

# WIDERSTANDSTRANSFORMATIONEN MIT GEKOPPELTEN ZWEIKREISIGEN SCHALTUNGEN BEI BELIEBIGER BANDBREITE

VON

ISKANDAR ALISJAHBANA \*)

## RINGKASAN :

Dibidang frekwensi gelombang pendek, yaitu kira-kira antara 1 MHz sampai 30 MHz, penyesuaian<sup>2</sup> tahanan biasanya dilakukan dengan transformator<sup>2</sup>-saluran atau rangkaian<sup>2</sup> transformasi yang terjadi dari kapasitet<sup>2</sup> dan induktivitet<sup>2</sup> tanpa batasan tenaga. Beberapa percobaan untuk melakukan penyesuaian tahanan dengan tjara yang sering dipakai di-bidang-frekwensi suara, yaitu dengan dua kumparan yang bergandengan, memberikan hasil yang memuaskan.

Publikasi ini memuat hasil<sup>2</sup> perhitungan yang merupakan dasar-teori dari percobaan yang diatas, dan membahas diri pada bidang-frekwensi, dimana transformator masih bersifat kuasi-stationer.

Perhitungan yang banjak persamaannya dengan perhitungan dipublikasi ini, telah dilakukan oleh Feldtkeller, tetapi hanya untuk bidang-frekwensi relatif yang sempit ( $\Delta f/f_m < 10\%$ ).

Untuk bidang-frekwensi yang lebar, Meinke mengusulkan tjara perhitungan grafis yang berdasarkan perhitungan Feldtkeller. Kesalahan<sup>2</sup> yang dibuat karena pengabaian<sup>2</sup>, yang sebetulnya tak dapat lagi dilakukan pada bidang-frekwensi yang lebar, diperbaiki setjara bertahap.

Tjara perhitungan tanpa pengabaian<sup>2</sup>, untuk lebar bidang-frekwensi sembarang, haruslah memakai fungsi Tscheybscheff dalam bentuk petjahan. Berlainan dengan Cauer, fungsi petjahan Tscheybscheff yang dipergunakan dalam publikasi ini adalah dalam bentuk aslinja.

## I. EINLEITUNG.

Transformatoren, die aus gekoppelten Induktivitäten bestehen, werden zur breitbandigen Widerstandstransformation bei niedriger Frequenz gerne benutzt. Bei diesen niedrigen Frequenzen bekommt man feste Kopplung durch die Anwendung von Eisenkernen und durch gedrängten Aufbau der Wicklungen. Beides ist bei hohen Frequenzen mit grossen Schwierigkeiten verbunden. Deswegen werden auch vorzugsweise bei hohen Frequenzen Leitungstransformatoren benutzt.

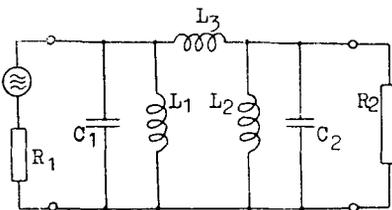


Bild 1

Das quasistationäre Ersatzschaltbild eines aus gekoppelten Induktivitäten bestehenden Transformators, kann als erste Näherung, wie in Bild 1 aufgezeichnet, aussehen, wo eine der Parallelinduktivitäten  $L_1$  oder  $L_2$  einen negativen Wert annehmen kann. Die Kapazitäten  $C_1$  und  $C_2$  stellen die Eingangs- und Ausgangskapazität dar, die zum Teil durch die Spulen-eigenkapazität zustande kommen.

Ähnliche Schaltungen sind bisher exakt berechnet worden für schmale relative Bandbreite  $\left(\frac{\Delta f}{f_m} < 10\% \right)$  für den Fall eines zweikreisigen Bandfilters [2.a] [2.b].

Für zweikreisige Bandfilter mit grosser Bandbreite ist ein grafisches Dimensionierungsverfahren veröffentlicht worden [3.c]. Dieses grafische Verfahren beruht auch auf Vernachlässigungen, die bei schmaler Bandbreite zugelassen sind. Für grössere Bandbreite werden die vernachlässigten Faktoren sukzessiv grafisch berücksichtigt, damit ein genaueres Ergebnis zustande kommt.

Das exakte analytische Rechenverfahren für eine gekoppelte zweikreisige Schaltung mit beliebiger Bandbreite benutzt die gebrochene Tschebyscheffsche Funktion, woraus der Hauptteil dieser Arbeit besteht. Im Gegensatz zu Cauer wird die gebrochene Tschebyscheffsche Funktion in ihrer Originalform benutzt.

## II. ALGEMEINES ÜBER VIERPOLTHEORIE

### II. 1 Betriebsübertragungsfaktor bei reinem ohmschen Abschlusswiderstand

Ein Vierpol wird in der Betriebsparameter-Theorie gekennzeichnet durch seine Kettenmatrix

$$K = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Der Betriebsübertragungsfaktor wird definiert durch die Formel

$$\dot{H} = \begin{bmatrix} \dot{U}_{o/2} & \dot{I}_{k/2} \\ \dot{U}_2 & \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a_{11} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} + a_{12} \sqrt{\frac{1}{R_1 R_2}} + a_{21} \sqrt{R_1 R_2} + a_{22} \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \end{bmatrix}$$

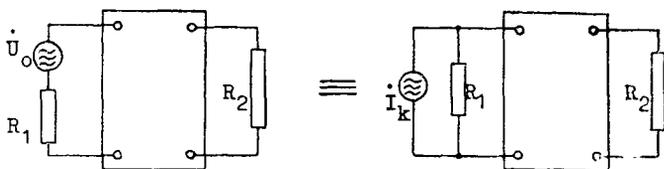


Bild 2

Wenn man nur den Betrag des Betriebsübertragungsfactor bei reinem ohmschen Abschlusswiderstand  $R_1$  und  $R_2$  betrachtet, bekommt man den Ausdruck

$$|\dot{H}| = \sqrt{\frac{P_{2max}}{P_2}}$$

wo die Grösse  $P_{2max}$  und  $P_2$  die hier untenstehende Bedeutung haben:  
 $P_{2max}$  = Maximale Leistung am Ausgang wenn exakte Anpassung herrscht.

$P_2$  = Übertragene Leistung am Ausgang.

Das Betriebsübertragungsmass wird definiert durch

$$\bar{g}_b = \ln \dot{H} = b_b + ja_b$$

wo  $b_b = \frac{1}{2} \ln |\dot{H}|^2 = \frac{1}{2} \ln P_{2max}/P_2$  die Betriebsdämpfung vorstellt.

## II. 2 Beziehungen zwischen Wirkleistungsdiagramm und Leitungsdiagramm

Das Wirkleistungsdiagramm nach Weissfloch [5] wird vereinfacht, wenn die Spannungs- oder Stromquelle reellen Innenwiderstand  $R_i$  haben. Ein Spannungsquelle mit reellem Innenwiderstand  $R_i$  wird maximal ein Wirk-

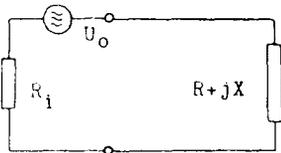


Bild 3

leistung  $P_{2max} = \frac{U_0^2}{4R_i}$  abgeben können.

Bei einem beliebigen Belastungswiderstand  $R + jX$  wird eine Wirkleistung

$$P_2 = \frac{U_0^2 R}{(R + R_i)^2 + X^2} = P_{2max} \frac{4RR_i}{(R + R_i)^2 + X^2}$$

abgegeben.

