MODEL DISTRIBUSI GAMMA UNTUK UJI HIDUP DIPERCEPAT

oleh: *Zanzawi Soejoeti *)*

1 Pendahuluan

Beberapa model dan analisis untuk uji hidup dipercepat telah banyak dibicarakan. Distribusi yang biasa digunakan sebagai model distribusi tahan hidup adalah eksponensial, misalnya Kahn [3]; Weibull, misalnya Mann [4]; dan log normal, misalnya Nelson [5]. Dalam tulisan ini yang akan digunakan sebagai model distribusi tahan hidup adalah distribusi gamma, yaitu suatu perluasan dari distribusi eksponensial. Penggunaannya dalam uji hidup telah dibicarakan antara lain oleh Gupta dan Groll [2], tetapi belum ada tulisan yang membicarakannya dalam masalah uji hidup dipercepat.

Kita misalkan distribusi tahan hidup suatu benda adalah gamma dengan fungsi kepadatan

$$f(z) = \frac{1}{\theta^{\gamma}\Gamma(\gamma)}\, z^{\gamma-1} \exp\left(-\frac{z}{\theta}\right); \gamma, \theta > 0 \text{ dan } z > 0 \tag{1}$$

Parameter skala θ tergantung pada tegangan x menurut hubungan

$$\theta = \exp(\alpha + \beta x) \tag{2}$$

sedangkan parameter bentuk γ bebas dari tegangan x tersebut.
Secara umum metode yang akan kita sajikan di bawah berlaku juga untuk model dengan lebih dari satu tegangan. Tetapi untuk menyederhanakan penyajiannya di sini hanya kita gunakan satu tegangan saja.

Misalkan suatu percobaan dilakukan dengan n tingkat tegangan X_i; $i = 1, 2, \ldots, n$ yang tidak harus semuanya berbeda. Misalkan satu *item* dipasang pada tingkat tegangan X_i sampai mati, dan tahan hidupnya ditulis sebagai Z_i.
Berdasarkan data $\{Z_i\ ; i = 1, 2, \ldots, n\}$ semua parameter di dalam model akan ditaksir, baik dengan metode kuadrat terkecil maupun dengan metode *maximum likelihood*, yang masing-masing kita sajikan dalam Bagian 2 dan Bagian 3. Selanjutnya dalam Bagian 4 kita pelajari efisiensi asimtotik penaksir kuadrat terkecil relatif terhadap penaksir *maximum likehood.*

2 Penaksiran dengan metode kudrat terkecil

Jika Z berdistribusi gamma dengan fungsi kepadatan (1) maka $W = \log(Z/\theta)$

*) Zanzawi Soejoeti, PhD dosen pada jurusan Matematika, FMIPA UGM Bulaksumur, Yogyakarta, Indonesia.

mempunyai fungsi kepadatan

$$g(w) = [\Gamma(\gamma)]^{-1} \exp(\gamma w) \exp[-\exp(w)] \tag{3}$$

dengan

$$E(w) \equiv \omega_0 = \psi(\gamma)$$

$$\mathrm{var}(w) \equiv \sigma^2 = \psi'(\gamma)$$

$$E(W - E(W))^3 \equiv \mu_3 = \psi''(\gamma)$$

$$E(W - E(W))^4 \equiv \mu_4 = \psi'''(\gamma) + 3(\psi'(\gamma))^2 \tag{4}$$

$\psi(\gamma)$ beserta turunannya $\psi^{(k)}(\gamma)$, k bilangan bulat positif, adalah fungsi poligamma. Fungsi digamma $\psi(y)$ didefinisikan sebagai turunan pertama fungsi log gamma, yaitu $\psi(a) = d \log \Gamma(a)/da$.

