PROCEEDINGS ITB Vol. 6, No. 3, 1972.

MATRIKS FUNDAMENTAL II

Achmad Arifin*)

R I N G K A S A N

Suatu matriks kwadratis kita katakan fundamental djika ia simetris dan setiap submatriks utamanja mempunjai determinan jang positif.

Misalkan f suatu bentuk bilinier pada suatu ruang vektor berdimensi hingga atas lapangan riil, dan f berkorespondensi dengan suatu matriks G. Kita buktikan, bahwa f suatu hasilkali-dalam djika dan hanja djika G fundamental.

A B S T R A C T

We define a square matrix to be fundamental if it is symmetric and all its principal submatrices have positive determinants.

Let f be a bilinear form on finite-dimensional vector space over the real field which corresponds to a matrix G. We prove that f is an inner-product if and only if G is fundamental.

1. Pendahuluan.

Dalam tulisan ini R menjatakan lapangan bilangan riil. Ruang vektor atas R senantiasa kita misalkan berdimensi hingga, dan kita njatakan dengan V. Vektor dalam V kita njatakan dengan $\bar{a}$, $\bar{b}$, ..., $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, dan koordinatnja terhadap suatu basis kita tuliskan sebagai matriks kolom.

Misalkan V berdimensi n, dan G adalah suatu matriks n x n; dan misalkan X dan Y ber-turut2 koordinat vektor2 $\bar{x}$ dan $\bar{y}$ dalam V terhadap suatu basis dari V. Kita akan menurunkan suatu sjarat dan tjukup bilamana X'GY membentuk suatu hasilkali-dalam pada V.

Dalam paragraf 2 kita bitjarakan bentuk bilinier, jaitu suatu transformasi f: V x V $\longrightarrow$ R jang bersifat bilinier. Hasilkali-dalam pada V kita pandang sebagai bentuk bilinier jang simetris dan positif. Semua sifat dan dalil jang kita turunkan dalam paragraf ini dapat kita temui dalam [2], [4], dan [5] . Terutama Dalil 2.13 dapat kita temui dalam [5], halaman 170, Theorem 6.6G.

---

*) Bagian Matematika Institut Teknologi Bandung.

Dalam paragraf 3 kita berikan definisi matriks fundamental tingkat n. Definisi ini adalah perluasan dari definisi matriks fundamental tingkat 3 (lihat: [3]) jang determinannja berharga positif. Dalil 3.3 adalah Dalil 2.13 jang kita tuliskan kembali dengan menggunakan definisi tersebut.

Maksud dari tulisan ini adalah sebagai koreksi dari tulisan mengenai matriks fundamental dalam [3], Bab V, paragraf 5.12.

2. Bentuk bilinier.

Diketahui suatu ruang vektor V jang berdimensi hingga, atas bilangan riil R.

Definisi 2.1. Bentuk bilinier f pada V adalah transformasi

$$f: V \times V \longrightarrow R$$

jang bersifat:

(1) $f(a_1\bar{x}_1 + a_2\bar{x}_2, \bar{y}) = a_1 f(\bar{x}_1, \bar{y}) + a_2 f(\bar{x}_2, \bar{y})$, untuk setiap bilangan a_1 dan a_2 dalam R, dan setiap vektor $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, dan $\bar{y}$ dalam V.

(2) $f(\bar{x}, b_1\bar{y}_1 + b_2\bar{y}_2) = b_1 f(\bar{x}, \bar{y}_1) + b_2 f(\bar{x}, \bar{y}_2)$, untuk setiap bilangan b_1 dan b_2 dalam R, dan setiap vektor $\bar{x}$, $\bar{y}_1$, dan $\bar{y}_2$ dalam V.

Misalkan $A = \{ \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n \}$ suatu basis dari V, dan f suatu bentuk bilinier pada V. Bentuk suatu matriks n x n

$$G = \| g_{ij} \| ,$$

dimana $g_{ij} = f(\bar{a}_i, \bar{a}_j)$. Setiap vektor $\bar{x}$ dan $\bar{y}$ dalam V, dengan koordinat terhadap A ber-turut2 adalah X dan Y, memenuhi hubungan

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = X'GY$$

dimana X' menjatakan transpose dari matriks X. Kita katakan, bahwa terhadap basis A, bentuk bilinier f berkorespondensi dengan matriks G.