Durch Normierung auf den Innenwiderstand  $R_i$  bekommt man

$$\frac{P_{2max}}{P_2} = \frac{(1 + R/R_i)^2 + (X/R_i)^2}{4R/R_i}$$

In der normierten komplexen Widerstandsebene sind die Kurven mit Leistungsverhältnis  $P_{2max}/P_2 = \text{Konstante}$ , Kreise. Deren Mittelpunkt liegt auf der reellen Achse

bei

$$\frac{R}{R_i} = \left( 2 \frac{P_{2max}}{R_2} - 1 \right)$$

und ihr Radius,

$$r = 2 \sqrt{\frac{P_{2max}}{P_2} \left( \frac{P_{2max}}{P_2} - 1 \right)}$$

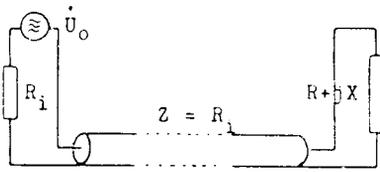


Bild 4

Wenn die Strom- oder Spannungsquelle über eine homogene Leitung mit Wellenwiderstand  $Z = R_1$  an den Belastungswiderstand angeschlossen wird, wird vorzugsweise nicht das Leistungsverhältnis  $P_{2max}/P_2$  als Mass des Anpassungszustandes, sondern die Welligkeit  $s$  oder der

Reflektionsfaktor  $r$  benutzt. Die Beziehungen zwischen den einzelnen Grössen sind:

$$r = \frac{s - 1}{s + 1}$$

$$\frac{P_{2max}}{P_2} = \frac{1}{1 - r^2}$$

$$\frac{P_{2max}}{P_2} = \frac{(s + 1)^2}{4s}$$

Zwischen der oberen und unteren Grenzfrequenz eines Vierpole soll das Leistungsverhältnis  $P_{2max}/P_2$  so wenig wie möglich von eins abweichen. Nimmt man an, eine Abweichung bis  $P_{2max}/P_2 = 1,04$  sei zugelassen, so entspricht das einer Welligkeit  $s = 1,5$ , einem Reflektionsfaktor  $r = 20\%$  und einer Betriebsdämpfung  $b_b = 0,02$  N.

Die dazugehörige Durchlasskurve wird in Bild 5 gezeigt. Die Ortskurve des Eingangswiderstandes bleibt innerhalb des Kreisses für die Welligkeit  $s = 1,5$  oder den Reflektionsfaktor  $r = 20\%$ , wie es in Bild 6 gezeigt wird.

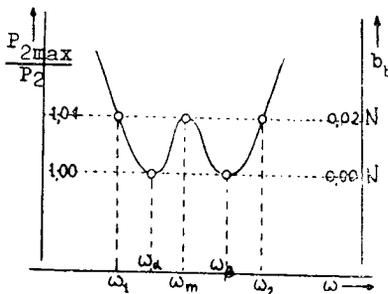


Bild 5

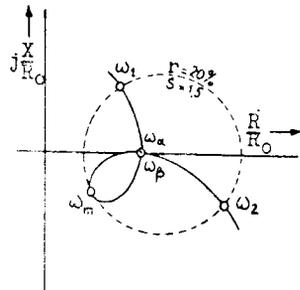


Bild 6

### III. ANWENDUNG DES EINFACHEN TSCHEBYSCHEFFSCHEN POLYNOMS FÜR GEKOPPELTE ZWEIKREISIGE SCHALTUNGEN MIT SCHMALER BANDBREITE

#### III. 1 Betriebsübertragungsfaktor bei schmaler Bandbreite

Bei schmaler relativer Bandbreite ( $\Delta f/f_m < 10\%$ ) lassen sich viele Vereinfachungen machen, so dass man zwischen dem Leistungsverhältnis  $P_{2max}/P_2$  und dem einfachen Tschebyscheffschen Polynom einen Koeffizientenvergleich machen kann.

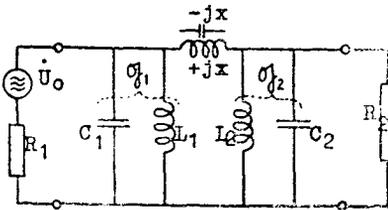


Bild 7

Die verlustfreie normierte Kopplungsreaktanz  $\pm jx$  wird in dem schmalen Durchlassbereich frequenzunabhängig aufgefasst. Die normierte Grösse ist für einen Koppelkondensator  $-j(1/\omega_m C_k R_1)$ , und im Fall einer Koppelspule dagegen  $+j\omega_m L_k/R_1$ .

Den normierte Leitwert eines Parallelresonanzkreises kann man bei schmaler Bandbreite mit guter Näherung in der nachstehenden einfachen Form ausdrücken

$\bar{g}_1 = j 2\omega_m C R_1 (\Omega - \Omega_1')$

mit den normierten Frequenzen  $\Omega = (\omega - \omega_m)/\omega_m$ ,  $\Omega_1' = (\omega_{r1} - \omega_m)/\omega_m$  und der Resonanzfrequenz  $\omega_{r1}$ . Es erweist sich als sehr zweckmässig [2.a] [2.b] an Stelle der beiden normierten Kreisleitwerte  $\bar{g}_1$  und  $\bar{g}_2$  die normierten primären und sekundären Kurzschlussleitwerte

$$(2) \quad \begin{aligned} \bar{g}_I &= \bar{g}_1 \mp j 1/x & \text{und} \\ \bar{g}_{II} &= \bar{g}_2 \mp j 1/x & \text{einzuführen.} \end{aligned}$$

Die Elemente der Kettenmatrix einer gekoppelten zweikreisigen Schaltung sehen bei schmaler Bandbreite folgendermassen aus:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \pm jx \bar{g}_{II} = \mp 2xp (\Omega - \Omega_1) \\ a_{22} &= \pm jx \bar{g}_I = \mp 2xq (\Omega - \Omega_1) \\ a_{12} &= \pm jx \\ a_{21} &= \mp j 1/x \pm jx \bar{g}_I \bar{g}_{II} \\ &= \mp j 4xpq \Omega^2 \pm j 4xpq (\Omega_1 \mp \Omega_2) \Omega \mp j xpq \Omega_1 \Omega_2 \pm j 1/x \end{aligned}$$

mit  $p = \omega_m C_2 R_1$  und  $q = \omega_m C_1 R_1$

Der Betriebsübertragungsfaktor  $\dot{H}$  lautet

$$\begin{aligned} \dot{H} &= (a\Omega + b) + j(c\Omega^2 + d\Omega + e) \\ \text{mit} \quad a &= \mp (p\sqrt{t} + q\sqrt{1/t})x \\ b &= \pm (p\sqrt{t}\Omega_2 + q\sqrt{1/t}\Omega_1)x \\ (3) \quad c &= \mp 2xpq\sqrt{t} \\ d &= \pm 2xpq\sqrt{t}(\Omega_1 + \Omega_2) \\ e &= \pm 1/2(\sqrt{t}/x + x/\sqrt{t} - 2xpq\sqrt{t}\Omega_1\Omega_2) \end{aligned}$$

mit einem Übersetzungsfaktor  $t = R_2/R_1$

Durch quadrieren bekommt man

$$(4) \quad |\dot{H}|^2 = P_{2\max}/P_2 = c^2\Omega^4 + 2sd\Omega^3 + (a^2 + d^2 + 2ec)\Omega^2 + (2ab + 2de)\Omega + (e^2 + b^2)$$

Dieser Ausdruck soll später mit dem Tschebyscheffschen Polynom verglichen werden.

### III. 2 Tschebyscheffsches Polynom

Das Polynom  $f(x) = x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \dots + b_n$ , mit den Parametern  $b_1, b_2, \dots, b_n$  soll zwischen der Grenzen  $x = -1$  und  $x = +1$  einen konstanten Wert nähern. Approximation im Tschebyscheffschen Sinne heisst, die Parameter  $b_1, b_2, \dots, b_n$  so zu bestimmen, dass die maximale Abweichung der  $f(x)$  zum Minimum gemacht wird.

Das Ergebnis lautet

$$\begin{aligned} f(x) &= T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x), \quad \text{mit der maximale Abweichung} \\ L_n &= \pm 1 \end{aligned}$$

In Polynomform ausgeschrieben

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \\ T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x \\ &\dots \end{aligned}$$

Für eine gekoppelte zweikreisige Schaltung ist nur  $T_4(x)$  von Belang.