Selanjutnya untuk memperoleh penaksir kuadrat terkecil kita definisikan model log linear sebagai berikut

$$\begin{aligned} Y_i &= \log Z_i \\ &= \log \theta_i + \log (Z_i/\theta_i) \end{aligned}$$

atau

$$Y_i = \alpha_0 + \beta X_i + e_i \tag{5}$$

$\alpha_0 = \alpha + \omega_0$ dan $e_i = W_i - \omega_0$; $i = 1, 2, \ldots, n$ adalah variabel acak yang saling bebas dan berdistribusi identik dengan mean 0 dan variansi σ^2. Maka metode kuadrat terkecil memberikan penaksir tak bias untuk α_0 dan β masing-masing sebagai berikut:

$$\tilde{\alpha}_0 = \overline{Y} - \tilde{\beta}\overline{X}, \quad \tilde{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})\, Y_i}{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2} \tag{6}$$

Penaksir untuk α dan γ diperoleh dengan menggunakan kuadrat residu rata-rata

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \alpha_0 - \beta X_i)^2}{n-2} \tag{7}$$

sebagai penaksir untuk σ^2. Selanjutnya dengan mengingat hubungan $\sigma^2 = \psi'(\gamma)$

dan $\omega_0 = \psi(\gamma)$, penaksir untuk α dan γ dapat dihitung.

Dengan menganggap bahwa $\lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_i = m_1$, $\lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = m_2'$,

dan $m_2 = m_2' - m_1^2 > 0$, maka menurut Teorema 2 dalam Zanzawi Soejoeti [7], distribusi asimtotik $\sqrt{n}\,(\tilde{\underset{\sim}{\Delta}}_n - \underset{\sim}{\Delta})$, dengan $\underset{\sim}{\Delta}' = (\alpha_0, \beta, \sigma^2)$, adalah normal dengan vektor mean $\underset{\sim}{0}$ dan matriks kovariansi:

$$\Sigma_{\tilde{\underset{\sim}{\Delta}}} = \begin{bmatrix} (1+\frac{m_1^2}{m_2})\,\psi'(\gamma) & -\frac{m_1}{m_2}\psi'(\gamma) & \psi''(\gamma) \\ -\frac{m_1}{m_2}\psi'(\gamma) & \frac{1}{m_2}\psi'(\gamma) & 0 \\ \psi''(\gamma) & 0 & \psi'''(\gamma) + 2(\psi'(\gamma))^2 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Dengan mengingat hasil 6.a.2(iii) dalam Rao [6], maka dapat diturunkan distribusi asimtotik $\sqrt{n}\,(\tilde{\underset{\sim}{\xi}}_n - \underset{\sim}{\xi})$, dengan $\underset{\sim}{\xi}' = (\alpha, \beta, \gamma)$, sebagai distribusi normal dengan vektor mean $\underset{\sim}{0}$ dan matriks kovariansi

$$\Sigma_{\tilde{\underset{\sim}{\xi}}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$a_{11} = \left(\frac{m_1^2}{m_2} - 1\right)\psi'(\gamma) + \left[\frac{\psi'(\gamma)}{\psi''(\gamma)}\right]^2 \left[\psi'''(\gamma) + 2(\psi'(\gamma))^2\right]$$

$$a_{12} = -\frac{m_1}{m_2}\psi'(\gamma)$$

$$a_{13} = 1 - \frac{\psi'(\gamma)}{[\psi''(\gamma)]^2}\left[\psi'''(\gamma) + 2(\psi'(\gamma))^2\right]$$

$$a_{22} = \frac{1}{m_2}\psi'(\gamma)$$

$$a_{23} = 0$$

$$a_{33} = \frac{1}{[\psi''(\gamma)]^2}\left[\psi'''(\gamma) + 2(\psi'(\gamma))^2\right]$$

Determinan matriks ini adalah

$$|\Sigma_{\tilde{\xi}}| = \{ \left[\frac{\psi'(\gamma)}{\psi''(\gamma)}\right]^2 \{\psi'''(\gamma) + 2(\psi'(\gamma))^2\} - \psi'(\gamma)\}/m_2 \tag{10}$$

Tahan hidup rata-rata pada tegangan normal X_0, $\mu_u = \gamma \exp(\alpha + \beta X_0)$ ditaksir dengan $\tilde{\mu}_u = \tilde{\gamma} \exp(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} X_0)$. Distribusi asimtotiknya normal dengan variansi

$$\kappa = (\gamma^2 a_{11} + \gamma^2 X_0{}^2 a_{22} + a_{33} + 2\gamma^2 X_0 a_{12} + 2\gamma a_{13}) \,.\, \exp[2(\alpha + \beta X_0] \tag{11}$$