Sebaliknja, djika diketahui suatu matriks n x n, misalnja $G = \| g_{ij} \|$, maka terhadap basis $A = \{ \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n \}$, suatu transformasi $f: V \times V \longrightarrow R$ jang didefinisikan oleh $f(\bar{x}, \bar{y}) = X'GY$, untuk setiap vektor2 $\bar{x}$ dan $\bar{y}$ dalam V, membentuk suatu bentuk bilinier pada V. Selandjutnja, $g_{ij} = f(\bar{a}_i, \bar{a}_j)$. Djadi kita mempunjai sifat berikut.

Sifat 2.2. *Diketahui* V *suatu ruang vektor berdimensi* n. *Maka, terhadap suatu basis dari* V *setiap bentuk bilinier pada* V *berkorespondensi dengan satu dan hanja satu matriks* n x n.

Sifat 2.3. *Diketahui* V *suatu ruang vektor, dan* f *suatu bentuk bilinier pada* V. *Misalkan, terhadap dua basis dari* V, *bentuk bilinier* f *berkorespondensi dengan matriks2* G *dan* H. *Maka terdapat suatu matriks non-singulir* P *sehingga* H = P'GP.

<u>Bukti</u>: Misalkan $A = \{\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n\}$ dan $B = \{\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_n\}$ adalah basis2 dari V, dan

$$\bar{b}_j = \Sigma_{i=1}^{n} p_{ij}\bar{a}_i \text{ untuk } j = 1, \ldots, n.$$

Tulis

$$P = \| p_{ij} \| .$$

Maka P adalah matriks $n \times n$ jang non-singulir. Ambil $\bar{x}$ dan $\bar{y}$ vektor2 dalam V; koordinatnja terhadap A ber-turut2 adalah X_A dan Y_A, dan terhadap basis B ber-turut2 adalah X_B dan Y_B. Maka kita punjai

$$X_A = PX_B \text{ dan } Y_A = PY_B,$$

dan

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = X_A'GY_A = (PX_B)'G(PY_B) =$$
$$= X_B'\ (P'GP)Y_B$$
$$= X_B'\ H\ Y_B.$$

Djadi $H = P'GP$.

Definisi 2.4. Bentuk bilinier f pada ruang vektor V kita katakan <u>simetris</u> djika untuk setiap vektor $\bar{x}$ dan $\bar{y}$ dalam V dipenuhi

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = f(\bar{y}, \bar{x}) .$$

Sifat 2.5. *Diketahui V suatu ruang vektor, dan f suatu bentuk bilinier pada V. Misalkan, terhadap suatu basis dari V, bentuk bilinier f berkorespondensi dengan matriks G. Maka f simetris djika dan hanja djika G simetris.*

<u>Bukti</u>: Misalkan $A = \{\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n\}$ suatu basis dari V, dan

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = X'GY.$$

Djadi

$$G = \| g_{ij} \| ,$$

dimana

$$g_{ij} = f(\bar{a}_i, \bar{a}_j).$$

Misalkan f simetris. Maka

$$g_{ij} = f(\bar{a}_i, \bar{a}_j) = f(\bar{a}_j, \bar{a}_i) = g_{ji}.$$

Djadi G suatu matriks simetris. Sebaliknja, misalkan G simetris. Maka untuk setiap vektor $\bar{x}$ dan $\bar{y}$ dipenuhi

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = X'GY = (X'GY)' = Y'G'X = Y'GX = f(\bar{y}, \bar{x}).$$

Djadi f simetris.

Misalkan f suatu bentuk bilinier simetris pada suatu ruang vektor V; dan $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ suatu basis dari V.

Definisi 2.6. Basis $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ kita katakan <u>ortogonal</u> terhadap bentuk bilinier simetris f djika untuk setiap $i \neq j$ dipenuhi $f(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = 0$.

