dapat dituliskan hubungan :

$$\begin{bmatrix} i_{so} \\ i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \end{bmatrix} = \frac{n_3}{n_2} \begin{bmatrix} a & a & a \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{s1} \\ i_{s2} \\ i_{s3} \end{bmatrix} \qquad (23)$$

di mana : a = bilangan yang harus memenuhi persyaratan matrik orthonormal

atau $[i_{sN}] = [A]^t [i_s]$

Karena [A] adalah matrik orthonormal, tentu saja bersifat orthogonal, maka $[A]^t = [A]^{-1}$ (24)

Untuk matrik orthonormal berlaku nilai vektor kolom / baris berharga satu,sehingga akan diperoleh

$$[A]^t = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \qquad (25a)$$

$$[A] = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \qquad (25b)$$

Kedua matrik transformasi dasar ini dapat berbeda karena solusi dapat lebih dari satu. Tetapi hasil akhir sistem baru akan tetap sama.

PERSAMAAN TEGANGAN

Tegangan stator diberikan oleh :

$$[V_s] = [R_s][i_s] + \frac{d}{dt}[\phi_s]$$

$$[V_{sN}] = [A]^{-1}[R_s][A][i_{sN}] + [A]^{-1}\frac{d}{dt}[A][\phi_{sN}]$$

$$[V_{sN}] = [R_s][i_{sN}] + \frac{d}{dt}[\phi_{sN}] \qquad (26)$$

Sedangkan tegangan rotor :

$$[V_{rN}] = [R_r][i_{rN}] + \frac{d}{dt}[\phi_{rN}] \qquad (27)$$

Sehingga persamaan tegangan dapat dinyatakan :

$$\begin{bmatrix} V_{s\alpha} \\ V_{s\beta} \\ V_{r\alpha} \\ V_{r\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \\ i_{r\alpha} \\ i_{r\beta} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \phi_{s\alpha} \\ \phi_{s\beta} \\ \phi_{r\alpha} \\ \phi_{r\beta} \end{bmatrix}$$

Dalam pembahasan mesin-mesin listrik, pemilihan referensi ditentukan dengan melihat besaran listrik pada mesin tersebut. Oleh karena itu untuk mendapat ide lebih umum maka dibuat sistem referensi Park *d,q* yang kemudian dikembangkan menjadi Park komplek, yang mana cara terakhir ini teknik penyelesaiannya menjadi lebih sederhana.

PERSAMAAN UMUM PARK d,q

Sistem Park d, q adalah suatu sistem yang mengambil sumbu horizontal (sumbu mendatar) sebagai sumbu direct (d) dan vertikal sebagai sumbu quadrature (q).
Dari sistem Park α,β pada stator dan rotor, belitan-belitan yang ada akan dinyatakan dalam belitan ekivalen di sumbu d,q yang terletak sembarang dengan sudut ψ terhadap s_α.

Dari persamaan (20) fluksi stator dapat dituliskan sebagai :

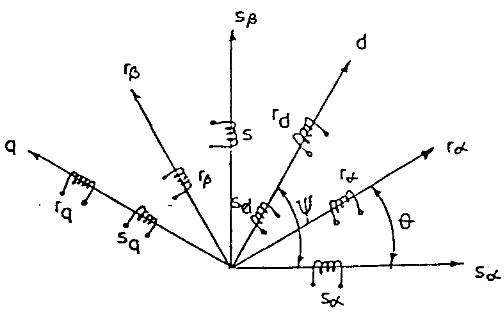
$$\begin{bmatrix}\phi_{s\alpha}\\ \phi_{s\beta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Lambda_s & 0\\ 0 & \Lambda_s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_{s\alpha}\\ i_{s\beta}\end{bmatrix}+L_{sr}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_{r\alpha}\\ i_{r\beta}\end{bmatrix}$$

Dengan mengingat $[X_s] = [A][X_{sN}]$

maka dapat dinyatakan

$$[B(\theta)]^{-1}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix} \tag{28}$$

di mana $[B(\theta)]^{-1}$ matrik penghubung induktansi bersama sistem dua fasa α, β.



Gambar 3. Sistem 2-fasa Park d.q.

maka $[\phi_s]$ dapat dituliskan

$$[\phi_s] = [\Lambda_s][i_s] + m_{sr}[B^{-1}][i_r] \tag{29}$$

sehingga arus stator sama dengan

$$\begin{bmatrix}i_{s\alpha}\\ i_{s\beta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\psi & -\sin\psi\\ \sin\psi & \cos\psi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_{sd}\\ i_{sq}\end{bmatrix} \tag{30}$$

atau $[i_s] = [B_s][i_{sN}]$ dan secara analogi arus rotor dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{bmatrix}i_{r\alpha}\\ i_{r\beta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(\psi-\theta) & -\sin(\psi-\theta)\\ \sin(\psi-\theta) & \cos(\psi-\theta)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_{rd}\\ i_{rq}\end{bmatrix} \tag{31}$$