Weil der Wert des Leistungsverhältnisses  $P_{2\max}/P_2$  zwischen 1 und  $1 + (\Delta P_{2\max}/P_2)$  innerhalb des Durchlassbereiches sein muss, wird das

Tschebyscheffsche Polynom mit einem konstanten Faktor und einer additiven Konstante versehen. Die Funktion

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= T_4(x) \frac{1}{2} \left( \Delta \frac{P_{2\max}}{P_2} \right) + 1 + \frac{1}{2} \left( \Delta \frac{P_{2\max}}{P_2} \right) \\
 (5) \quad &= 4 \left( \Delta \frac{P_{2\max}}{P_2} \right) x^4 - 4 \left( \Delta \frac{P_{2\max}}{P_2} \right) x^2 + 1 + \left( \Delta \frac{P_{2\max}}{P_2} \right) \text{ hat} \\
 &\text{den Wert } +1 \text{ bei } T_4(x) = -1 \text{ und } 1 + \Delta P_{2\max}/P_2 \text{ bei } T_4(x) = +1.
 \end{aligned}$$

### III. 3 Zweikreisige Schaltungen mit Tschebyscheffschem Übertragungsverhalten

Durch Koeffizientenvergleich der Ausdrücke (4) und (5) bekommt man Gleichungen, woraus die Schaltelemente des Vierpols mit Tschebyscheffschem Übertragungsverhalten zu bestimmen sind.

Formel (5) wird durch Einführen von  $x = \Omega/\Omega_g$  die Form

$$(5a) \quad f' \left( \frac{\Omega}{\Omega_g} \right) = \left( \frac{4\Delta P_{2\max}}{\Omega_g^4 P_2} \right) \Omega^4 - \left( \frac{4\Delta P_{2\max}}{\Omega_g^2 P_2} \right) \Omega^2 + \left( 1 + \Delta \frac{P_{2\max}}{P_2} \right)$$

annehmen.

Formel (4) lautet

$$P_{2\max}/P_2 = c^2 \Omega^4 + 2cd \Omega^3 + (a^2 + d^2 + 2ec) \Omega^2 + (2ab + 2de) \Omega + (e^2 + b^2)$$

Es ist klar zu sehen, dass die Koeffizienten der ungeraden Potenzen den Wert Null annehmen müssen.

$$cd = 0 \quad \text{und} \quad ab + ed = 0$$

oder anders geschrieben, s. Gl. (3)

$$x^2 p^2 q^2 t (\Omega_1 + \Omega_2) = 0$$

$$x^2 (p^2 t \Omega_2 + q^2 \frac{1}{t} \Omega_1) + (2x^2 p^2 q^2 t \Omega_1 \Omega_2 - pqt) (\Omega_1 + \Omega_2) = 0$$

Es gibt zwei Lösungen:

**1. Fall:**  $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$  was in [2a] und [2b] als abgestimmtes Filter gekennzeichnet wird.

**2. Fall:**  $\Omega_1 = -\Omega_2$

$p^2 t = q^2 \frac{1}{t}$  oder  $\frac{C_2}{C_1} = \frac{1}{t}$ , wird als symmetrisch verstimmtes Filter bezeichnet, und wird weiter nicht betrachtet.

Beim 1. Fall wird Gleichung (3) vereinfacht in der Form:

$$\begin{aligned}
 (3a) \quad a &= \mp x(p\sqrt{t} \pm q\sqrt{1/t}) \\
 b &= 0 \\
 c &= \mp 2xpq\sqrt{t} \\
 d &= 0 \\
 e &= \pm \frac{1}{2}(\sqrt{t/x} \pm x/\sqrt{t})
 \end{aligned}$$

Damit wird Gl. (4) die symmetrische Form annehmen

$$(4a) \quad P_{2\max}/P_2 = e^2 \Omega^4 - (a^2 \pm 2ec) \Omega^2 \pm e^2$$

Weitere Koeffizientenvergleiche mit Gl. (5a) ergeben weitere 3 Gleichungen:

$$(6a) \quad e^2 = \frac{\pm \Delta \frac{P_{2\max}}{P_2}}{\Omega_g^4}$$

$$(6b) \quad a^2 \pm 2ec = -\frac{\pm \Delta \frac{P_{2\max}}{P_2}}{\Omega_g^2}$$

$$(6c) \quad e^2 = 1 \pm \Delta \frac{i_{2\max}^2}{P_2}$$

Aus den Gleichungen (6c) und (3a) ist die normierte Kopplungsreaktanz  $j_x$  zu lösen und hat als Ergebnis

$$(7) \quad j_x = j\sqrt{t} \left( \sqrt{1 \pm \Delta \frac{P_{2\max}}{P_2}} \pm \sqrt{\Delta \frac{P_{2\max}}{P_2}} \right)$$

Aus der Gl. (6b) und Gl. (3a) bekommt man

$$(8a) \quad (p\sqrt{t} \pm q\sqrt{1/t})^2 = -\frac{\pm \Delta \frac{P_{2\max}}{P_2}}{\Omega_g^2 x^2} \pm 2pq \left( \frac{t}{x^2} \pm 1 \right)$$

$$(8b) \quad (p\sqrt{t} - q\sqrt{1/t})^2 = -\frac{\pm \Delta \frac{P_{2\max}}{P_2}}{\Omega_g^2 x^2} \pm 2pq \left( \frac{t}{x^2} - 1 \right)$$

Schliesslich bekommt man aus den Gleichungen (6a) und (3a)

$$(9) \quad 2pq = \frac{2}{x} \sqrt{\frac{\Delta \frac{i_{2\max}^2}{P_2}}{\Omega_g^4 t}}$$

Mit Hilfe der Gleichungen (7) und (9) kann man die Gl. (8b)

$(p\sqrt{t} - q\sqrt{1/t}) = 0$  beweisen.

Der Beweis geht wie folgt:

Aus Gl. (7) folgt  $x^2 = t \left( 1 + 2\Delta \frac{P_{2\max}}{P_2} - 2 \sqrt{\frac{P_{2\max}}{P_2}} \sqrt{1 + \Delta \frac{P_{2\max}}{P_2}} \right)$

und hieraus  $\frac{t - x^2}{x^2} = \frac{2 \sqrt{\Delta \frac{P_{2\max}}{P_2}} \left( \sqrt{1 + \Delta \frac{P_{2\max}}{P_2}} - \sqrt{\Delta \frac{P_{2\max}}{P_2}} \right) t}{x^2}$

Der letzte Teil der Gl. (8b) wird mit Hilfe der Gl. (9) wie folgt umgerechnet:

$$2pq \left( \frac{t - x^2}{x^2} \right) = \frac{2}{x} \left| \frac{\Delta \frac{P_{2\max}}{P_2}}{\Omega_g^4 t} \right| \frac{2 \sqrt{\Delta \frac{P_{2\max}}{P_2}} \left( \sqrt{1 + \Delta \frac{P_{2\max}}{P_2}} - \sqrt{\Delta \frac{P_{2\max}}{P_2}} \right)}{x^2} t$$

Nach Einsetzen des Faktors  $1/x$  aus der Gl. (7) kommt man zu dem Ergebnis:

$$2pq \left( \frac{t - x^2}{x^2} \right) = \frac{4\Delta \frac{P_{2\max}}{P_2}}{\Omega_g^2 x^2}$$

Dieses eingesetzt in die Gl. (8b) liefert  $p\sqrt{t} = q\sqrt{1/t}$ , was zu beweisen war.

Hiermit ist bewiesen worden, dass bei einem transformierenden abgestimmten Filter mit Tschebyscheffischem Übertragungsverhalten die Gleichung  $p\sqrt{t} = q\sqrt{1/t}$  oder  $C_2/C_1 = 1/t$  auch gelten muss.