Sifat 2.7. *Diketahui* V *suatu ruang vektor dengan* dim (V) $\geq$ 1, *dan* f *suatu bentuk bilinier simetris pada* V. *Maka* V *mempunjai basis ortogonal terhadap* f.

<u>Bukti</u>: Tulis

$$K = \{ \bar{x} \in V \mid f(\bar{x}, \bar{y}) = 0, \text{ untuk semua } \bar{y} \in V \}.$$

Kita akan membuktikan dalam dua bagian.

(1) Misalkan K = { 0 } (dalam hal ini kita katakan bahwa f <u>non - degenerate</u>). Kita membuktikan dengan induksi lengkap. Kalau dim (V) = 1, maka djelas bahwa setiap vektor jang tak-nol dalam V membentuk basis jang ortogonal terhadap f. Sekarang misalkan dim (V) = n > 1. Karena K = { 0 } , kita dapat memilih vektor $\bar{e}_i$ dalam V sehingga $f(\bar{e}_1, \bar{e}_1) \neq 0$.

Bentuk ruang bagian

$$W = R\bar{e}_i$$

dan

$$W' = \{ \bar{x} \in V \mid f(\bar{x}, \bar{e}_i) = 0 \}$$

Kita akan menundjukkan bahwa $V = W \oplus W'$. Ambil $\bar{z}$ dalam V. Tulis

$$a = f(\bar{z}, \bar{e}_1)/f(\bar{e}_1, \bar{e}_1),$$

dan

$$x = a\bar{e}_1, \text{ dan } \bar{y} = \bar{z} - \bar{x}.$$

Maka $\bar{z} = \bar{x} + \bar{y}$, dimana $\bar{x}$ dan $\bar{y}$ ber-turut2 adalah vektor2 dalam W dan W'. Djadi

$$V = W + W'$$

Selandjutnja, ambil $\bar{x}$ vektor dalam $W \cap W'$. Maka $\bar{x} = b\bar{e}_1$, dan

$$f(\bar{x}, \bar{x}) = f(be_1, b\bar{e}_1) = b^2 f(\bar{e}_1, \bar{e}_1) = 0.$$

Kita peroleh b = 0, atau $\bar{x}$ = 0. Djadi

$$V = W \oplus W'$$

Kita punjai bahwa dim(W') = n - 1, dan f/W' (jaitu f dibatasi pada W') non-degenarate. Menurut hypothese induksi lengkap W' mempunjai basis ortogonal terhadap f, misalnja $\{ \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n \}$.

Djadi $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n\}$ adalah basis dari V jang ortogonal terhadap f.

(2) Misalkan K $\neq$ { 0 } (dalam hal ini kita katakan bahwa f <u>degenerate</u>). Tulis

$$V = K \oplus V',$$

dimana V suatu ruang bagian dari V. Misalkan $\{ \bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_r \}$ suatu basis dari K. Bentuk bilinier f/V' non-degenerate. Menurut (1), V' mempunjai basis ortogonal terhadap f, misalnja $\{ \bar{e}_{r+1}, \ldots, \bar{e}_n \}$. Maka $\{ \bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_r, \bar{e}_{r+1}, \ldots, \bar{e}_n \}$ membentuk suatu basis dari V jang ortogonal terhadap f.

Definisi 2.8. Bentuk bilinier f pada V kita katakan <u>positif</u> djika untuk setiap vektor $\bar{x}$ jang tak-nol dalam V dipenuhi $f(\bar{x}, \bar{x}) > 0$.

Sifat 2.9. *Diketahui* V *suatu ruang vektor, dan* f *suatu bentuk bilinier simetris pada* V. *Misalkan terhadap suatu basis dari* V, *bentuk bilinier* f *berkorespondensi dengan matriks* G. *Maka* f *positif djika dan hanja djika terdapat suatu matriks non-singulir* P *sehingga* G = P'P.

Bukti: Misalkan $A = \{ \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n \}$ suatu basis dari V, dan terhadap basis itu

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = X_A{}'GY_A,$$

untuk setiap vektor $\bar{x}$ dan $\bar{y}$ dalam V. Karena f simetris, menurut Sifat 2.7, V mempunjai suatu basis ortogonal, misalnja $\{ \bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_n \}$.