atau $[i_r]=[B_r][i_{rN}]$

Matrik $[B_s]$ dan $[B_r]$ adalah matrik orthonormal sehingga

$$[B_s]^{-1} = [B_s]^t \tag{32}$$

dan

$$[B_r]^{-1} = [B_r]^t \tag{33}$$

Fluksi ekivalen stator di sumbu d,q ialah ϕ_{sN}

$$[\phi_s] = [\Lambda_s][i_s] + m_{sr}[B_r]^{-1}[i_r]$$

$$[\phi_{sN}] = [B_s]^{-1}[\Lambda_s][B_s][i_s] + [B_s]^{-1}m_{sr}[B_r]^{-1}[B_r][i_{rN}] \tag{34}$$

karena $[L_s]$ adalah matrik satuan dan m_{sr} konstanta, maka :

$$[\phi_{sN}] = [\Lambda_s][i_{sN}] + m_{sr}[i_{rN}]$$

$$\begin{bmatrix}\phi_{sd}\\ \phi_{sq}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\Lambda_s & 0\\ 0 & \Lambda_s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_{sd}\\ i_{sq}\end{bmatrix} + L_{sr}\begin{bmatrix}i_{rd}\\ i_{rq}\end{bmatrix} \tag{35}$$

Dengan cara yang sama akan diperoleh fluksi ekivalen rotor di sepanjang sumbu d,q

$$[\phi_r] = [\Lambda_r][i_r] + m_{sr}[B_s]^{-1}[i_s]$$

$$[\phi_{rN}] = [B_r]^{-1}[\Lambda_r][B_r][i_{rN}] + [B_r]^{-1}m_{sr}[B_s]^{-1}[B_s][i_{sN}]$$

$$[\phi_{rN}] = [\Lambda_r][i_{rN}] + m_{sr}[i_{sN}]$$

$$\begin{bmatrix}\phi_{rd}\\ \phi_{rq}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\Lambda_r & 0\\ 0 & \Lambda_r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_{rd}\\ i_{rq}\end{bmatrix} + L_{sr}\begin{bmatrix}i_{sd}\\ i_{sq}\end{bmatrix} \tag{36}$$

PERSAMAAN TEGANGAN

Tegangan stator dinyatakan oleh :

$$[V_s] = [R_s][i_s] + \frac{d}{dt}[\phi_s]$$

$$[V_{sN}] = [B_s]^{-1}[R_s][B_s][i_{sN}] + [B_s]^{-1}\frac{d}{dt}[B_s][\phi_{sN}]$$

$$[V_{sN}] = [R_s][i_{sN}] + [B_s]^{-1}[B_s]\frac{d}{dt}[\phi_{sN}] + \frac{d\psi}{dt}[B_s]^{-1}[\phi_{sN}]$$

sehingga didapatkan :

$$\begin{bmatrix} V_{sd} \\ V_{sq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 \\ 0 & R_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \phi_{sd} \\ \phi_{sq} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \dot{\psi} \\ \dot{\psi} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{sd} \\ \phi_{sq} \end{bmatrix} \tag{37}$$

atau

$$V_{sd} = R_s i_{sd} + \frac{d}{dt} \phi_{sd} - \dot{\psi}\, \phi_{sq} \tag{38}$$

$$V_{sq} = R_s i_{sq} + \frac{d}{dt} \phi_{sq} + \dot{\psi}\, \phi_{sd} \tag{39}$$

Sementara itu tegangan rotor diberikan oleh :

$$[V_r] = [R_r][i_r] + \frac{d}{dt} [\phi_r]$$

$$[V_{rN}] = [B_r]^{-1}[R_r][B_r][i_{rN}] + [B_r]^{-1}\frac{d}{dt} [B_r][\phi_{rN}]$$

dan didapatkan :

$$\begin{bmatrix} V_{rd} \\ V_{rq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_r & 0 \\ 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{rd} \\ i_{rq} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \phi_{rd} \\ \phi_{rq} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & (\dot{\psi} - \dot{\theta}) \\ (\dot{\psi} - \dot{\theta}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{rd} \\ \phi_{rq} \end{bmatrix} \tag{40}$$

atau

$$V_{rd} = R_r i_{rd} + \frac{d}{dt}\phi_{rd} - (\dot{\psi} - \dot{\theta})\phi_{rq} \tag{41}$$

$$V_{rq} = R_r i_{rq} + \frac{d}{dt} \phi_{rq} + (\dot{\psi} - \dot{\theta})\phi_{rd} \tag{42}$$

Selanjutnya persamaan tersebut akan dinyatakan dalam persamaan Park komplek.

PERSAMAAN PARK KOMPLEK SISTEM 2-FASA

Untuk menyatakan besaran dalam sistem komplek perlu dicari suatu matrik transformasi $[S_2]$ dari sistem d,q ke dalam sistem komplek,yaitu :

$$[x_{sN}] = [S_2]^{-1}[x_s]$$

dimana [x] dapat berupa matrik fluksi, arus, atau tegangan.