3 Penaksiran dengan metode *maximum likelihood*

Untuk memperoleh penaksir *maximum likelihood* (PML), untuk $\underset{\sim}{\xi}' = (\alpha, \beta, \gamma)$, digunakan fungsi kepadatan $g(W_i) = g(Y_i - \alpha - \beta X_i)$ dalam (3). Fungsi *likelihood*-nya adalah

$$L_n(\underset{\sim}{Y}; \underset{\sim}{\xi}) = (\Gamma(\gamma))^{-n} \exp \Sigma \{ \gamma(Y_i - \alpha - \beta X_i) - \exp(Y_i - \alpha - \beta X_i)\} \tag{12}$$

dan persamaan *likelihood*-nya adalah

$$\begin{aligned} & -n\gamma + \sum_{i=1}^{n} \exp(Y_i - \alpha - \beta X_i) = 0 \\ & -\gamma_i \sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i=1}^{n} X_i \exp(Y_i - \alpha - \beta X_i) = 0 \\ & -n\psi(\gamma) + \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \alpha - \beta X_i) = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

yang harus diselesaikan secara iteratif dengan komputer untuk memperoleh PML $\hat{\underset{\sim}{\xi}}_n{}' = (\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma})$.
Distribusi asimtotik dari $\hat{\underset{\sim}{\xi}}_n$ diberikan dalam Lemma 1 di bawah.

Lemma 1

Misalkan $\hat{\underset{\sim}{\xi}}_n$ barisan yang konsisten dari ketiga jawab sistem persamaan *likelihood* (13) dan $\underset{\sim}{\xi}_0$ harga benarnya. Maka distribusi asimtotik $\sqrt{n}(\hat{\underset{\sim}{\xi}}_n - \underset{\sim}{\xi}_0)$ normal dengan vektor mean $\underset{\sim}{0}$ dan matriks kovariansi

$$\Sigma_{\hat{\underset{\sim}{\xi}}} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$b_{11} = \frac{\psi'(\gamma)}{\gamma\psi'(\gamma) - 1} + \frac{m_1^2}{\gamma\, m_2} \quad ; \quad b_{12} = -\frac{m_1}{\gamma\, m_2}$$

$$b_{13} = \frac{1}{\gamma\psi'(\gamma) - 1} \quad ; \quad b_{22} = \frac{1}{\gamma\, m_2}$$

$$b_{23} = 0 \quad ; \quad b_{33} = \frac{1}{\gamma\psi'(\gamma) - 1}$$

Bukti

Untuk membuktikan lemma ini kita perhatikan Asumsi A1 – A7 dan Teorema 2.1 dalam Zanzawi Soejoeti [8]. Meskipun buktinya tidak kita sajikan di sini, dapat kita sebutkan bahwa langkah pembuktiannya sama seperti bukti Teorema 2.1 itu. //

Determinan matriks kovariansi (14) adalah

$$|\Sigma_\xi| = \frac{1}{\gamma(\gamma\psi'(\gamma) - 1)\, m_2} \tag{15}$$

PML tahan hidup rata-rata pada tegangan normal X_0 adalah $\mu_u = \gamma \exp(\alpha + \beta X_0)$, dan distribusi asimtotiknya normal dengan variansi.

$$\kappa_0 = (\gamma^2 b_{11} + \gamma^2 X_0^{\,2} b_{22} + b_{33} + 2\,\gamma^2 X_0 b_{12} + \gamma^2 \gamma b_{13}) \,.\, \exp\,[2(\alpha + \beta X_0)] \tag{16}$$

4 Efisiensi Asimtotik (EA)

Dalam bagian ini kita sajikan efisiensi asimtotik penaksir kuadrat terkecil relatif terhadap penaksir *maximum likelihood*. Efisiensi relatif ini kita definisikan sebagai

$$EA\,(\tilde{\theta}_n) = \frac{VA\,(\hat{\theta}_n)}{VA\,(\tilde{\theta}_n)}$$

$\tilde{\theta}_n$ dan $\hat{\theta}_n$ masing-masing menunjukkan penaksir kuadrat terkecil dan penaksir *maximum likelihood*. VA $(\cdot)$ adalah variansi asimtotik, yaitu variansi distribusi normal asimtotik.

