PROCEEDINGS ITB Vol. 10, No. 3, [illegible].

PENSEJAGATAN TEOREM PEMETAAN TERSIRAT[*)]

Shaharir Mohamad Zain[**)]

RINGKASAN

Teorem pemetaan tersirat tempatan yang terkenal itu diperluaskan sebegitu rupa sehingga ianya sah secara sejagat di dalam suatu ruang Banach.

ABSTRACT

The well known local implicit mapping theorem is extended in such a way that it is valid globaly in a Banach space.

0. Prakata

Di masa kebelakangan ini *analisaan sejagat* (berlawanan dengan *analisaan tempatan*) telah menular di kalangan matematikawan dan matematikawati sebegitu rupa sehinggakan telah menjadi hasrat mereka untuk *merumuskan* segala analisaan klasik kepada analisaan sejagat. Umpamanya jejak langkah Morse[1)] yang telah menjadi peneroka dalam mensejagatkan *Kalkulus Ubahan* dalam tahun tigapuluhan itu kemudiannya telah diikuti oleh matematikawan-matematikawan seperti Smale[2)], Palais[3)], dan

---

[*)] Berdasarkan kepada ceramah yang telah diberikan oleh pengarang ini di Kolokium Jabatan Matematika Universiti Kebangsaan Malaysia, Kuala Lumpur, 12 September 1975.

[**)] Ketua Jabatan Matematika, Universiti Kebangsaan Malaysia.

Hermann[4], untuk menyebut segelintir darinya, lalu menghidupkan bidang klasik ini ke tengah-tengah gelanggang penyelidikan. Begitulah juga dengan nasib *geometri bedaan* yang tua itu di mana baru-baru ini Spivak[5] telah mengumpulkan segala *rumusan* sejagat geometri bedaan yang telah dibuat sebelumnya (seperti oleh Ehresmann[6] dan Chern[7]) dan oleh beliau sendiri, telah menampakkan bagaimana bidang ini dapat menampung kehausan penyelidik-penyelidik sekarang. Antara bidang-bidang lain lagi yang mengalami perubahan yang sama menerusi analisaan sejagat ini ialah masalah-masalah dalam *Mekanika*[8], *Kestabilan*[9] dan tidak kurang juga bidang *Kalkulus*[10] sendiri.

Di antara masalah sejagat dalam kalkulus yang masih belum saya lihat penyelesaian selengkapnya ialah masalah mensejagatkan *Teorem Pemetaan Tersirat* sama dalam *ruang Euclidean*, atau *ruang Banach* atau lebih dalamnya atas suatu *lipatbanyak*[11].

Mengikut pendapat saya sesuatu analisaan sejagat itu mestilah mempunyai ciri-ciri berikut:

(0.i) Rumusan itu mestilah *bebas koordinat* atau *secara setaranya* bebas asas. Sebagai contoh yang mudah kita boleh ambil kajian *penjelmaan linear* L : $R^m \to R^n$. Jika kita katakan penjelmaan linear L itu ialah satu matriks (l_{jk}), tersirat di dalamnya ialah penggunaan asas R^m dan R^n. i.i jika $e_j (j = 1, \ldots\ldots, m)$ asas R^m dan $b_k (k = 1, \ldots\ldots, n)$ asas R^n, $Le_j = l_{jk} b_k$. Jadi ini kita katakan kajian atau rumusan tidak sejagat.

(0.ii) Rumusan dan keputusan yang diperolehi itu bukan hanya sah pada sesuatu titik dalam ruang yang tertentu atau di *jiranan* titik itu. Umpamanya ungkapan seperti "jika H benar maka wujudlah satu set terbuka yang mengimplikan T benar" adalah satu *pernyataan tempatan*.

(0.iii) Rumusan itu mestilah mengandungi *olahan-olahan bersahaja* sedapat mungkin. Umpamanya telah diketahui umum bahawa *olahan terbitan* D tidak bersahaja karena ia, misalnya, tidak *memelihara fungsi gubahan* i.i $D(f \circ g) \neq Df \circ Dg$. Jadi sesuatu rumusan sejagat itu mestilah tiada menggunakan olahan ini.