Misalkan f positif. Maka $f(\bar{b}_i, \bar{b}_i) > 0$ untuk $i = 1, \ldots, n$. Bentuk basis $E = \{ \bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n \}$ dimana

$$\bar{e}_i = \bar{b}_i / \{ f(\bar{b}_i, \bar{b}_i) \}^{\frac{1}{2}}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Maka E adalah basis ortogonal dengan $f(\bar{e}_i, \bar{e}_i) = 1$ untuk semua $i = 1, \ldots, n$. (Basis E kita katakan ortonormal).

Selandjutnja, misalkan

$$\bar{a}_j = \Sigma_{i=1}^{n} p_{ij} \bar{e}_i, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Bentuk matriks n x n

$$P = \| p_{ij} \| .$$

Maka P adalah suatu matriks non-singulir; dan kita punjai

$$\begin{aligned} f(\bar{x}, \bar{y}) &= X_E{}'Y_E = (PX_A)'(PY_A) \\ &= X_A(P'P)Y_A \\ &= X_A{}'GY_A. \end{aligned}$$

Djadi G = P'P.

Sebaliknja misalkan G = P'P untuk suatu matriks non-singulir P. Tulis $Q = P^{-1}$. Maka $Q'GQ = I_n$, dimana I_n adalah matriks kesatuan tingkat n. Pilih basis $D = \{ \bar{d}_1, \ldots, \bar{d}_n \}$; koordinat $\bar{d}_j$ terhadap basis A adalah kolom ke-j dari matriks Q. Maka koordinat setiap vektor $\bar{x}$ dalam V memenuhi hubungan

$$X_A = QX_D ;$$

dan untuk setiap vektor $\bar{x}$ dan $\bar{y}$ dalam V kita punjai

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = X_D{}' Y_D.$$

Djadi $f(\bar{x}, \bar{y}) = X_D{}'X_D > 0$ untuk semua vektor $\bar{x}$ jang tak-nol dalam V. Menurut Definisi 2.8, f positif.

Akibat 2.10. *Misalkan* f *suatu bentuk bilinier jang simetris dan positif pada* V, *dan terhadap suatu basis dari* V *bentuk bilinier* f *berkorespondensi dengan matriks* G. *Maka* det(G) > 0.

Definisi 2.11. Suatu submatriks H dari suatu matriks kwadratis G kita katakan utama djika H kwadratis, dan komponen diagonal dari H adalah komponen diagonal dari G.

Sebelum kita berikan dalil jang berhubungan dengan **submatriks** **utama**, lebih dahulu kita berikan lemma berikut.

Lemma 2.12. *Diketahui* f *suatu bentuk bilinier jang simetris dan non-degenerate pada* V. *Maka ada satu dan hanja satu bilangan bulat* $r \geq 0$, *sehingga setiap basis* $\{ \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n \}$ *dari* V *jang ortogonal terhadap* f *mengandung* r *vektor* $\bar{a}_i$ *jang memenuhi* $f(\bar{a}_i, \bar{a}_i) > 0$ *dan* $n - r$ *vektor* $\bar{a}_j$ *jang memenuhi* $f(\bar{a}_j, \bar{a}_j) < 0$.

Bukti: Misalkan $a_i = f(\bar{a}_i, \bar{a}_i)$ untuk $i = 1, \ldots, n$. Maka $a_i \neq 0$. Djelas bahwa ada bilangan bulat $r \geq 0$; dan dapat kita misalkan $a_i > 0$ untuk $i \leq r$ dan $a_i < 0$ untuk $i > r$.