Efisiensi asimtotik vektor penaksir didefinisikan sebagai perbandingan antara determinan matriks kovariansi kedua penaksir itu.

Dari (9), (10), (11), (14), (15), dan (16) diperoleh efisiensi asimtotik relatif penaksir kuadrat terkecil sebagai berikut:

$$EA\,(\tilde{\xi}) = \left\{ \left[\frac{\psi'(\gamma)}{\psi''(\gamma)}\right]^2 [\psi'''(\gamma) + 2\,(\psi'(\gamma))^2] - \psi'(\gamma) \right\}^{-1} . \{\gamma\gamma\psi'(\gamma) - 1\}^{-1}$$

$$EA\,(\tilde{\alpha}) = \left\{ \left[\frac{\psi'(\gamma)}{\psi'''(\gamma)}\right]^2 [\psi'''(\gamma) + 2\,(\psi'(\gamma))^2] - \left(1 - \frac{m_1{}^2}{m_2}\right) \psi'(\gamma) \right\}^{-1}$$

$$. \left[\frac{\psi'(\gamma)}{\gamma\psi'(\gamma) - 1} + \frac{m_1{}^2}{\gamma\, m_2}\right] \tag{17}$$

$$EA\,(\tilde{\beta}) = [\gamma\psi'(\gamma)]^{-1}$$

$$EA\,(\tilde{\gamma}) = \gamma(\psi''(\gamma))^2\, [\psi'''(\gamma) + 2\,(\psi\psi'(\gamma))^2]^{-1} [\gamma\psi'(\gamma) - 1]^{-1}$$

$$EA\,(\tilde{\mu}_u) = \frac{\gamma^2 b_{11} + \gamma^2 X_0{}^2 b_{22} + b_{33} + 2\gamma^2 X_0 b_{12} + 2\gamma b_{13}}{\gamma^2 a_{11} + \gamma^2 X_0{}^2 a_{22} + a_{33} + 2\gamma^2 X_0 a_{12} + 2\gamma a_{13}}$$

Kita catat bahwa $EA(\tilde{\alpha})$ tergantung pada γ dan X melalui harga limit m_1 dan m_2 ; $EA(\tilde{\mu}_u)$ tergantung pada γ, X, dan juga X_0 ; sedangkan yang lain hanya tergantung pada γ.

Selanjutnya akan kita tunjukkan bahwa semua harga efisiensi asimtotik di atas konvergen ke 1 untuk $\gamma \to \infty$. Untuk ini pertama-tama kita buktikan lemma yang berikut.

Lemma 2

Jika $\psi^{(k)}(\gamma)$, k bilangan bulat positif, adalah fungsi poligamma, maka

a) untuk $1 < k < \infty$, berlaku

$$\gamma^k\, \psi^{(k)}(\gamma) \to (-1)^{k-1}(k-1)\,! \quad \text{jika } \gamma \to \infty$$

b) $\gamma[\gamma\psi'(\gamma) - 1] \to \frac{1}{2}$ jika $\gamma \to \infty$

Bukti

a) Bentuk integral fungsi poligamma $\psi^{(k)}(\gamma)$, k bilangan bulat positif, adalah (lihat Davis [1]).

$$\psi^{(k)}(\gamma) = \int_0^1 \frac{z^{\gamma-1}(\log z)^k}{(z-1)}\, dz \tag{18}$$

Maka

$$\gamma^k \psi^{(k)}(\gamma) = \gamma^k \int_0^1 \frac{z^{\gamma-1}(\log z)^k}{(z-1)}\, dz \tag{19}$$

Kita pandang uraian deret fungsi log z yaitu

$$\log z = \log 1 - (1-z) - R_1(z) = -(1-z) - R_1(z). \tag{20}$$

$$|R_1| = \int_0^{1-z} \frac{x}{1-x}\, dx \leqslant \frac{(1-z)^2}{2z}$$

Untuk suku pertama dari (20), integral (19) menjadi

$$\begin{aligned} \gamma^k \int_0^1 \frac{z^{\gamma-1}(\log z)^{k-1}(z-1)}{(z-1)}\, dz &= \gamma^k \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{\gamma^k} \\ &= (-1)^{k-1}(k-1)! \end{aligned} \tag{21}$$