(0.iv) Rumusan itu mestilah sah bukan sahaja hanya setakat di dalam ruang Banach tetapi juga *sah* di atas lipatbanyak.

Adalah menjadi hasrat saya untuk menyelesaikan beberapa persoalan dalam mensejagatkan teorem pemetaan tersirat ini. Tetapi di dalam kertas ini tidaklah mungkin saya mensejagatkan teorem ini demikian sehingga ke empat-empat sifat (0.i) -

[illegible] berbagai-bagai hipotesis teorem [illegible] tengah-tengah orang.

[illegible]

[illegible] suatu teorem pemetaan tersirat [illegible] juga kita melihat ciri-ciri tempatan [illegible] teorem pemetaan tersirat [illegible].

[illegible]

[illegible] saja [illegible] dua corak teorem ini dan memberi [illegible].

[illegible] dalam Ruang Euclidean

Biarkan R^1 dan R^n adalah dua *ruang Euclidean* biasa itu dan $g : A \subset R^m \times R^n \to R^n$ adalah *fungsi boleh-beda secara selanjar*. Katakan $(x_0, y_0) \in A$ di mana $g(x_0, y_0) = 0$ dan *Jacobian* $\left|\frac{\partial g^i}{\partial y^j}\right| \neq 0$ $i, j = 1, \ldots, n$, maka wujudlah $J_\delta(x_0)$ sebuah jiranan x_0 dan $N_\varepsilon(y_0)$ sebuah jiranan y_0 di mana fungsi $F : J_\delta(x_0) \to N_\varepsilon(y_0)$ menyetujui

$$g(x, f(x)) = 0, \quad y = f(x)$$

bagi semua $x \in J_\delta(x_0)$ dan $y \in N_\varepsilon(y_0)$.

Tambahan pula $f \in C^{(1)}[J_\delta(x_0)]$.

Buktinya: (lihat Spivak(12))

Ciri tempatan yang jelas di dalam teorem di atas ialah tentang penggunaan Jacobian. Jacobian itu bersifat tempatan kerana ia tidak lain dari *penentu perwakilan* sebuah penjelmaan linear terhadap *asas piawai*. Malahan, telah diketahui umum bahawa matriks

$$\left[\frac{\partial g^i}{\partial y^j}\right] = \left[Dg^i(x_0, y_0)\right] (e_j)$$

di mana $e_j \in R^n$ yang mempunyai komponen sifar melainkan dikedudukan ke-j dan $Dg^i(x_o,y_o)$ ialah terbitan komponen ke-i bagi fungsi g di (x_o,y_o), yang memang diketahui sebagai

$$Dg^i(x_o,y_o) : R^n \rightarrow R^n$$

suatu pemetaan linear.

Sifat tempatan yang kedua yang terdapat di dalam teorem di atas ialah sudah tentu tentang penggunaan jiranan.

Versi II (dalam ruang Banach)

Katakan E, F, G adalah tiga ruang Banach dan g *sebuah pemetaan boleh-beda secara selanjar* atas *subset terbuka* $A \subset E \times F$ *ke dalam* G. Katakan (x_o,y_o) satu titik dalam A dimana $g(x_o,y_o) = 0$ dan terbitan $D_2g(x_o,y_o)$ *homeomorfisme linear ke seluruh* G. Maka; wujudlah sebuah *jiranan terbuka* $J_\delta(x_o)$ pada x_o sehinggakan akan terdapat sebuah *pemetaan selanjar yang unik* atas $J_\delta(x_o)$ ke dalam F demikian sehingga $\psi(x_o) = y_o$, $(x, \psi(x)) \in A$ dan $g(x, \psi(x)) = 0$ bagi setiap $x \in J_\delta(x_o)$ di mana ψ boleh-beda secara selanjar dalam $J_\delta(x_o)$, dan terbitannya ialah

$$D\,\psi(x) = -(D_2\, g(x, \psi(x)))^{-1} \circ (D_1\, g(x, \psi(x))).$$

Bukti: Lihat Dieudonné[13)], halaman 265 - 267.