Aus Gl. (9) sind  $p$  und  $q$  zu lösen wie folgt:

$$\begin{aligned} 2pq &= 2p^2t = \frac{2}{x} \sqrt{\Delta \frac{P_{2\max}}{P_2} / \Omega_g^4 t} \\ &= \frac{2}{t} \sqrt{\Delta \frac{P_{2\max}}{P_2} / \Omega_g^4} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \Delta \frac{P_{2\max}}{P_2}\right) - \sqrt{\left(\Delta \frac{P_{2\max}}{P_2}\right)}}} \end{aligned}$$

Mit dem Faktor  $\left( \sqrt{1 + \Delta \frac{P_{2\max}}{P_2}} + \sqrt{\Delta \frac{P_{2\max}}{P_2}} \right)$  multipliziert kommt

man zu dem Ergebnis:

$$(10) \quad P = \frac{1}{t \Omega_g} \sqrt{\Delta \frac{P_{2\max}}{P_2} + \sqrt{\Delta \frac{P_{2\max}}{P_2} + \left(\Delta \frac{P_{2\max}}{P_2}\right)^2}}$$

$$q = tp = \frac{1}{\Omega_g} \sqrt{\Delta \frac{P_{2\max}}{P_2} + \sqrt{\Delta \frac{P_{2\max}}{P_2} + \left(\Delta \frac{P_{2\max}}{P_2}\right)^2}}$$

Aus diesen Gleichungen sind die Kreiskapazitäten  $C_1$  und  $C_2$  zu bestimmen:

$$(11) \quad C_1 = \frac{1}{\omega_m R_1} q \quad C_2 = \frac{1}{\omega_m R_1} p$$

Die Resonanzfrequenzen der Kreise werden bei induktiver Kopplung höher und bei kapazitiver Kopplung niedriger als die Bandmittenfrequenz sein, wie später abgeleitet wird.

### III. 3a Dimensionierung bei induktiver Kopplung

Für induktive Kopplung gelten für die normierte Kreisleitwerte beim 1. Fall,  $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$ , die Gleichungen

$$(2a) \quad \bar{g}_1 = \bar{g}_I + j 1/x \quad \bar{g}_2 = \bar{g}_{II} + j 1/x$$

$$\bar{g}_1 = j2q \left( \frac{\omega}{\omega_m} - 1 \right) + j1/x \quad \bar{g}_2 = j2p \left( \frac{\omega}{\omega_m} - 1 \right) + j1/x$$

Bei den Resonanzfrequenzen  $\omega = \omega_{r1}$  bzw.  $\omega = \omega_{r2}$  gelten

$$0 = j2q \left( \frac{\omega_{r1}}{\omega_m} - 1 \right) + j1/x \quad 0 = j2p \left( \frac{\omega_{r2}}{\omega_m} - 1 \right) + j1/x$$

oder die Resonanzfrequenzen  $\omega_{r1}$  und  $\omega_{r2}$  explizit ausgedrückt

$$(12) \quad \omega_{r1} = \left( 1 - \frac{1}{2qx} \right) \omega_m \quad \omega_{r2} = \left( 1 - \frac{1}{2px} \right) \omega_m$$

Aus den Gl. (11) und (12) sind die Kreisinduktivitäten  $L_1$  und  $L_2$  zu bestimmen, wie folgt:

$$(13) \quad \omega_{r1} C_1 R_1 = R_1 / \omega_{r1} L_1 \quad \omega_{r2} C_2 R_1 = R_1 / \omega_{r2} L_2$$

$$L_1 = \frac{R_1}{\omega_m (1 - 1/2qx)^2 q} \quad L_2 = \frac{R_1}{\omega_m (1 - 1/2px)^2 p}$$

Wo  $p$  und  $q$  aus der Gleichung (10) zu bestimmen sind.

Die Kopplungsinduktivität  $L_k$  ist aus der Gl. (17) zu bestimmen und hat den Wert

$$(14) \quad L_k = \frac{R_1}{\omega_m} \sqrt{t} \left( \sqrt{1 + \Delta \frac{P_{2\max}}{P_2}} - \sqrt{\Delta \frac{P_{2\max}}{P_2}} \right)$$

### III. 3b Dimensionierung bei kapazitiver Kopplung

Für kapazitive Kopplung gelten für die normierten Kreisleitwerte beim 1. Fall,  $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$ , die Gleichungen

$$\begin{aligned} \bar{g}_1 &= g_1 - j 1/x & \bar{g}_2 &= g_{II} - j 1/x \\ \bar{g}_1 &= j 2q \left( \frac{\omega}{\omega_m} - 1 \right) - j 1/x & \bar{g}_2 &= j 2p \left( \frac{\omega}{\omega_m} - 1 \right) - j 1/x \end{aligned}$$

Bei den Resonanzfrequenzen  $\omega = \omega_{r1}$  und  $\omega = \omega_{r2}$  gelten

$$0 = j 2q \left( \frac{\omega_{r1}}{\omega_m} - 1 \right) - j 1/x \quad 0 = j 2p \left( \frac{\omega_{r2}}{\omega_m} - 1 \right) - j 1/x$$

oder die primäre und sekundäre Resonanzfrequenzen explizit ausgedrückt

$$(15) \quad \omega_{r1} = \left( 1 + \frac{1}{2qx} \right) \omega_m \quad \omega_{r2} = \left( 1 + \frac{1}{2px} \right) \omega_m$$

Aus den Gleichungen (11) und (15) sind die Kreisinduktivitäten  $L_1$  und  $L_2$  zu bestimmen wie folgt:

$$\begin{aligned} \omega_{r1} C_1 R_1 &= R_1 / \omega_{r1} L_1 & \omega_{r2} C_2 R_1 &= R_1 / \omega_{r2} L_2 \\ (16) \quad L_1 &= \frac{R_1}{\omega_m (1 + 1/2qx)^2 q} & L_2 &= \frac{R_1}{\omega_m (1 + 1/2px)^2 p} \end{aligned}$$

Die Kopplungskapazität  $C_k$  ist aus der Gleichung (7) zu bestimmen und hat den Wert

$$(17) \quad C_k = \frac{1}{\omega_m R_1 \sqrt{t} \left( \sqrt{1 + \Delta \frac{P_{2max}}{P_2}} - \sqrt{\Delta \frac{P_{2max}}{P_2}} \right)}$$

#### Anmerkung zu Kapitel III.3a und III.3b:

Aus dem Ergebnis in Gl. (16) oder (13) ist klar zu sehen, dass bei schmaler Bandbreite, für jeden Übersetzungsfaktor  $t$ , die Induktivitäten  $L_1$  und  $L_2$  positive Werten annehmen. Das bedeutet, dass die gekoppelte zweikreisige Schaltung ohne Gegeninduktivität zu realisieren ist. Dies ist nicht der Fall wenn man es exakt bei beliebiger Bandbreite ausrechnet.

### III. 4 Rechenbeispiel

Es sollen die Größen der fünf Schaltelemente einer gekoppelten zweikreisigen Schaltung bestimmt werden.

Der gewünschte Durchlassbereich ist zwischen

$$-\Omega_g = -\frac{\omega_g - \omega_m}{\omega_m} = -0,05 \quad \text{und} \quad +\Omega_g = \frac{\omega_g - \omega_m}{\omega_m} = +0,05$$

In dem obigen Frequenzbereich soll der Widerstand  $tR_1$  in  $R_1$  transformiert werden, wobei ein Reflexionsfaktor  $r$  von maximal 20% zugelassen ist.

$$\text{Nach der Gl. (1) ist} \quad P_{2\max}/P_2 = \frac{1}{1-r^2} = 1,04166$$

$$\Delta \frac{P_{2\max}}{P_2} = 0,04166$$

Weiter sind zu rechnen aus Gl. (7) und (10)

$$x = \sqrt{t} \left( \sqrt{1 + \Delta \frac{P_{2\max}}{P_2}} - \sqrt{\Delta \frac{P_{2\max}}{P_2}} \right) = 0,8165 \sqrt{t}$$

$$q = \frac{1}{\Omega_g} \sqrt{\Delta \frac{P_{2\max}}{P_2}} + \sqrt{\Delta \frac{P_{2\max}}{P_2} + \left( \Delta \frac{P_{2\max}}{P_2} \right)^2} = 10,00$$

$$p = \frac{1}{t} \quad q = 10,00 \frac{1}{t}$$

Die normierten Kreisleitwerte der primären und sekundären Resonanzkreise sind bei einem Übersetzungsfaktor  $t = 4$  nach der Gl. (2a), für induktive Kopplung:

$$\bar{g}_1 = j 20,00 \left( \frac{\omega}{\omega_m} - 1 \right) + j 0,6124$$

$$\bar{g}_2 = j 5,00 \left( \frac{\omega}{\omega_m} - 1 \right) + j 0,6124$$

$$\text{mit } jx = 1,633$$

Auf der nächste Seite ist die Ortskurve gezeichnet worden.