Persamaan stator (37) dituliskan ke dalam bentuk

$$\begin{bmatrix} V_{sd} \\ V_{sq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 \\ 0 & R_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} & -\dot{\psi} \\ \dot{\psi} & \frac{d}{dt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{sd} \\ \phi_{sq} \end{bmatrix} \tag{43}$$

Berdasarkan persamaan diatas,matrik transformasi dari sistem d,q ke sistem komplek dapat diperoleh dengan mengandaikan :

$$\mathbf{X} = [X] = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} & -\dot{\psi} \\ \dot{\psi} & \frac{d}{dt} \end{bmatrix} \tag{44}$$

yang akan memberikan $[\mathbf{X} - \lambda\mathbf{I}] = 0$

dimana : λI = matrik kolom dengan elemennya λ.

bila $\frac{d}{dt} = a$ dan $\dot{\psi} = b$ maka berdasarkan $[\mathbf{X} - \lambda\mathbf{I}][V] = 0$ akan diperoleh harga eigen vektor matrik [V] yaitu

Dari $\lambda_1 = a + jb$ dihasilkan $jV_1 + V_2 = 0$

bila $V_1 = 1$ maka $V_2 = -j$

atau $[V_1\ V_2]=[1\ -j]$

Dari $\lambda_2 = a - jb$ dihasilkan $V_1 + jV_2 = 0$

bila $V_1 = 1$ maka $V_2 = j$

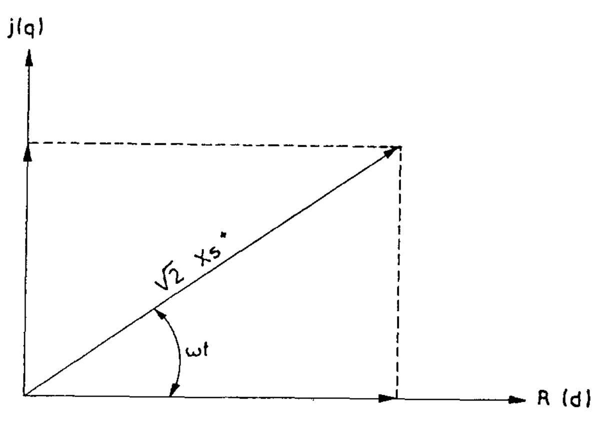
atau $[V_1\ V_2] = [1\ j]$

Sehingga matrik transformasi $[S_2] = [V]^t = k \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{bmatrix}$ (45)

Matrik $[S_2]$ adalah matrik satuan, karena itu $k = 1/\sqrt{2}$ dan

$$[S_2]^{-1} = ([S_2]^t)^* \tag{46}$$

Diagram fasor sistem komplek dan sistem d,q diperlihatkan pada Gb. 4.



Gambar 4. Hubungan antara besaran Park komplek dan Park riil

Sementara itu $X_s^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} [X_{sd} + jX_{sq}]$

dan bila

$X_{sd} = X_m \cos \omega t$

$X_{sq} = X_m \sin \omega t$

$$\text{maka} \quad X_s^+ = \frac{X_m}{\sqrt{2}} e^{j\omega t}$$

$$X_s^- = \frac{X_m}{\sqrt{2}} e^{-j\omega t} \tag{47}$$

dimana $X^{\pm}$ simbol untuk fluksi, arus, atau tegangan urutan positip atau negatip.

PERSAMAAN FLUKSI DALAM SISTEM KOMPLEK

Fluksi pada stator dapat dituliskan :

$$\phi_{sd} = \Lambda_s i_{sd} + m_{sr} i_{rd}$$

$$\phi_{sq} = \Lambda_s i_{sq} + m_{sr} i_{rq}$$

dengan fluksi urutan positip

$$\phi_s^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} [\rightarrow_s i_{sd} + m_{sr} i_{rd}] + j \frac{1}{\sqrt{2}} [\rightarrow_s i_{rq} + m_{sr} i_{rq}]$$

$$\phi_s^+ = \Lambda_s i_s^+ + m_{sr} i_r^+ \tag{48}$$

dan fluksi urutan negatip

$$\phi_s^- = (\phi_s^+)^* \tag{49}$$

Sedangkan fluksi pada rotor,dengan cara yang analog dengan fluksi pada stator :

$$\phi_r^+ = \Lambda_r i_r^+ + m_{sr} i_s^+ \tag{50}$$

dan

$$\phi_r^- = (\phi_r^+)^* \tag{51}$$

PERSAMAAN TEGANGAN DALAM SISTEM KOMPLEK

Tegangan pada stator :

$$V_{sd} = R_s i_{sd} + \frac{d}{dt} \phi_{sd} - \dot{\psi} \phi_{sq}$$

$$V_{sq} = R_s i_{sq} + \frac{d}{dt} \phi_{sq} + \dot{\psi} \phi_{sd}$$

dengan tegangan urutan positip

$$V_s^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} [V_{sd} + jV_{sq}]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} R_s [i_{sd} + ji_{sq}] + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d}{dt} [\phi_{sd} + \psi\phi_{sq}] + \frac{1}{\sqrt{2}} \dot{\psi} \psi[\phi_{sd}+\psi\phi_{sq}]$$

$$V_s^+ = R_s i_s^+ + \frac{d}{dt} \phi_s^+ + \psi\dot{\psi} \phi_s^+ \quad (52)$$

dan tegangan urutan negatip

$$V_s^- = (V_s^+)^*$$

$$V_s^- = R_s i_s^- + \frac{d}{dt} \phi_s^- + \psi\dot{\psi} \phi_s^- \quad (53)$$