Perhatikan bahawa terbitan separa $D_2\, g(x_o,y_o)$ tidak bersifat sejagat kerana ia melibatkan asas. Malahan jika

$$g : A \subset E \times F \rightarrow G \tag{1}$$

maka

$$Dg : A \rightarrow L(E \times F, G) \tag{2}$$

di mana ianya ditakrifkan sebagai

$$\underset{h \rightarrow 0}{\text{had}} \frac{||g(u + h) - g(u) - Dg(h)||}{||h||} = 0 \tag{3}$$

($L(E \times F, G)$ ialah set pemetaan linear dari $E \times F$ ke dalam G). Seterusnya jika $c : I \subset R \to E \times F$ satu lengkungan dalam $E \times F$ maka $Dc(t) \in L(R, E \times F)$. Tetapi $L(R, E \times F)$ isomorfik (secara bersahaja) kepada $E \times F$ dengan menyengutukan $Dc(t)$ dan $Dc(t)$ (1), $1 \in R$. Jika kita tulis

$$Dc(t)\ (1) = \frac{dc}{dt}\ (t) \tag{4}$$

dan oleh sebab

$$g \circ c : I \to G, \tag{5}$$

maka $D(g \circ c)(t) \in L(R, G)$ dan

$$D(g \circ c)(t)(1) = \frac{d(g \circ c)}{dt}\ (t),\ 1 \in R. \tag{6}$$

Tetapi

$$\begin{aligned} D(g \circ c)(1) &= Dg(c(t)) \cdot Dc(t)(1) \\ &= Dg(c(t)) \cdot \frac{dc}{dt}\ (t). \end{aligned} \tag{7}$$

Pilih $c(t) = at + b$, maka (6), (7) dan (8) memberikan

$$\begin{aligned} Dg(c(t))(a) &= \frac{d}{dt}\ (g \circ c)(t) \\ &= \operatorname*{had}_{h \to 0} \frac{(g \circ c)(t + h) - g \circ c(t)}{h} \qquad (9) \\ &= \operatorname*{had}_{h \to 0} \frac{g(a(t + h) + b) - g(a + tb)}{h} \\ &= \operatorname*{had}_{h \to 0} \frac{g(c(t) + ha) - g(c(t))}{h}. \qquad (10) \end{aligned}$$

Dari (10) jelas menunjukkan bahawa jika $a = (0,a_F)$ di mana $a_F \in F$ dan $0 \in E$ maka (tulis $c(t) = u = (u_E,u_F) \in E \times F$)

$$Dg(u)(0,a_F) = \operatorname*{had}_{h \to 0} \frac{g(u_E,u_F + ha_F) - g(u_E,u_F)}{h}$$

$$= D_2\ g(u)(a_F). \tag{11}$$

Jadi dengan menyatakan teorem fungsi tersirat dalam sebutan $D_2\ g(u)$ dengan secara taklangsung telah melibatkan koordinat iaitu satu sifat taksejagat (lihat (0.i)).

Sementara itu telah disebut dahulu bahawa sebarang teorem pémetaan tersirat dalam sebutan terbitan D adalah tidak diingini untuk suatu rumusan sejagat, kerana *pengolah* D tidak bersahaja. Ini jelas dari *"fatwa rantaian"* di mana terbitan pemetaan gubahan tidak memelihara pemetaan gubahan itu, malah

$$D(f \circ g) \neq Df \circ Dg$$

tetapi sebaliknya

$$D(f \circ g)(x) = Df(g(x)) \cdot Dg(x). \tag{12}$$

(D dikatakan bukan *"fungtor kovarian"*).

Pengolah yang bersahaja yang ada sangkut-paut dengan terbitan ialah pengolah tangen T.