Untuk suku sisanya kita peroleh

$$\begin{aligned} \left|\gamma k \int_0^1 \frac{z^{\gamma-1}(\log z)^{k-1} R_1(z)}{(z-1)}\, dz\right| &< \gamma^k \int_0^1 \frac{z^{-1}|\log z|^{k-1}(1-z)^2}{(1-z)\,2z}\, dz \\ &= \frac{\gamma^k}{2} \left|\int z^{\gamma-2}(\log z)^{k-1}(1-z)\, dz\right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1-\frac{1}{\gamma})^k} - (-1)^{k-1}(k-1)! \right| \\ &\to 0 \text{ jika } \gamma \to \infty \end{aligned}$$

Jadi

$$\gamma^k \psi^{(k)}(\gamma) \to (-1)^{k-1}(k-1)!$$

b) Bila $k = 1$, kita dapatkan

$$\psi'(\gamma) = \int_0^1 \frac{z^{\gamma-1} \log z}{(z-1)}\, dz$$

dan (22)

$$\log z = -(1-z) - \frac{1}{2}(1-z)^2 - R_2(z) \tag{22}$$

$$|R_2(z)| = \int_0^{1-z} \frac{x^2}{1-x}\, dx < \frac{(1-z)^3}{3z}$$

Untuk suku pertama dan kedua dalam (22) kita peroleh

$$\gamma\,[\gamma\psi'(\gamma)-1] = \gamma\int_0^1 \frac{z^{\gamma-1}(z-1)}{(z-1)}\,dz - \frac{\gamma}{2}\int_0^1 \frac{z^{\gamma-1}(z-1)^2}{(z-1)}\,dz - 1]$$

$$= \gamma\,[\gamma\frac{1}{\gamma} - \frac{\gamma}{2}(\frac{1}{\gamma+1} - \frac{1}{\gamma}) - 1]$$

$$= \frac{1}{2(1+\frac{1}{\gamma})} \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{untuk } \gamma \rightarrow \infty$$

Untuk suku sisanya kita peroleh

$$|\gamma^2 \int_0^1 \frac{z^{\gamma-1}R_2}{(z-1)}\,dz| \leqslant \gamma^2 \int_0^1 \frac{z^{\gamma-1}(1-z)^3}{(1-z)\,3z}\,dz$$

$$= \frac{\gamma^2}{3}\int_0^1 z^{\gamma\;2}(1-z)^2\;dz$$

$$= \frac{\gamma^2}{3}(\frac{1}{\gamma-1} - \frac{2}{\gamma} + \frac{1}{\gamma+1})$$

$$= \frac{2}{3}(\frac{\gamma^2}{\gamma(\gamma-1)(\gamma+1)}) \quad \rightarrow 0 \text{ jika } \gamma \rightarrow \infty$$

Maka lengkaplah bukti lemma ini. //

Sebelum sampai pada konvergensi efisiensi asimtotik, kita lihat persamaan berikut.

$$H_1(\gamma) \equiv [\frac{\psi'(\gamma)}{\psi''(\gamma)}]^2 \;[\psi'''(\gamma) + 2(\psi'(\gamma))^2]$$

$$= \frac{\gamma^4}{\gamma^4}[\frac{\psi'(\gamma)}{\psi'''(\gamma)}]^2 \;[\psi'''(\gamma) + 2(\psi'(\gamma))^2]$$

$$= [\frac{\gamma\psi'(\gamma)}{\gamma^2\psi''(\gamma)}]^2 \;[\frac{\gamma^3\psi'''(\gamma)}{\gamma} + 2(\gamma\psi'(\gamma))^2]$$

$$\rightarrow 2$$

Sekarang dapat kita lihat efisiensi asimtotik konvergen ke 1 untuk $\gamma \rightarrow \infty$ yaitu

$$EA\ (\tilde{\xi}) = [H_1(\gamma) - \psi'(\gamma)]^{-1}[\gamma(\gamma\psi'(\gamma) - 1)]^{-1} \to (2)^{-1}(½)^{-1} = 1$$