Dengan cara yang sama tegangan pada rotor ialah :

$$V_r^+ = R_r i_r^+ + \frac{d}{dt} \phi_r^+ + \psi(\dot{\psi} - \dot{\theta})\phi_r^+ \quad (54)$$

dan

$$V_r^- = R_r i_r^- + \frac{d}{dt} \phi_r^- + \psi(\dot{\psi} - \dot{\theta})\phi_r^- \quad (55)$$

PERSAMAAN PARK KOMPLEK MOTOR TAK SEREMPAK

Pada motor tak serempak 3-fasa yang setimbang, komponen-komponen urutan negatip dapat langsung diperoleh dari konjugate komponen urutan positip. Oleh sebab itu, unjukkerja motor tak serempak 3-fasa cukup dinyatakan oleh persamaan (52) dan (54). Inilah keuntungan dari penggunaan sistem Park komplek, karena unjukkerja dinamik motor tak serempak cukup dinyatakan dengan dua persamaan diferensial, bukan empat persamaan seperti pada metoda transformasi lainnya.

Jika kita ingin menggunakan arus-arus stator dan rotor sebagai variabel maka kita tinggal memasukkan persamaan (48) dan (50) ke dalam persamaan (52) dan (54) sehingga didapatkan

$$V_s^+ = [R_s + L_s(p+j\omega)]i_s^+ + m_{sr}(p+j\omega)i_r^+ \quad (56)$$

$$V_r^+ = m_{sr}(p+j\omega_s)i_s^+ + [R_r+L_r(p+j\omega_s)]i_r^+ \quad (57)$$

di mana $p = d/dt$

$\omega = \dot{\psi}$

$\omega_r = \dot{\theta}$

$\omega_s = \omega - \omega_r$

Dilain pihak,jika kita ingin menggunakan fluksi sebagai variabel maka persamaan (48) dan (50) dituliskan terlebih dulu menjadi bentuk arus :

$$i_s^+ = (1/\sigma\Lambda_s)[\phi_s^+ - \frac{m_{sr}}{L_r}\phi_r^+] \qquad (58)$$

$$i_r^+ = (1/\sigma\Lambda_r)[\phi_r^+ - \frac{m_{sr}}{L_r}\phi_s^+] \qquad (59)$$

Kemudian persamaan di atas kita subtitusikan ke persamaan (52) dan (54) untuk menghasilkan

$$V_s^+ = [\frac{R_s}{\sigma\Lambda_s} + p + j\omega]\phi_s^+ - \frac{m_{sr}R_r}{\sigma\Lambda_s\Lambda_r}\phi_r^+ \qquad (60)$$

$$V_r^+ = - \frac{m_{sr}R_r}{\sigma\Lambda_s\Lambda_r}\phi_s + [\frac{R_r}{\sigma\Lambda_r} + p + j\omega]\,\phi_r^+ \qquad (61)$$

Untuk mendapatkan unjukkerja sistem elektromekanik motor induksi kita harus memecahkan secara simultan dua buah persamaan tegangan,yaitu persamaan (56) dan (57)atau (60) dan (61) serta sebuah persamaan yang menghubungkan torsi elektromagnetik motor (T), perubahan kecepatan rotor ($p\omega_r$), dan torsi beban (T_L) :

$$T = (J/P)\; p\omega_r + T_L \qquad (62)$$

dimana J adalah momen inersia motor dan beban ,dan P adalah jumlah pasang kutub.

TORSI ELEKTROMAGNETIK

Untuk mendapatkan torsi elektromagnetik motor kita bisa menerapkan hukum kekekalan energi yang menyatakan bahwa besarnya energi yang masuk ke sistem belitan stator dan rotor sama dengan perubahan energi tersimpan di belitan stator dan rotor ditambah kerja mekanik rotor.

Perhatikan sistem belitan mesin dua-fasa di Gb. 2(b). Besarnya energi tersimpan di belitan stator dan rotor adalah

$$W = \frac{1}{2} \to_{s\alpha} i_{s\alpha}^2 + \frac{1}{2} \to_{s\beta} i_{s\beta}^2 + \frac{1}{2} \to_{r\alpha} i_{r\alpha}^2 + \frac{1}{2} \to_{r\beta} i_{r\beta}^2 + m_{s\alpha r\alpha} i_{s\alpha} i_{r\alpha} +$$

$$\mu_{s\alpha r\beta} i_{s\alpha} i_{r\beta} + m_{s\beta r\alpha} i_{s\beta} i_{r\alpha} + m_{s\beta r\beta} i_{s\beta} i_{r\beta}$$

Sehingga jika rotor berputar sebesar $d\theta$, maka akan terjadi perubahan energi tersimpan sebesar

$$dW = \mu_{s\alpha r\alpha} i_{s\alpha} i_{r\alpha} + m_{s\alpha r\beta} i_{s\alpha} i_{r\beta} + m_{s\beta r\alpha} i_{s\beta} i_{r\alpha} + m_{s\beta r\beta} i_{s\beta} i_{r\beta}$$