Jika X dan Y sebarang ruang Banach dan

$$f : V \subset X \to W \subset Y \tag{13}$$

maka Tf, tangen kepada f, ditakrifkan sebagai

$$Tf\ :\ TV = V \times X \to TW = W \times Y \tag{14}$$

di mana untuk sebarang $(v,x) \in TV$

$$Tf(v,x) = (f(v)\ ,\ Df(v)(x). \tag{15}$$

T memanglah pengolah bersahaja, malah teorem berikut adalah benar.

Teorem 1

Katakan $f : V \subset X \to W \subset Y$ dan $g : W \subset Y \to G \subset Z$, bolehbeda secara selanjar k kali i.i $f,g \in C^{(k)}$. Maka, $g \circ f \in C^{(k)}$ dan

$$T^k(g \circ f) = T^k\ g \circ T^k\ f.$$

Bukti: (dengan *aruhan* cf. rujukan 8) halaman 9).

Untuk k = 1

$$T(g \circ f)(x,y) = ((g \circ f)(x), D(g \circ f)(x)(y))$$
$$= (g(f(x)), Dg(f(x)) \cdot Df(x)(y)).$$

Tetapi

$$(Tg \circ Tf)(x,y) = Tg \circ Tf(x,y)$$
$$= Tg \circ (f(x), Df(x)(y))$$
$$= (g(f(x)), Df(f(x)) \cdot Df(x)(y)).$$

Jadi jelaslah teorem itu benar untuk k = 1.

Katakan ianya benar untuk k = n.

Maka $T^{n+1}(g \circ f) = T(T^n(g \circ f)$

$= T(T^n g \circ T^n f)$, oleh hipotesis

$= T^{n+1} g \circ T^{n+1} f$, sebab teorem benar bagi k = 1.

Q. E. D.

Untuk mendapat teorem pemetaan sejagat di dalam ruang Banach kita memerlukan konsep-konsep berikut.

Takrif 1

Jika X ruang-ruang Banach dan V ialah subset terbuka, maka V x X dikenali sebagai *berkas vektor tempatan* atau *lipatbanyak tempatan*. V dikenali sebagai *ruang tapak*.

Takrif 2

Set V x {0}, $0 \in x$ dikenali sebagai *seksi sifar* bagi V x X, manakala set {v} x X, $v \in V$ dipanggil *serabut atas v* bagi V x X.

Takrif 3

Pemetaan $\pi : V \times X \to V$, di mana $\pi(v,x) = v$ dikenali sebagai *unjuran* V x X. Perhatikan bahawa dengan ini bermakna $\{v\} \times X = \pi^{-1}(v)$.

Teorem fungsi tersirat semisejagat (cf. rujukan 8), halaman 28)

Katakan A, E, F, G dan g adalah seperti yang dinyatakan dalam teorem pemetaan tersirat tempatan itu. Jika $Tg/\pi^{-1}(a)$, $\forall a \in A$, tangen g tersekat kepada serabut atas a bagi $A \times (E \times F)$ adalah pemetaan surjektif dan $Tg/A \times \{0\}$, $0 \in E \times F$ tangen g atas seksi sifar bagi $A \times (E \times F)$ adalah pemetaan sifar, maka semua keputusan dalam teorem pemetaan tersirat tempatan itu adalah sah dalam suatu jiranan di dalam E.

Bukti:

Kita hanya perlu menunjukkan bahawa hipotesis teorem di atas *mengimplikan* hipotesis teorem pemetaan tersirat tempatan.
$Tg/\{$seksi sifar bagi $A \times (E \times F)\}$

= Tg, di mana *banjarannya* ialah $Tg(a, 0)$: $\forall a \in A \subset E \times F$ dan $0 \in E \times F\}$

= Tg, di mana banjarannya ialah $\{(g(a), Df(a)(0))$ $\forall a \in A \subset E \times F$ dan $0 \in E \times F\}$

= Tg, di mana banjarannya ialah $\{(g(a), 0)$ $\forall a \in A \subset E \times F$ dan $0 \in E \times F\}$, sebab $Dg(a)$ pemetaan linear.