Die normierten Grössen der Schaltelemente sind

$$c_1 = \omega_m C_1 R_1 = 10,00 \quad c_2 = \omega_m C_2 R_1 = 2,50$$

$$l_1 = \omega_m L_1 / R_1 = 0,1064 \quad l_2 = \omega_m L_2 / R_1 = 0,5195$$

$$\text{und } l_k = \omega_m L_k / R_1 = 1,633$$

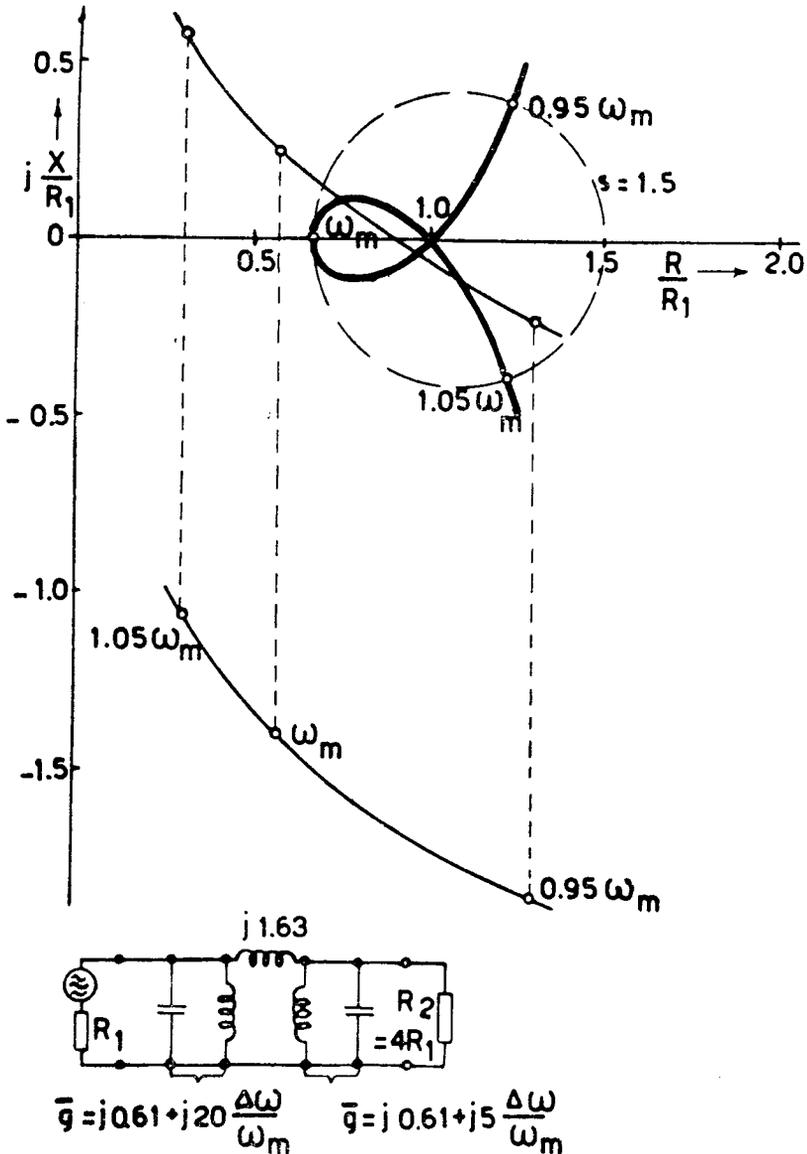


Bild 8.

Ortskurve des Eingangswiderstandes bei:

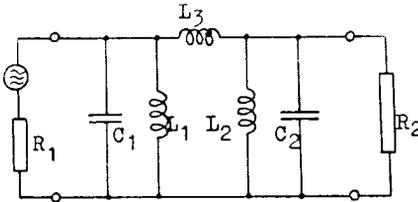
$$t = R_2/R_1 = 4 \frac{\Delta\omega}{\omega_m} = 0,05 \text{ oder } \frac{1,05 \omega_m}{0,95 \omega_m} = 1,1$$

Gerechnet mit der einfachen Rechenmethode nach Kapitel III.

Zu bemerken ist die symmetrische Form der Ortskurve.

IV. ANWENDUNG GEBROCHENEN TSCHEBYSCHEFFSCHEN FUNKTION FÜR GEKOPPELTE ZWEIKREISIGE SCHALTUNGEN MIT BELIEBIGER BANDBREITE

IV. 1 Betriebsübertragungsfaktor bei beliebigen Bandbreite



Die Elemente der Kettenmatrix einer zweikreisigen Schaltung ohne Vernachlässigungen sehen folgendermassen aus:

Bild 9

$$\begin{aligned} a_{11} &= (1 + L_3/L_2) - (L_3 C_2) \omega^2 \\ a_{22} &= (1 + L_3/L_1) - (L_3 C_1) \omega^2 \\ a_{12} &= j\omega L_3 \\ a_{21} &= -j\omega^3 (L_3 C_1 C_2) + j\omega \left\{ (1 + L_3/L_2) C_1 + (1 + L_3/L_1) C_2 \right\} + \\ &\quad \frac{1}{j\omega L_3} \left\{ (1 + L_3/L_2) (1 + L_3/L_1) - 1 \right\} \end{aligned}$$

Der Betriebsübertragungsfaktor

$$\dot{H} = \frac{1}{2} \left[ a_{11} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} + a_{22} \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} + a_{12} \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2}} + a_{21} \sqrt{R_1 R_2} \right]$$

ist nach einer kleinen Rechenarbeit in der untenstehenden Form zu schreiben:

$$\dot{H} = (a\Omega^2 + b) + j \left( c\Omega^3 + d\Omega + e \frac{1}{\Omega} \right)$$

Die Buchstaben a, b, c, d, und e sind:

$$\begin{aligned} a &= -1/2 \left( \frac{\omega_c L_3}{R_1} \omega_c C_2 R_1 \sqrt{t} + \frac{\omega_c L_3}{R_1} \omega_c C_1 R_1 \sqrt{1/t} \right) \\ b &= 1/2 \sqrt{t} (1 + L_3/L_2) + 1/2 \sqrt{1/t} (1 + L_3/L_1) \\ c &= -1/2 \frac{\omega_c L_3}{R_1} \omega_c C_1 R_1 \omega_c C_2 R_1 \sqrt{t} \\ (18) \quad d &= 1/2 \sqrt{t} \omega_c C_1 R_1 (1 + L_3/L_2) + 1/2 \sqrt{1/t} \omega_c C_2 R_1 (1 + L_3/L_1) + \\ &\quad \frac{\omega_c L_3}{2R_1 \sqrt{t}} \\ e &= -1/2 \frac{R_1}{\omega_c L_3} \sqrt{t} \left\{ (1 + L_3/L_2) (1 + L_3/L_1) - 1 \right\} \end{aligned}$$

und  $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$   $t = R_2/R_1$

$\omega_0$  ist eine beliebige Bezugsfrequenz.