$$EA\ (\tilde{\alpha}) = [H_1(\gamma) - (1 - \frac{m_1^2}{m_2})\psi'(\gamma)]^{-1}[\frac{\gamma\psi'(\gamma)}{\gamma(\gamma\psi'(\gamma)-1)} + \frac{m_1^2}{\gamma m_2}]$$

$$\to (2)^{-1}(2) = 1$$

$$EA\ (\tilde{\beta}) = [\gamma\psi'(\gamma)]^{-1} \to 1$$

$$EA\ (\tilde{\gamma}) = [\gamma\psi'(\gamma)]^2\ [H_1(\gamma)]^{-1}[\gamma(\gamma\psi'(\gamma)-1]^{-1}$$

$$\to (2)^{-1}(½)^{-1} = 1$$

$$EA\ (\tilde{\mu}_u) = \frac{N(\gamma)}{D(\gamma)}$$

Dengan menuliskan a dan b dalam γ, $N(\gamma)$ dan $D(\gamma)$ dapat ditulis sebagai

$$N(\gamma) = \gamma^2 \frac{\gamma\psi'(\gamma)}{\gamma(\gamma\psi'(\gamma)-1)} + \frac{m_1^2}{\gamma m_2} + \frac{X_0^2}{\gamma m_2} + \frac{1}{\gamma(\gamma\psi'(\gamma)-1)} - \frac{2X_0 m_1}{\gamma m_2}$$

$$- \frac{2}{\gamma(\gamma\psi'(\gamma)-1)}$$

$$= (1 + \frac{m_1^2}{m_2} + \frac{X_0^2}{m_2} - \frac{2X_0 m_1}{m_2})$$

$$D(\gamma) = \gamma^2\ [(\frac{m_1^2}{m_2} - 1)\psi'(\gamma) + H_1(\gamma) + \frac{X_0^2\psi'(\gamma)}{m_2} + \frac{H_1(\gamma)}{(\gamma\psi'(\gamma))^2}$$

$$- \frac{2X_0 m_1\psi'(\gamma)}{m_2} + \frac{2}{\gamma} - \frac{2H_1(\gamma)}{\gamma\psi'(\gamma)}$$

$$= \gamma(\frac{m_1^2}{m_2} - 1)\gamma\psi'(\gamma) + \frac{X_0^2\gamma\psi'(\gamma)}{m_2} - \frac{2X_0 m_1\gamma\psi'(\gamma)}{m_2} + 2$$

$$+ \frac{1}{\gamma}\ \frac{H_1(\gamma)\ \{\gamma(\gamma\psi'(\gamma)-1)\}}{(\gamma\psi'(\gamma))^2}$$

Maka $EA\ (\tilde{\mu}_u) = \dfrac{N(\gamma)}{D(\gamma)} \to 1$

Tabel 1 menunjukkan harga EA ($\tilde{\xi}$), EA ($\tilde{\beta}$), dan EA ($\tilde{\gamma}$) untuk beberapa harga γ.
Grafik EA ($\tilde{\beta}$) dan EA ($\tilde{\gamma}$) disajikan dalam gambar 1.

Untuk mempelajari EA ($\tilde{\gamma}$) kita misalkan tingkat tegangan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah sedemikian sehingga fungsi distribusi kumulatif sampelnya F_n konvergen ke Beta (δ, ω) pada selang (0; 1). Dengan demikian $m_1^2/m_2 = \delta(\delta+\omega+1)/\omega \equiv p(\delta, \omega)$, dan

$$EA(\tilde{\alpha}) = \frac{\dfrac{\gamma\psi'(\gamma)}{\gamma\psi'(\gamma)-1} + p(\delta,\omega)}{\gamma\left[\left(\dfrac{\psi'(\gamma)}{\psi''(\gamma)}\right)^2\{\psi'''(\gamma)+2(\psi'(\gamma))^2\} - \psi'(\gamma)\right] + \gamma\psi'(\gamma)p}$$

yang tergantung pada δ dan ω melalui fungsi p.