Jadi hipotesis $Tg/\{$seksi sifar$\}$ itu pemetaan sifar mengimplikan

$$g(a) = 0, \forall a \in A \subset E \times F.$$

Ini ialah salah satu hipotesis dalam Teorem Fungsi Tempatan.

Sekarang kita lihat pula akan *implian* $Tg/\{$serabut atas a bagi $A \times (E \times F)\}$ itu surjektif.
$Tg/\{$serabut atas a bagi $A \times (E \times F)\}$

= Tg, di mana banjarannya ialah $\{Tg(a,b)$: $b \in E \times F$, dan a tetap$\}$

= Tg, di mana banjarannya ialah $\{(g(a), Dg(a)(b))$ $b \in E \times F$, dan a tetap$\}$.

Oleh sebab $Tg/\{$serabut atas a bagi $A \times (E \times F)\}$ surjektif maka sudah pastilah bagi setiap $c \in G$ wujudlah $b \in E \times F$ di mana

$$Dg(a)(b) = c \qquad (i)$$

i.i $D_1g(a)(b_E) + D_2g(a)(b_F) = c$, $b_E \in E$ dan $B_F \in F$ di mana

$D_i y$ ialah terbitan separa ke-i bagi g (lihat Dieudonné, halaman 167).

Khasnya jika $c = 0$, oleh sebab Dg(a) linear dan injektif maka $b = 0$ bukanlah hanya satu-satunya penyelesaian (i) itu. Ini bermakna b_E dan b_F adalah *vektor-vektor saling bergantung secara linear*. Jadi $D_1 g(a)$ atau $D_2 g(a)$ mestilah salah satunya merupakan homeomorfisme. Ini tidak lain dari hipotesis Teorem Fungsi Tersirat Tempatan.

Q. E. D.

Teorem di atas kita namakan semisejagat kenara ia mengandungi unsur tempatan i.i jiranan dalam seksi sifar $J_\delta(x_o)$ dan tidak meliputi lipatbanyak. Di dalam kasus-kasus amali, kita akan lebih senang jika kita tidak perlu merujukkan kesahan Teorem Fungsi Tersirat di dalam jiranan $J_\delta(x_o)$ ini kerana ia bukan sahaja sukar mengetahui nilai δ itu[14], tetapi amat tidak menyenangkan malah kalau kita perhatikan fungsi

$$g : R^2 \to R$$

di mana

$$g(x;y) = x^2 y^2 - 1$$

maka kita akan dapati Teorem Fungsi Tersirat di atas tidak begitu berguna, kerana di samping kewujudan ψ kita juga boleh mendapatkan satu lagi fungsi tersirat ϕ di dalam $g(x,y) = 0$ yang sifatnya amat tidak diingini. Malah kita boleh ambil

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{Jika } x \in \{\text{nombor nisbah bukan sifar}\} \\ -\frac{1}{x}, & \text{jika } x \in \{\text{nombor taknisbah}\}. \end{cases}$$

Fungsi ini tentu sekali tidak boleh-beda! Contoh ini mengajar kita bahawa untuk mendapat satu Teorem Fungsi Tersirat yang lebih amali kita memerlukan hipotesis tambahan.

Teorem Fungsi Tersirat Sejagat di dalam ruang Banach

Jika hipotesis-hipotesis di dalam Teorem Fungsi Tersirat Semisejagat itu benar dan di samping itu jika g tersekat pada serabut atas $a_E \varepsilon E$ bagi $A \subset E \times F$ adalah injektif bagi semua a_E, maka sifat-sifat sebarang fungsi tersirat ψ itu sah di seluruh kawasan $\pi_1(A)$, di mana π_1 ialah unjuran A ke seluruh komponen pertamanya.