Tegangan induksi pada setiap belitan karena adanya perubahan fluksi lingkup mutual adalah

$$\begin{aligned}
e_{s\alpha} &= \frac{d}{dt}(\phi_{s\alpha}) = \frac{d}{dt}(m_{s\alpha r\alpha} i_{r\alpha} + m_{s\alpha r\beta} i_{r\beta}) \\
&= i_{r\alpha} \frac{d}{dt} L_{s\alpha r\alpha} + i_{r\beta} \frac{d}{dt} L_{s\alpha r\beta} \\
e_{s\beta} &= \frac{d}{dt}(\phi_{s\beta}) = \frac{d}{dt}(m_{s\beta r\alpha} i_{r\alpha} + m_{s\beta r\beta} i_{r\beta}) \\
&= i_{r\alpha} \frac{d}{dt} L_{s\beta r\alpha} + i_{r\beta} \frac{d}{dt} L_{s\beta r\beta} \\
e_{r\alpha} &= \frac{d}{dt}(\phi_{r\alpha}) = \frac{d}{dt}(m_{r\alpha s\alpha} i_{s\alpha} + m_{r\alpha s\beta} i_{s\beta}) \\
&= i_{s\alpha} \frac{d}{dt} L_{r\alpha s\alpha} + i_{s\beta} \frac{d}{dt} L_{r\alpha s\beta} \\
e_{r\beta} &= \frac{d}{dt}(\phi_{r\beta}) = \frac{d}{dt}(m_{r\beta s\alpha} i_{s\alpha} + m_{r\beta s\beta} i_{s\beta}) \\
&= i_{s\alpha} \frac{d}{dt} L_{r\beta s\alpha} + i_{s\beta} \frac{d}{dt} L_{r\beta s\beta}
\end{aligned}$$

Sehingga energi elektrik yang masuk ke belitan stator dan rotor selama waktu dt adalah

$$\begin{aligned}
&e_{s\alpha} i_{s\alpha} dt + e_{s\beta} i_{s\beta} dt + e_{r\alpha} i_{r\alpha} dt + e_{r\beta} i_{r\beta} dt = \\
&i_{s\alpha}(i_{r\alpha} dm_{s\alpha r\alpha} + i_{r\beta}\, dm_{s\alpha r\beta}) + i_{s\beta}(i_{r\alpha}\, dm_{s\beta r\alpha} + i_{r\beta}\, dm_{s\beta r\beta}) + \\
&i_{r\alpha}(i_{s\alpha}\, dm_{r\alpha s\alpha} + i_{s\beta}\, dm_{r\alpha s\beta}) + i_{r\beta}(i_{s\alpha}\, dm_{r\beta s\alpha} + i_{s\beta}\, dm_{r\beta s\beta})
\end{aligned}$$

Kerja mekanik yang dilakukan rotor adalah

$T d\theta$ = energi masuk - perubahan energi tersimpan

$$= i_{s\alpha} i_{r\alpha} dm_{s\alpha r\alpha} + i_{s\beta} i_{r\alpha} dm_{s\beta r\alpha} + i_{s\alpha} i_{r\beta} dm_{s\beta r\alpha} + i_{s\beta} i_{r\beta} dm_{s\beta r\alpha}$$

sehingga torsi yang dihasilkan motor induksi adalah

$$T = i_{s\alpha} i_{r\alpha} \frac{d\mu_{s\alpha r\alpha}}{d\theta} + i_{s\beta} i_{r\alpha} \frac{d\mu_{s\beta r\alpha}}{d\theta} + i_{s\alpha} i_{r\beta} \frac{d\mu_{s\alpha r\beta}}{d\theta} + i_{s\beta} i_{r\beta} \frac{d\mu_{s\beta r\beta}}{d\theta}$$

Karena

$$\mu_{s\alpha r\alpha} = \mu_{sr} \cos\theta \qquad \mu_{s\beta r\alpha} = \mu_{sr} \sin\theta$$

$m_{s\alpha r\beta} = -m_{sr}\sin\theta \qquad \mu_{s\beta r\beta} = \mu_{sr}\cos\theta$

maka persamaan torsinya menjadi

$$T = m_{sr}[(i_{s\beta}i_{r\alpha} - i_{s\alpha}i_{r\beta})\cos\theta - (i_{s\alpha}i_{r\alpha} + i_{s\beta}i_{r\beta})\sin\theta]$$

Untuk motor dengan P pasang kutub maka torsinya

$$T = P\,\mu_{sr}[(i_{s\beta}i_{r\alpha} - i_{s\alpha}i_{r\beta})\cos\theta - (i_{s\alpha}i_{r\alpha} + i_{s\beta}i_{r\beta})\sin\theta] \qquad (63)$$

Dari persamaan (30) dan (31) kita mempunyai hubungan antara arus-arus sistem d-q dan sistem α-β sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \end{bmatrix} \qquad (64)$$

$$\begin{bmatrix} i_{rd} \\ i_{rq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\psi-\theta) & \sin(\psi-\theta) \\ -\sin(\psi-\theta) & \cos(\psi-\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{r\alpha} \\ i_{r\beta} \end{bmatrix} \qquad (65)$$