Durch quadrieren bekommt man

$$|H|^2 = P_{2max} P_2 = A\Omega^6 + B\Omega^4 + C\Omega^2 + D + E \frac{1}{\Omega^2}$$

mit  $A = c^2$

$$B = a^2 + 2cd$$

$$(19) C = d^2 + 2ab + 2ec$$

$$D = b^2 + 2de$$

$$E = e^2$$

Oder mit  $\Omega^2 = \lambda$  wird das Leistungsverhältnis

$$P_{2max} P_2 = \frac{A\lambda^4 + B\lambda^3 + C\lambda^2 + D\lambda + E}{\lambda}$$

Transformiert man weiter mit  $\lambda = x + m$  wo

$m = \frac{\lambda_2 + \lambda_1}{2} = \frac{\Omega_2^2 + \Omega_1^2}{2}$  ist, wird das Leistungsverhältnis  $P_{2max}/P_2$  die Form annehmen:

$$(20) P_{2max} P_2 = A \frac{x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta}{x + m}$$

$\alpha, \beta, \gamma$  und  $\delta$  sind Abkürzungen für

$$\delta = m^4 + B/A \cdot m^3 + C/A \cdot m^2 + D/A \cdot m + E/A$$

$$(21) \gamma = 4m^3 + 3 B/A \cdot m^2 + 2 C/A \cdot m + D/A$$

$$\beta = 6m^2 + 3 B/A \cdot m + C/A$$

$$\alpha = 4m + B/A$$

Wenn die untere bzw. die obere Grenzfrequenz mit  $\omega = \omega_1$  und  $\omega = \omega_2$  bezeichnet wird, sind die zugehörigen Grenzwerte von  $x$ ,

$$(22) x_1 = h \frac{\frac{\Omega_2^2 - \Omega_1^2}{2} - \left(\frac{\omega_2}{\omega_0}\right)^2 - \left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2}{2}$$

$$x_2 = h \frac{\frac{\Omega_2^2 - \Omega_1^2}{2} + \left(\frac{\omega_2}{\omega_0}\right)^2 - \left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2}{2}$$

Der Vierpol soll so dimensioniert werden, dass in dem gewünschten Frequenzband, das Leistungsverhältnis  $P_{2max}/P_2$  so wenig wie möglich von eins verschieden ist.

**IV. 2 Gebrochene Tschebyscheffsche Funktion [1]**

Tschebyscheff hat die gebrochene Funktion von der Form:

$$(23) \quad f(x) = U/v = \frac{x^n + p'x^{n-1} + p''x^{n-2} + \dots + p^{n-1}x + p^n}{A_0x^{n-l-1} + A_1x^{n-l-2} + \dots + A_{n-l-1}}$$

untersucht.

Die Faktoren  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-l-1}$  des Nenners sind gegebene Konstanten.

Die Parameter  $p', p'', \dots, p^n$  sind so zu bestimmen dass der Bruch zwischen den Grenzen  $x = -h$  und  $x = +h$ , möglichst wenig von Null abweicht. Die maximale Abweichungen werden mit  $-I_m$  und  $+L_m$  bezeichnet.

Weiter ist angenommen worden, dass bei Zerlegung des Nenners  $v = A_0 \cdot (x - \alpha_1)^{l_1} (x - \alpha_2)^{l_2} (x - \alpha_3)^{l_3} \dots$ , die

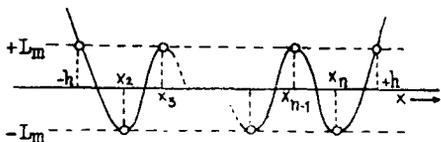
Wurzeln  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots$  reell sind und nicht zwischen  $x = -h$  und  $x = +h$  liegen. Weiter ist leicht einzusehen, dass  $l_1 + l_2 + l_3 + \dots = n - l - 1$  ist

Das Ergebnis lautet [1]

$$(24) \quad U = \frac{(x + j\sqrt{h^2 - x^2})^{l-1}}{2} \left[ \frac{\frac{z_1 x - h^2}{z_1} + j \sqrt{\left(1 - \frac{h^2}{z_1^2}\right)(h^2 - x^2)}}{1 + \sqrt{1 - \frac{h^2}{z_1^2}}} \right]^{l_1} \cdot \left[ \frac{\frac{z_2 x - h^2}{z_2} + j \sqrt{\left(1 - \frac{h^2}{z_2^2}\right)(h^2 - x^2)}}{1 + \sqrt{1 - \frac{h^2}{z_2^2}}} \right]^{l_2} \cdot \dots \cdot \left[ \frac{(x - j\sqrt{h^2 - x^2})^{l+1}}{2} \right]^{l_1} \cdot \left[ \frac{\frac{z_1 x - h^2}{z_1} - j \sqrt{\left(1 - \frac{h^2}{z_1^2}\right)(h^2 - x^2)}}{1 + \sqrt{1 - \frac{h^2}{z_1^2}}} \right]^{l_1} \cdot \left[ \frac{\frac{z_2 x - h^2}{z_2} - j \sqrt{\left(1 - \frac{h^2}{z_2^2}\right)(h^2 - x^2)}}{1 + \sqrt{1 - \frac{h^2}{z_2^2}}} \right]^{l_2} \cdot \dots$$

Für die maximale Abweichung  $\pm L_m$  gilt:

$$(25) \quad \pm L_m = \pm \frac{h^n}{2^{1/n-1} (1 + \sqrt{1 - h^2/\alpha_1^2})^{1/2} (1 + \sqrt{1 - h^2/\alpha_2^2})^{1/2} \dots}$$



An allen Punkten an denen die Kurve  $f(x)$  die Grenzwerte  $-L_m$  und  $+L_m$  annimmt, gilt  $U^2 = \pm L_m$  oder  $U^2 - L_m^2 = 0$

Bild 10

Weiter ist bewiesen worden [1], dass

$$U^2 - L_m^2 = (x^2 - h^2) \cdot W^2 \text{ ist, worin}$$

$W = \sqrt{c_0 \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot \dots \cdot (x - x_n)}$  ist und man seinen Wert nach der folgenden Formel ausrechnen kann:

$$(26) \quad W = \frac{(x + j \sqrt{h^2 - x^2})^{l-1}}{2^{l-1} j \sqrt{h^2 - x^2}} \left[ \frac{\alpha_1 x - h^2 + j \sqrt{\left(1 - \frac{h^2}{\alpha_1^2}\right) (h^2 - x^2)}}{1 - \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_1^2}}} \right]^{l_1} \left[ \frac{\alpha_2 x - h^2 - j \sqrt{\left(1 - \frac{h^2}{\alpha_2^2}\right) (h^2 - x^2)}}{1 - \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_2^2}}} \right]^{l_2} \cdot \frac{(x - j \sqrt{h^2 - x^2})^{l+1}}{2^{l+1} j \sqrt{h^2 - x^2}} \left[ \frac{\alpha_1 x - h^2 - j \sqrt{\left(1 - \frac{h^2}{\alpha_1^2}\right) (h^2 - x^2)}}{1 + \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_1^2}}} \right]^{l_1} \left[ \frac{\alpha_2 x - h^2 + j \sqrt{\left(1 - \frac{h^2}{\alpha_2^2}\right) (h^2 - x^2)}}{1 + \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_2^2}}} \right]^{l_2}$$

Weil alle Glieder in Gl. (24) und (26) konjugiert komplex erscheinen braucht man nur den doppelten Real- oder Imaginärteil von dem Ausdruck zu nehmen.

Für die zweikreisige Schaltung wird die interessierende gebrochene Tschescheffsche Funktion folgende Form haben:

$$f(x) = U/v = \frac{x^4 + p_3x^3 + p_2x^2 + p_1x + p_0}{x + m}$$

ähnlich wie das Leistungsverhältnis  $P_{2\max}/P_2$  in Gl. (20).