Selanjutnya akan kita pelajari EA ($\tilde{\alpha}$) untuk beberapa pola tertentu dalam memilih harga X. Pertama-tama kita pandang kasus $p(\delta, \omega) \to 0$ yang terjadi misalnya jika ω tetap dan $\delta \to 0$. Dengan demikian

$$EA(\tilde{\alpha}) \to \frac{\dfrac{\gamma\psi'(\gamma)}{[\gamma\psi'(\gamma)-1]}}{\dfrac{\gamma[\psi'(\gamma)]^2\{\psi'''(\gamma)+2[\psi'(\gamma)]^2\}}{[\psi''(\gamma)]} - \gamma\psi'(\gamma)}$$

Dalam hal ini, $m_1 \to 0$ dan $m_2 \to 0$, sehingga harga-harga X terkonsetrasikan pada 0. Untuk $p(\delta, \omega) \to \infty$, yang terjadi misalnya jika δ tetap dan $\omega \to 0$, EA ($\tilde{\alpha}$) konvergen ke $(\gamma\psi'(\gamma))^{-1}$. Di sini $m_1 \to 1$ dan $m_2 \to 0$ dan harga-harga X terkonsentrasikan pada 1.

Kedua, apabila kita ambil $\delta = \omega$, maka distribusi beta simetrik dan $p(\delta, \omega) = 2\delta + 1$. Untuk $\delta = 1$ kita punya distribusi uniform (0; 1); jika $\delta \to \infty$ harga X terkonsentrasikan pada 0,5; dan jika $\delta \to 0$ harga X terbagi dua sama pada 0 dan 1.

Akhirnya, dengan menggunakan Beta (δ, ω) pada selang $(c; c+1)$, $c > 0$ sebagai distribusi limit F_n untuk $c \to \infty$, yaitu kasus dimana semua harga X sangat berjauhan dari titik asal, maka EA $(\tilde{\alpha}) \to (\gamma\psi'(\gamma))^{-1}$.

Dalam tabel 2 disajikan harga (limit) EA ($\tilde{\alpha}$) untuk beberapa harga γ dan berbagai kasus khusus distribusi Beta (δ ; ω). Dari tabel 1 dan tabel 2 dapat kita amati bahwa harga efisiensi asimtotik sangat rendah untuk harga γ yang kecil.

Tabel 1. Harga $EA(\tilde{\xi})$, $EA(\tilde{\beta})$, dan $EA(\tilde{\gamma})$ untuk beberapa harga γ

γ	$EA(\tilde{\xi})$	$EA(\tilde{\beta})$	$EA(\tilde{\gamma})$
.1	.010	.099	.544
.3	.081	.272	.610
.5	.179	.405	.660
.8	.317	.544	.721
1.0	.395	.608	.753
1.5	.538	.713	.812
2.0	.631	.775	.850
2.5	.695	.816	.876
3.0	.741	.844	.895
3.5	.775	.865	.909
4.0	.801	.881	.920
4.5	.822	.893	.928
5.0	.839	.904	.935
5.5	.853	.912	.941
6.0	.865	.919	.946
6.5	.875	.925	.950
7.0	.884	.930	.953