Misalkan $\{ \bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_n \}$ suatu basis ortogonal, dan memenuhi $f(\bar{b}_i, \bar{b}_i) = b_i > 0$ untuk $i \leq s$ dan $f(\bar{b}_i, \bar{b}_i) = b_i < 0$ untuk $i > s$. Kita akan menundjukkan bahwa $r = s$. Pandang kumpulan

$$\{ \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_r, \bar{b}_{s+1}, \ldots, \bar{b}_n \},$$

dan hubungan

$$x_1\bar{a}_1 + \ldots + x_r\bar{a}_r + y_1\bar{b}_{s+1} + \ldots + y_{n-s}\bar{b}_n = 0$$

Kita punjai

$$x_1\bar{a}_1 + \ldots + x_r\bar{a}_r = - y_1\bar{b}_{s+1} + \ldots + -y_{n-s}\bar{b}_n;$$

dan kita peroleh

$$f(x_1\bar{a}_1 + \ldots + x_r\bar{a}_r, x_1\bar{a}_1, + \ldots + x_r\bar{a}_r) =$$
$$f(- y_1\bar{b}_{s+1} + \ldots + - y_{n-s}\bar{b}_n, - y_1\bar{b}_s + \ldots - y_{n-s}\bar{b}_n),$$

atau

$$x_1{}^2a_1 + \ldots + x_r{}^2a_r = y_1{}^2b_s + \ldots + y_{n-s}{}^2b_n.$$

Dalam kesamaan jang terachir ruas kiri berharga positif, sedangkan ruas kanan berharga negatif. Hal ini berakibat bahwa

$$x_1 = \ldots = x_r = y_1 = \ldots = y_{n-s} = 0.$$

Djadi $\{ \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_r, \bar{b}_{s+1}, \ldots, \bar{b}_n \}$ bebas linier. Oleh karenanja $r + n - s \leq n$, atau $r \leq s$. Dengan tjara jang sedjalan kita peroleh $s \leq r$. Djadi $r = s$.

Untuk selandjutnja kita tulis $p(f) = r$. Djadi kalau f suatu bentuk bilinier simetris pada suatu ruang vektor V, maka f positif djika dan hanja djika $p(f) = \dim(V)$.

Untuk suatu matriks kwadratis G, submatriks utama jang didapat dari G dengan menghapuskan semua baris dan kolom ketjuali baris dan kolom ke $i_1, \ldots, i_k$ $(i_1 < i_2 \ldots < i_k)$ kita njatakan dengan

$$G [i_1, \ldots, i_k \mid i_1, \ldots, i_k].$$

Sekarang kita buktikan dalil berikut.

Dalil 2.13. *Diketahui* V *suatu ruang vektor, dan* f *suatu bentuk bilinier simetris pada* V. *Misalkan terhadap suatu basis dari* V *bentuk bilinier* f *berkorespondensi dengan matriks* G. *Maka sifat2 berikut ekivalen:*

(1) *Determinan setiap submatriks utama dari* G *berharga positif.*
(2) *Untuk setiap bilangan* s, $1 \leq s \leq \dim V$ *dipenuhi*

$\det (G [1, \ldots, s \mid 1, \ldots, s]) > 0$.

(3) f *positif.*

Bukti: (1) $\longrightarrow$ (2). Hal ini djelas.

(2) $\Longrightarrow$ (3). Kita membuktikan dengan induksi lengkap. Misalkan $A = \{ \bar{a}_1, \ldots \bar{a}_n \}$ suatu basis dari V, sehingga untuk setiap vektor $\bar{x}$ dan $\bar{y}$ dalam V, dengan koordinat terhadap A ber-turut2 X dan Y, berlaku

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = X'GY.$$

Njatakan ruang bagian jang dibangun oleh $A_s = \{ \bar{a}_1, \ldots \bar{a}_s \}$ dengan W_s. Bentuk bilinier f/W_s terhadap basis A_s berkorespondensi dengan

$$G_s = G [1, \ldots, s \mid 1, \ldots, s] .$$

Untuk $S = 1$, karena $\det(G_1) = f(\bar{a}_1, \bar{a}_1) > 0$ djelas bahwa f/W_1 positif.

Misalkan untuk $s < n$ bentuk bilinier f/W_s positif. Akan kita buktikan bahwa f/W_{s+1} djuga positif.