Sedangkan arus urutan positip didefinisikan sebagai

$$i_s^+ = i_{sd} + j i_{sq}$$

$$i_r^+ = i_{rd} + j i_{rq}$$

Jika persamaan ini digunakan dalam persamaan torsi maka kita peroleh

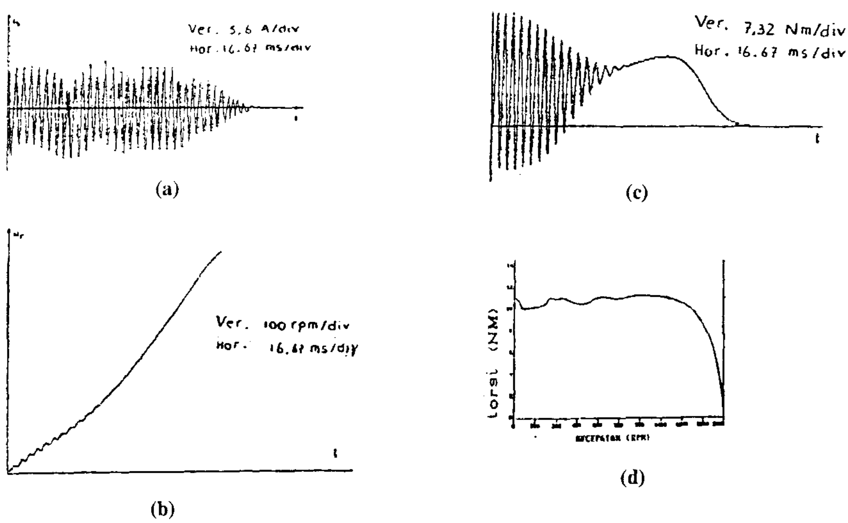
$$T = P\,m_{sr}\,\mathrm{Im}\,[i_s^+ (i_r^+)^*] \qquad (66)$$

PENGASUTAN MOTOR TAK SEREMPAK 3-FASA

Sebagai ilustrasi akan dibahas pengasutan motor tak serempak 3-fasa 380-V, 2,2-kW, 5,0-A, 4 kutub, 50-Hz, dengan parameter R_s = 2.81 Ω, R_r = 2,41 Ω, $\Lambda_s = \Lambda_r$ = 0,257 H, dan μ_{sr} = 0,242 H, dan inersia J = 0,05 kg-m^2. Motor diasut langsung dengan tegangan nominal sinusoidal tanpa beban.

Simulasi dilakukan dengan memecahkan persamaan diferensial (60)-(62) dengan menggunakan metoda Runge-Kutta orde empat.

Dari gambar 5a. dapat diketahui waktu yang dibutuhkan agar arus mencapai harga konstan, dari gambar 5b. waktu yang



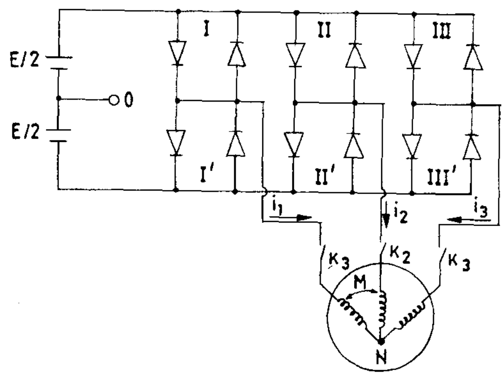
Gambar 5. Pengasutan motor induksi. (a). Arus fungsi waktu. (b). Kecepatan fungsi waktu. (c). Torsi fungsi waktu. (d). Torsi fungsi kecepatan.

diperlukan untuk mencapai putaran nominal. Gambar 5c dan 5d menunjukan berapa besar waktu alih sehingga Torsi mencapai harga konstan dan nilai Torsi maksimum dihasilkan.

INVERTER 3-FASA OTONOM MEMASOK MOTOR TAK SEREMPAK 3-FASA KEADAAN MANTAP

Dalam contoh ini akan diperlihatkan bagaimana metoda Park komplek dapat m e manfaatkan kesimetrisan motor tak serempak tiga-fasa dan gelombang keluaran inverter sumber tegangan tiga-fasa sehingga bisa didapatkan solusi bentuk tertutup.

Pada Gb. 6 diperlihatkan suatu inverter 3-fasa otonom yang memasok motor tak serempak 3-fasa. Pada Gb. 7 diperlihatkan urutan kerja saklar-saklar elektronis inverter dan gelombang tegangan yang dihasilkan. Disini akan dibahas penentuan bentuk arus stator dan rotor motor tak serempak.



Gambar 6. Inverter otonom memasok motor induksi 3-fasa.

Untuk keadaan mantap suatu motor tak serempak yang dipasok inverter, analisisnya lebih mudah jika kita menggunakan kerangka referensi d-q yang diam di stator ($\dot{\psi} = 0$). Pada keadaan mantap, kecepatan rotor (ω_r) dianggap konstan.