Bukti:

Katakan $\psi_{x_i} : J_{\delta_i}(x_i) \subset \pi_1(A) \to \pi_2(A)$ ialah fungsi tersirat seperti yang terdapat di dalam Teorem Fungsi Tersirat Semisejagat (atau tempatan itu), untuk suatu $x_i \varepsilon \pi_1(A)$ dan $i \varepsilon I$ (suatu set indeks). Takrifkan

$$\psi : \pi_1(A) \to \pi_2(A)$$

di mana

$$\psi(x) = \psi_{x_i}(x) \quad , \forall\, x \varepsilon J_{\delta_i}(x_i)$$

Menurut hipotesis, $\forall\, x \varepsilon J_{\delta_i}(x_i) \quad J_{\delta_j}(x_j)$

$$g(x, \psi_{x_i}(x) = g(x, \psi_{x_j}(x)) = 0$$

$$\Rightarrow \psi_{x_i}(x) = \psi_{x_j}(x).$$

Jadi $\psi_{x_i} = \psi_{x_j}$ bagi semua i dan j, di mana sahaja di *persilangan daerah* ψ_{x_i} dengan daerah ψ_{x_j}. Oleh itu ψ *tertakrif rapi* dan unik, di mana sahaja di dalam $\bigcup_{i \varepsilon I} J_{\delta_i}(x_i) = \pi_1(A)$, asalkan sahaja setiap $J_{\delta_i}(x_i)$ *bersilang dengan* $J_{\delta_j}(x_j)$.

Sekarang katakan wujud Fungsi Tersirat ψ yang diberikan oleh

$$\psi(x) = \phi_i(x) \quad , \forall\, x \varepsilon D_{\phi_i} \subseteq J_{\delta_i}(x_i)$$

di mana

$$D_{\phi_i} \cap D_{\phi_j} = 0 \text{ di mana } 0 \text{ ialah } \textit{set nul}.$$

Tetapi setiap fungsi ϕ_i ini boleh *diperpanjangkan* kepada $\bar{\phi}_i$ supaya $\bar{\phi}_i = \psi_{x_i}$ di atas, dan oleh itu $\bar{\phi}_i = \bar{\phi}_j$ di atas $D_{\bar{\phi}_j} \cap D_{\bar{\phi}_j} \neq 0$.

Jadi setiap ϕ_i adalah keratan dari satu Fungsi Tersirat unik ψ di dalam $\pi_1(A)$.

Q. E. D.

Rujukan

1) M. Morse, *The Calculus of Variations in the Large*. Amer. Math. Soc. Colloq. publ. vol. 18, Amer. Math. Soc., providence, R.I., 1934.

2) S. Smale, *Differential Analysis*, Bombay Colloq. 1964, pp 187 - 189, Oxford Uni. press, London, 1964.

- Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964), 165 - 172.

3) R. Palais, Topology 2 (1963), 299 - 340.

- Bull. Amer. Math. Soc. 75 (1969), 968 - 971.

4) R. Hermann, *Differential Geometry and the Calculus of variations*, Academic press, 1968.

5) M. Spivak, *Differential Geometry*, Vol. 1 and 2, publish perish 1970.

6) C. Ehresmann, Colloque de Topologie, Bruxelles (1950), 29-55.

7) S.S. Chern, Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946), 1 - 30.

8) R. Abraham and J.E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, W.A. Benjamin, 1967.

9) S. Smale, *Lectures on Modern Analysis and Applications 1*, pp 150 - 158, Springer Berlin, 1969.

10) M. Spivak, *Calculus on Mani-folds*, W.A. Benjamin, 1965.

11) Penyelesaian separanya telah dibuat oleh Abraham dan Marsden, *loc. cit.*, halaman 27 - 28 dan Hermann, *loc. cit.*, halaman 28 - 33.

12) loc. cit., halaman 41.

13) J. Diendonné, *Foundations of Modern Analysis*, p. 265 - 267., Academic press 1960.

14) G. Hadley, *Nonlinear and Dynamic programming*, p. 49, J. Wiley 1964.