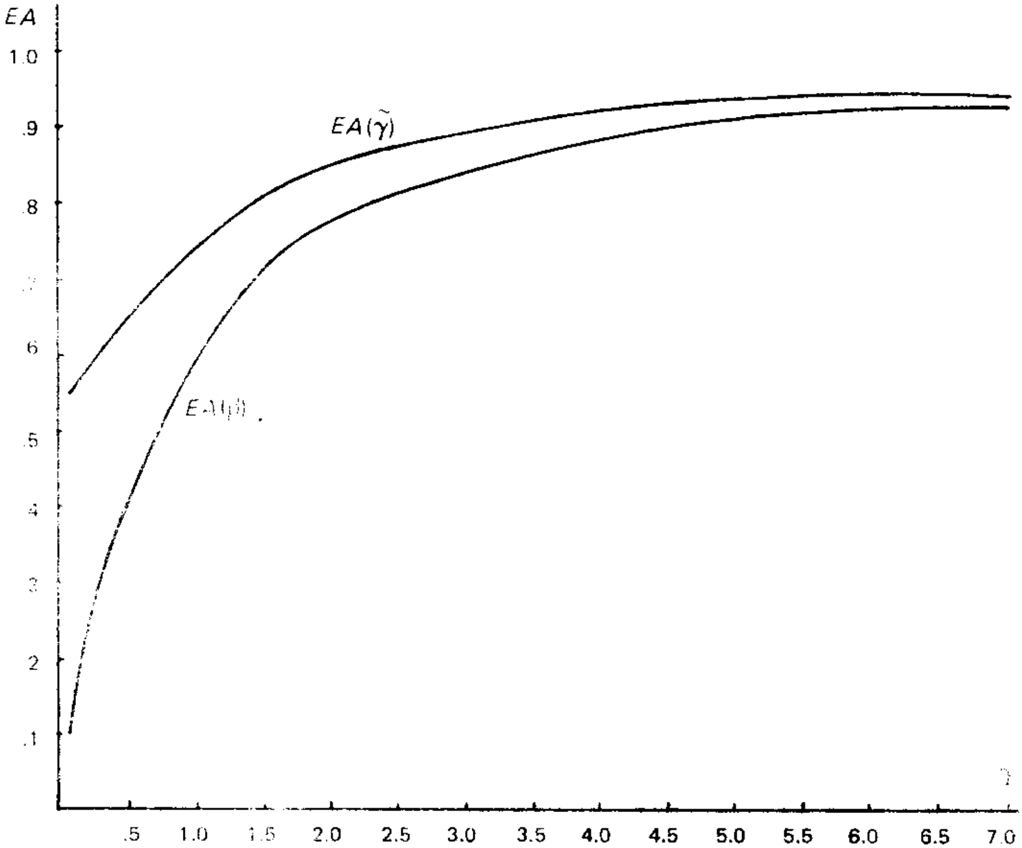
Tabel 2. Harga (limit) $EA(\tilde{\alpha})$ untuk beberapa harga γ dan beberapa kasus khusus distribusi Beta (δ, ω).

γ	I	II	III
.1	.100	.102	.105
.3	.280	.287	.298
.5	.417	.427	.441
.8	.560	.571	.584
1.0	.626	.637	.649
1.5	.735	.745	.754
2.0	.798	.807	.814
2.5	.839	.846	.852
3.0	.867	.873	.878
3.5	.887	.892	.896
4.0	.902	.907	.910
4.5	.914	.918	.920
5.0	.923	.926	.929
5.5	.930	.934	.935
6.0	.937	.939	.941
6.5	.942	.944	.946
7.0	.946	.948	.950

I. $\delta = \omega = 1$

II. $\delta = \omega \to \infty$

III. ω tetap dan $\delta \to 0$



Gambar 1. Grafik $EA(\tilde{\beta})$ dan $EA(\tilde{\gamma})$.

Daftar pustaka

1. Davis, H. T. 1933, *Table of the Higher Mathematical Functions*, The Principia Press, Inc., Bloomington, Indiana.
2. Gupta, S. and P. Groll, 1961, Gamma Distribution in Acceptance Sampling Based on Life Tests, *J. Amer, Stat. Assoc.*, *56*, 943–970.
3. Khan, H. D., 1979, Least Squares Estimation for the Inverge Power Law for Accelerated Life Tests, *Applied Statistics*, *28*, 1, 40–46.
4. Mann, N. R., 1972, Design of Over Stress Life Test Experiments when Failure Times Hare the Two Parameter Weibull Distribution, *Technometrics*, *14*, 2, 437–451.
5. Nelson, W. B., 1970, Statistical Methods for Accelerated Life Test Data – The Inverse Power Model, *General Electric corporate Research and Development TIS Report 71–C–120.*
6. Rao, C. R., 1973, *Linear Statistical Inference and Its Applications*, 2nd ed., John Wiley, N. Y.
7. Zanzawi Soejoeti, 1981, Joint Asymptotic Normality of the Least Squares Estrimotors and the Mean Square Error in the Usual Linear Regression Models, contributed paper presented at the International Mathematical Conference, Singapore, 8–12 June 1981.
8. Zanzawi Soejoeti, 1982, Asymptotic Normality of the MLE for Location-Scale Family with Linear Regression in the Location Parameter, contributed paper accepted to be presented at the 2nd Francosoutheast Asian Mathematical Conference, Quezon City, Philippines, June 1982.