Dengan menerapkan hubungan antara besaran urutan positif dan tegangan fasa netral dapat diperoleh tegangan urutan positif sebagai berikut :

$$V^{+} = \frac{1}{\sqrt{3}} [V_{1N} + a\, V_{2N} + a^2 V_{3N}] \tag{67}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} [V_{10} + a\, V_{20} + a^2 V_{30}] \tag{68}$$

Untuk enam buah urutan kerja saklar seperti terlihat di Gb. 7(a), didapatkan tegangan urutan positip untuk setiap urutan sebagai berikut :

$$V_{+}^{6} = -\, a \frac{E}{\sqrt{3}} \tag{69}$$

$$V_{+}^{1} = +\frac{E}{\sqrt{3}} \tag{70}$$

$$V_{+}^{2} = -a^2 \frac{E}{\sqrt{3}} \tag{71}$$

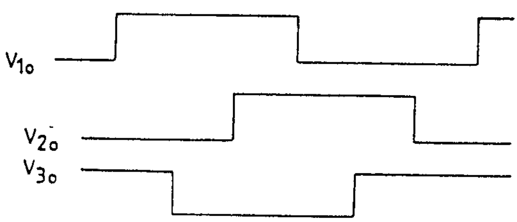
$$V_{+}^{3} = a \frac{E}{\sqrt{3}} \tag{72}$$

$$V_+^4 = -\frac{E}{\sqrt{3}} \tag{73}$$

$$V_+^5 = a^2 \frac{E}{\sqrt{3}} \tag{74}$$

	6	1	2	3	4	5
1	I	I	I	I′	I′	I′
2	II′	II′	II	II	II	II′
3	III	III′	III′	III′	III	III
$E/\sqrt{3}$	$-a$	1	$-a^2$	a	-1	a^2

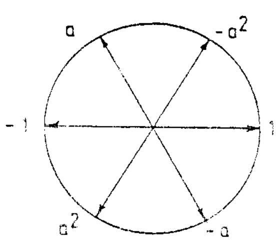
(a)



(b)

Gambar 7. (a) Urutan kerja saklar inverter. (b) Gelombang tegangan keluaran inverter.

Pada Gb. 8 diperlihatkan vektor tegangan urutan positip yang dihasilkan inverter.



Gambar 8. Vektor tegangan urutan positip.

Dengan menggunakan asumsi ω_r konstan dan $\dot{\psi} = 0$, maka persamaan (56) dan (57) menjadi

$$V_s^+ = R_s i_s^+ + L_s p i_s^+ + m_{sr} p i_r^+ \tag{75}$$

$$0 = m_{sr}(p-j\omega_r) i_s^+ + R_r i_r^+ + L_r(p-j\omega_r) i_r^+ \tag{76}$$

Jika persamaan (76) digunakan didalam persamaan (75) maka bentuk homogennya akan menghasilkan persamaan kuadrat komplek berikut ini

$$(R_s+L_s p)(R_r+L_r(p-j\omega_r)) - \mu_{sr}^2 p(p-j\omega_r) = 0$$

Dengan menggunakan rumus akar persamaan kuadrat kita dapatkan :

$$\bar{s}_1, \bar{s}_2 = -\frac{1}{2}\left[\alpha_r+\alpha_s-j\omega_r \pm \sqrt{(\alpha_s+\alpha_r)^2-4\sigma\alpha_s\alpha_r - \omega_r^2 - j2(\alpha_s-\alpha_r)\omega_r}\right] \tag{77}$$

Solusi keadaan mantap dapat diperoleh dari (56) dan (57) dengan $p = 0$, yang menghasilkan :

$$i_{s\infty}^+ = \frac{V_{sk}^+}{R_s} \qquad i_{r\infty}^+ = \frac{j\omega_r \mu_{sr} V_{sk}^+}{(R_r - j\omega_r \Lambda_r)R_s} = -\frac{Z_{do}}{Z_{ro}}\frac{V_{sk}^+}{R_s} \tag{78}$$

dimana V_{sk}^+ adalah tegangan V_s^+ pada urutan k.

Dengan memperhitungkan kontinuitas arus di setiap urutan akhirnya bisa didapatkan persamaan arus stator dan rotor sebagai berikut :

$$i_s^+ = \frac{V_{sk}^+}{R_s}\left[1 + C_{1s}e^{s_1 t} + C_{2s}e^{s_2 t}\right] \tag{79}$$

$$i_r^+ = \frac{V_{sk}^+}{R_s}\frac{Z_{do}}{Z_{ro}}\left[-1 + C_{1r}e^{s_1 t} + C_{2r}e^{s_2 t}\right] \tag{80}$$

di mana

$$C_{1s} = \frac{s_2+\alpha_s}{F_1(s_2-s_1)} \qquad C_{2s} = \frac{s_1+\alpha_s}{F_2(s_1-s_2)}$$

$$C_{1r} = -\frac{s_2+\alpha_s\left[\frac{m_{sr}}{L_r}\frac{Z_{ro}}{Z_{do}}\right]}{F_1(s_2-s_1)} \qquad C_{2r} = -\frac{s_1+\alpha_s\left[\frac{m_{sr}}{L_r}\frac{Z_{ro}}{Z_{do}}\right]}{F_2(s_1-s_2)}$$

$$F_1 = e^{-j\frac{\pi}{3}}\left(e^{\frac{\pi}{3}\left[\frac{S_1}{\omega} - j\right]} - 1\right) \qquad F_2 = e^{-j\frac{\pi}{3}}\left(e^{\frac{\pi}{3}\left[\frac{S_2}{\omega} - j\right]} - 1\right)$$