Bei einem Vergleich mit Gl. (23) ist klar zu sehen, dass

$$n = 4$$

$$n - 1 - 1 = 1 \text{ woraus folgt } l = 2$$

$$l_1 = 1, \quad l_2 = 0, \quad l_3 = 0 \dots\dots\dots$$

$$\alpha_1 = -m, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 0 \dots\dots\dots$$

$$A_2 = 1$$

Dies eingesetzt in Gl. (24) liefert

$$U = \left( \frac{x + j \sqrt{h^2 - x^2}}{2} \right)^3 \left[ \frac{x + h^2/m + j \sqrt{(1 - h^2/m^2)(h^2 - x^2)}}{1 + \sqrt{1 - h^2/m^2}} \right] \\ + \left( \frac{x - j \sqrt{h^2 - x^2}}{2} \right)^3 \left[ \frac{x + h^2/m - j \sqrt{(1 - h^2/m^2)(h^2 - x^2)}}{1 + \sqrt{1 - h^2/m^2}} \right]$$

Weil die beiden Glieder auf der rechten Seite konjugiert komplex erscheinen, wird

$$U = 2 \cdot \frac{1}{2^3 \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{h^2}{m^2}} \right)} \operatorname{Re} \left[ (x + j \sqrt{h^2 - x^2})^3 \left( x + \frac{h^2}{m^2} \right) \right. \\ \left. + j \sqrt{\left( 1 - \frac{h^2}{m^2} \right) (h^2 - x^2)} \left( \right) \right]$$

Nach einer kleiner Rechenarbeit kommt man zu den Ausdruck

$$(24a) \quad f(x=U/v) = \frac{1}{x+m} \left[ x^4 + \frac{h^2}{m \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{h^2}{m^2}} \right)} x^3 - \frac{3h^2 + 5h^2 \sqrt{1 - \frac{h^2}{m^2}}}{4 \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{h^2}{m^2}} \right)} x^2 - \right. \\ \left. \frac{3h^4}{4m \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{h^2}{m^2}} \right)} x + \frac{h^4 \sqrt{1 - \frac{h^2}{m^2}}}{4 \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{h^2}{m^2}} \right)} \right]$$

Die maximale Abweichung  $L_m$  von Null wird aus Gl. (25) die Form annehmen

$$(25a) \quad \pm L_m = \pm \frac{h^4}{4m \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{h^2}{m^2}} \right)}$$

Wenn Gl. (24a) mit A multipliziert und  $Q_0$  dazu addiert wird, kommt man zu einer Funktion  $f'(x)$

$$(24b) \quad f'(x) = U/v = \frac{A}{x \pm m} \left[ x^3 - \frac{h^2}{m \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{h^2}{m^2}} \right)} x^3 - \frac{3h^2 + 5h^2 \sqrt{1 - \frac{h^2}{m^2}}}{4 \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{h^2}{m^2}} \right)} x^2 - \right. \\ \left. \frac{3h^4}{4m \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{h^2}{m^2}} \right)} - \frac{Q_0}{A} \right] x + \frac{h^4 \sqrt{1 - \frac{h^2}{m^2}}}{4 \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{h^2}{m^2}} \right)} + \frac{Q_0 m}{A}$$

Die Werte dieser Funktion  $f'(x)$  liegen in einem Streifen

$$(25b) \quad L = Q_0 \pm A.L_m = Q_0 \pm A \frac{h^4}{4m \left( 1 + \sqrt{1 - h^2/m^2} \right)}$$

Durch Koeffizientenvergleich der Gl. (24b) und (20) bekommt man folgende vier lineare Gleichungen mit vier Unbekannten B/A, C/A, D/A, und E/A:

$$(27) \quad \frac{h^4 \sqrt{1 - \frac{h^2}{m^2}}}{4 \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{h^2}{m^2}} \right)} + \frac{Q_0 m}{A} = m^4 + B/A.m^3 + C/A.m^2 + D/A.m + E/A \\ - \frac{3h^4}{4m \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{h^2}{m^2}} \right)} + \frac{Q_0}{A} = 4m^3 + 3.B/A.m^2 + 2.C/A.m + D/A \\ - \frac{3h^2 + 5h^2 \sqrt{1 - \frac{h^2}{m^2}}}{4 \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{h^2}{m^2}} \right)} = 6m^2 + 3.B/A.m + C/A \\ \frac{h^2}{m \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{h^2}{m^2}} \right)} = 4m + B/A$$

mit den schon früher eingeführten Abkürzungen:

$$h = \frac{\left( \frac{\omega_2}{\omega_0} \right)^2 - \left( \frac{\omega_1}{\omega_0} \right)^2}{2} = \frac{\Omega_2^2 - \Omega_1^2}{2}$$

$$m = \frac{\left(\frac{\omega_2}{\omega_c}\right)^2 + \left(\frac{\omega_1}{\omega_c}\right)^2}{2} = \frac{\Omega_2^2 + \Omega_1^2}{2}$$

Der Wert A hängt davon ab, wie gross man in den gewünschten Frequenzband die Abweichung des Leistungsverhältnissen  $P_{2max}/P_2$  von eins zulässt.

Wenn in dem gewünschten Frequenzband das Leistungsverhältnis  $P_{2max}/P_2$  zwischen  $1,0$  und  $1,0 + \Delta P_{2max}/P_2$  schwankt, kann man das auch ausdrücken als Schwankung um den mittleren Wert  $1,0 + 1/2 \Delta P_{2max}/P_2$  und erhält die Gleichung:

$$P_{2max}/P_2 = (1 + 1/2 \Delta P_{2max}/P_2) \pm 1/2 \Delta P_{2max}/P_2$$

Diese Gleichung verglichen mit Gl. (25b) liefert

$$(28) \quad Q_o = (1 + 1/2 \Delta P_{2max}/P_2) \quad \text{und} \quad h^4$$

$$1,2 \Delta P_{2max}/P_2 = A \frac{1}{4m(1 + \sqrt{1 - h^2/m^2})}, \text{ woraus man leicht}$$

die Unbekannte A ausrechnen kann.

Die Extremwerte  $x_2, x_3, \dots, x_n$  werden bestimmt durch die Gleichung  $W = 0$  (s. Gl. (26) und Bild 10). Die Gl. (26) wird für eine gekoppelte zweikreisige Schaltung vereinfacht zu der Form:

$$W = \frac{(x + j \sqrt{h^2 - x^2})^3}{8j \sqrt{h^2 - x^2}} \left[ \frac{x + h^2/m + j \sqrt{(1 - h^2/m^2)(h^2 - x^2)}}{1 + \sqrt{1 - h^2/m^2}} \right] - \frac{(x - j \sqrt{h^2 - x^2})^3}{8j \sqrt{h^2 - x^2}} \left[ \frac{x - h^2/m - j \sqrt{(1 - h^2/m^2)(h^2 - x^2)}}{1 - \sqrt{1 - h^2/m^2}} \right]$$

Ausmultipliziert ergibt sich

$$8j \sqrt{h^2 - x^2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{h^2}{m^2}}\right) W = (x + j \sqrt{h^2 - x^2})^3 \left\{ \left(x + \frac{h^2}{m^2}\right) + \right.$$

$$j \sqrt{\left(1 - \frac{h^2}{m^2}\right)(h^2 - x^2)} \left. - (x - j \sqrt{h^2 - x^2})^3 \left\{ \left(x + \frac{h^2}{m^2}\right) - \right. \right.$$

$$\left. \left. j \sqrt{\left(1 - \frac{h^2}{m^2}\right)(h^2 - x^2)} \right\} \right\}$$

Weil die Glieder der rechten Seite konjugiert komplex erscheinen, kann man schreiben

$$8j \sqrt{h^2 - x^2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{h^2}{m^2}}\right) W = 2j \text{Im} \left[ (x + j \sqrt{h^2 - x^2})^3 \left\{ \left(x + \frac{h^2}{m^2}\right) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + j \sqrt{\left(1 - \frac{h^2}{m^2}\right)(h^2 - x^2)} \right\} \right]$$

Nach einer kleinen Zwischenrechnung kommt man zu dem Ausdruck

$$W = x^3 + \frac{h^2/m}{1 + \sqrt{1 - h^2/m^2}} x^2 - \frac{h^2 + 3h^2 \sqrt{1 - h^2/m^2}}{4(1 + \sqrt{1 - h^2/m^2})} x - \frac{h^4/m}{4(1 + \sqrt{1 - h^2/m^2})}$$

Durch einsetzen der Werte  $h = \frac{\Omega_2^2 - \Omega_1^2}{2}$  und  $m = \frac{\Omega_2^2 + \Omega_1^2}{2}$  ergibt sich