Bentuk bilinier f/W_{s+1} simetris, dan $\dim(W_{s+1}) \geq 1$. Menurut Sifat 2.7, W_{s+1} mempunjai basis ortogonal terhadap f, misalnja

$$\{ \bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_{s+1} \} .$$

Tulis

$$h_i = f(\bar{b}_i, \bar{b}_i) \text{ untuk } i = 1, \ldots, s + 1.$$

Menurut Sifat 2.3, terdapat suatu matriks kwadratis P tingkat s + 1 jang non-singulir, sehingga

$$P'G_{s+1}P = \| h_i \, \delta_{ij} \| ,$$

dimana δ_{ij} adalah simbol Kronecker. Menurut Hyphothese $\det(G_{s+1}) > 0$, sehingga kita peroleh hubungan berikut:

$$0 < \det(G_{s+1}) \, (\det(P))^2 = \det(P'G_{s+1}P) = \Pi_{i=1}^{s+1} h_i .$$

Djadi $h_i \neq 0$ untuk semua $i = 1, \ldots, s+1$. Ini berarti bahwa f/W_{s+1} non-degenerate. Pula karena setiap basis ortogonal (terhadap f) dari W_s senantiasa terkandung dalam suatu basis ortogonal (terhadap f) dari W_{s+1}, menurut Lemma 2.12 kita punjai:

$$p(f/W_{s+1}) \geq p(f/W_s) = s.$$

Kesamaan jang terachir dalam hubungan ini adalah menurut hypothese induksi lengkap.

Andaikan $p(f/W_{s+1}) = s$. Maka ada suatu h_i jang berharga negatif. Ini berakibat

$$\Pi_{i=1}^{s+1} h_i < 0.$$

Hal ini bertentangan dengan jang kita punjai diatas bahwa hasilkali tersebut berharga positif. Djadi $p(f/W_{s+1}) > s$. Kita peroleh

$$p(f/W_{s+1}) = s + 1,$$

dan ini berarti bahwa f/W_{s+1} positif.

(3) $\Longrightarrow$ (1). Seperti diatas, misalkan $A = \{ \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n \}$ suatu basis dari V, sehingga $f(\bar{x}, \bar{y}) = X'GY$ untuk setiap vektor $\bar{x}$ dan $\bar{y}$ dalam V. Pandang submatriks utama

$$G\,[i_1, \ldots, i_k \mid i_1, \ldots, i_k]\ .$$

Njatakan ruang bagian jang dibangun oleh $\{\bar{a}_{i_1}, \ldots, \bar{a}_{i_k}\}$ dengan W. Maka f/W suatu bentuk bilinier jang simetris dan positif, dan terhadap basis $\{\bar{a}_{i_1}, \ldots, \bar{a}_{i_k}\}$ berkorespondensi dengan matriks

$$G\,[\, i_1, \ldots, i_k \mid i_1, \ldots, i_k \,]\ .$$

Menurut Akibat 2.10.

$$\det\,(\, G\,[\, i_1, \ldots, i_k \mid i_1, \ldots, i_k \,]\,) > 0\ .$$

3. Matriks fundamental.

Lebih dahulu kita berikan dua definisi.

Definisi 3.1. Bentuk bilinier, pada suatu ruang vektor V, jang bersifat simetris dan positif kita namakan hasilkali dalam.

Definisi 3.2. Suatu matriks kwadratis G kita katakan fundamental, djika:

(1) G simetris, dan
(2) Determinan setiap submatriks utama dari G berharga positif.

Dengan kedua definisi diatas Dalil 2.13 dapat kita tuliskan kembali sebagai dalil berikut.

Dalil 3.3. *Diketahui* f *suatu bentuk bilinier pada suatu ruang vektor* V. *Misalkan terhadap suatu basis dari* V *bentuk bilinier* f *berkorespondensi dengan matriks* G. *Maka* f *suatu hasilkali-dalam djika dan hanja djika* G *fundamental.*

Kepustakaan

1. Arifin,A., Matriks Fundamental, Bagian Matematika,I.T.B., (Desember 1970).

2. Birkhoff,G., and Maclane,S., A Survey of Modern Algebra, revised ed., The MacMillan Company, New York, N.Y., 1960.

3. Kromodihardjo,K., Diktat Aldjabar Linier, Bagian Matematika, I.T.B. 1968.

4. Lang,S., Algebra, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1965.

5. Thrall,R.M., and Tornheim,L., Vector Spaces and Matrices, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1962.

(Diterima 1 Djuni 1971).