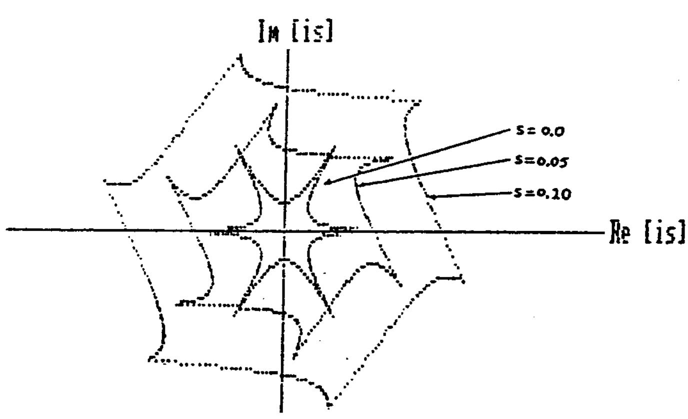
$$\alpha_s = R_s/\sigma\Lambda_s \qquad \alpha_r = R_r/\sigma\Lambda_r$$

$$Z_{do} = - j\omega_r\mu_{sr} \qquad Z_{ro} = R_r - j\omega_r\Lambda_r$$

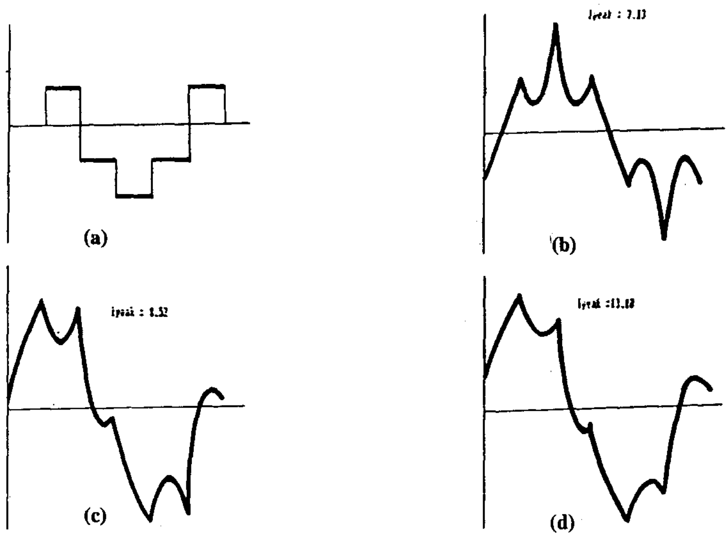
Arus fasa dapat langsung diperoleh dari

$$i_s = \mathrm{Re}\ [i_s^+] \tag{81}$$

Sebagai ilustrasi, motor induksi yang datanya sama seperti contoh sebelumnya dipasok dengan inverter sumber tegangan. Untuk mendapatkan komponen dasar tegangan yang sama seperti tegangan nominal motor, inverter bekerja pada tegangan masuk dc 490 V dengan frekuensi keluaran 50 Hz. Pada Gb. 9 diperlihatkan perubahan vektor arus urutan positif pada bermacam nilai slip. Gb. 10 memperlihatkan gelombang arus stator untuk slip 0,5 dan 10 persen.



Gambar 9. Vektor arus urutan positip keadaan mantap.



Gambar 10. Gelombang tegangan dan arus stator.
(a). Tegangan fasa ke netral.
(b). Arus fasa pada slip 0%.
(c). Arus fasa pada slip 5%.
(d). Arus fasa pada slip 10%.

KESIMPULAN

Dengan menggunakan metoda Park komplek diperlihatkan bahwa unjukkerja dinamik motor tak serempak 3-fasa cukup representasikan dengan persamaan orde dua koefisien komplek, bukan dengan persamaan orde empat seperti jika menggunakan metoda Park riil.

Untuk analisis inverter otonom memasok motor tak serempak pada keadaan mantap, penggunaan metoda Park komplek memungkinkan didapatkannya solusi bentuk tertutup yang sederhana. Bentuk solusi yang sederhana ini bisa didapat karena kesimetrisan mesin dan gelombang keluaran inverter bisa dimanfaatkan secara maksimum.

Dari hasil simulasi pengasutan motor tak serempak 3-fasa, besaran-besaran yang penting seperti halnya arus asut maksimum, waktu pengasutan, dan torsi asut maksimum bisa langsung didapat.

Dari hasil simulasi motor tak serempak yang dipasok inverter, informasi yang penting seperti halnya tegangan, arus, dan torsi puncak bisa diperoleh. Besaran ini sangat diperlukan dalam disain inverter dan pemilihan motor. Pada keadaan beban nol (slip 0%) terlihat bahwa meskipun arus efektifnya kecil tetapi arus puncaknya besar, yaitu setengah dari arus puncak pada slip 10 %.

PUSTAKA

1. Trannoy, B., Transitoire des machines éléctriques à commutation éléctronique, Note de course, DEA-ENSEEIHT-FRANCE, 1980.
2. Hancock, N. N., Matrix analysis of electrical machinery, 2nd edition, Pergamon Press, 1974.
3. Barret, P., Régime transitoires des machines tournantes éléctriques, Eyrolles edition, 1982.
4. Novotny, D. W., Steady state performance of inverter fed induction machines by means time domain complex variables, IEEE Trans. Power App. and Syst., May/June 1976.