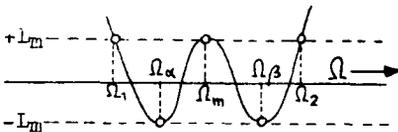
$$W = x^3 + \frac{(\Omega_2 - \Omega_1)^2}{2} x^2 - \frac{1}{16} (\Omega_2 - \Omega_1)^2 \{ (\Omega_1 - \Omega_1)^2 - 4\Omega_1\Omega_2 \} x - \frac{1}{32} (\Omega_2 + \Omega_1)^2 (\Omega_2 - \Omega_1)^4$$

Die Wurzeln der Gleichung  $W = 0$  sind

$$x_m = - \left( \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2} \right)^2$$

$$x = - \frac{1}{2} \left( \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2} \right)^2 \pm \frac{1}{2} \left( \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2} \right)^2 \sqrt{1 + 8 \frac{(\Omega_2 + \Omega_1)^2}{(\Omega_2 - \Omega_1)^2}}$$

Durch zurück transformieren mit  $\Omega^2 = x + m = x + \frac{\Omega_2^2 + \Omega_1^2}{2}$



bekommt man die extremen Werte der gebrochenen Funktion  $f(x)$  bei den normierten Frequenzen:

Bild 11

$$\Omega_{\alpha} = \sqrt{\frac{\Omega_2^2 + \Omega_1^2}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2} \right)^2} \left\{ 1 + \sqrt{1 + 8 \frac{(\Omega_2 + \Omega_1)^2}{(\Omega_2 - \Omega_1)^2}} \right\}$$

$$(29) \quad \Omega_m = \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2}$$

$$\Omega_{\beta} = \sqrt{\frac{\Omega_2^2 + \Omega_1^2}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2} \right)^2} \left\{ 1 - \sqrt{1 + 8 \frac{(\Omega_2 + \Omega_1)^2}{(\Omega_2 - \Omega_1)^2}} \right\}$$

Man sieht deutlich, dass keine Symmetrie vorhanden ist.

### IV. 3 Zweikreisige Schaltungen mit Tschebyscheffschem Übertragungsverhalten bei beliebiger Bandbreite

Nach einer mühseligen Rechenarbeit lauten die Ergebnisse der Gl. (27) und (28) folgendermassen:

$$\begin{aligned}
 A &:= \frac{1}{(\Omega_1 - \Omega_2)^2 \left(\frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2}\right)^4} \Delta \frac{P_{2\max}}{P_2} \\
 B &:= \frac{3\Omega_2^2 + 2\Omega_1\Omega_2 + 3\Omega_1^2}{(\Omega_1 - \Omega_2)^2 \left(\frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2}\right)^4} \frac{1}{2} \Delta \frac{P_{2\max}}{P_2} \\
 (30) \quad C &:= \frac{9\Omega_2^4 + 20\Omega_2^3\Omega_1 - 38\Omega_2^2\Omega_1^2 + 20\Omega_2\Omega_1^3 + 9\Omega_1^4}{(\Omega_2 + \Omega_1)^2 (\Omega_2 - \Omega_1)^4} \Delta \frac{P_{2\max}}{P_2} \\
 D &:= 1 - \frac{4\Omega_1\Omega_2 (3\Omega_2^2 + 2\Omega_1\Omega_2 + 3\Omega_1^2)}{(\Omega_2 - \Omega_1)^4} \frac{1}{2} \Delta \frac{P_{2\max}}{P_2} \\
 E &:= \frac{(\Omega_1 + \Omega_2)^2 \Omega_1^2 \Omega_2^2}{(\Omega_2 - \Omega_1)^4} \Delta \frac{P_{2\max}}{P_2} \\
 &\text{mit } \Omega_2 = \omega_2/\omega_0 \quad \text{und} \quad \Omega_1 = \omega_1/\omega_0
 \end{aligned}$$

Weiter ergeben sich mit Gl. (19) die Gleichungen

$$\begin{aligned}
 (31) \quad c &:= \sqrt{A} = \frac{1}{(\Omega_1 + \Omega_2) \left(\frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2}\right)^2} \sqrt{\Delta \frac{P_{2\max}}{P_2}} \\
 e &:= \sqrt{E} = \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) \Omega_1 \Omega_2}{(\Omega_2 - \Omega_1)^2} \sqrt{\Delta \frac{P_{2\max}}{P_2}} \\
 a^2 + 2cd &:= \frac{3\Omega_2^2 + 2\Omega_1\Omega_2 + 3\Omega_1^2}{(\Omega_1 + \Omega_2)^2 \left(\frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2}\right)^4} \frac{1}{2} \Delta \frac{P_{2\max}}{P_2} \\
 d^2 + 2ab + 2ce &:= \frac{9\Omega_2^4 + 20\Omega_2^3\Omega_1 + 38\Omega_2^2\Omega_1^2 + 20\Omega_2\Omega_1^3 + 9\Omega_1^4}{(\Omega_2 + \Omega_1)^2 (\Omega_2 - \Omega_1)^4} \Delta \frac{P_{2\max}}{P_2} \\
 b^2 + 2de &:= 1 - \frac{4\Omega_1\Omega_2 (3\Omega_2^2 + 2\Omega_1\Omega_2 + 3\Omega_1^2)}{(\Omega_2 - \Omega_1)^4} \frac{1}{2} \Delta \frac{P_{2\max}}{P_2}
 \end{aligned}$$

Die negativen Vorzeichen der oberen zwei Gleichungen folgen zwangsläufig nach Gl. (18).

Es bleiben noch 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten a, b und d zu lösen:

$$\begin{aligned}
 (31a) \quad &a^2 + 2cd = B \\
 &d^2 + 2ab = C - 2ec = C' \\
 &b^2 + 2de = D
 \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung kann man d explizit ausdrücken wie

$$d = -a^2/2c + B/2c$$

Dieses in die zweite und dritte Gleichung eingesetzt liefert

$$b = -\frac{1}{8c^2} a^3 + \frac{B}{4c^2} a - \left( \frac{B^2}{8c^2} - \frac{C'}{2} \right) \frac{1}{a}$$

$$b^2 = \frac{e}{c} a^2 + \left( D - \frac{e}{c} B \right)$$

Nach einer kleinen Zwischenrechnung ist mit Gl. (30) und (31) leicht zu beweisen dass

$$\frac{B^2}{8c^2} - \frac{C'}{2} = 0 \text{ und}$$

$$D - \frac{e}{c} B = 1, \text{ damit}$$

man ein Paar einfachere Gleichungen bekommt

$$(32) \quad b = -\frac{1}{8c^2} a^3 + \frac{B}{4c^2} a$$

$$b^2 = \frac{e}{c} a^2 + 1$$

Aus diese letzte zwei Gleichungen kann man a eliminieren und bekommt als Ergebnis die kubische Gleichung in b<sup>2</sup>

$$(33) \quad 0 = (b^2)^3 - (4D - 1)(b^2)^2 + (4D^2 - 1 - 64ce^3)(b^2) - (2D - 1)^2$$

woraus b und dadurch auch a und d zu lösen sind.

Mit den Werten a, b, c, d und e sind die fünf Schaltelemente aus Gl. (18) zu bestimmen.

Wenn die dimensionslosen Grössen

$$(34) \quad \frac{\omega_0 L_3}{R_1} = l_3, \quad (1 + L_3/L_2 = l_{II}, \quad (1 + L_3/L_1) = l_I$$

$$\omega_0 C_1 R_1 = c_1, \quad \omega_0 C_2 R_2 = c_2$$

eingesetzt werden, bekommt Gl. (18) eine einfachere Form wie folgendes:

$$(18a) \quad a = -\frac{1}{2} l_3 (c_2 \sqrt{t} + c_1 \sqrt{l/t})$$

$$b = -\frac{1}{2} l_{II} \sqrt{t} + \frac{1}{2} l_I \sqrt{l/t}$$

$$c = -\frac{1}{2} l_3 c_1 c_2 \sqrt{t}$$

$$d = \frac{1}{2} \sqrt{t} l_{II} c_1 + \frac{1}{2} \sqrt{t} l_I c_2 + \frac{1}{2} l_3 \sqrt{l/t}$$

$$e = -\frac{1}{2} \sqrt{t} / l_3 (l_I l_{II} - 1)$$

Aus der ersten und dritten Gleichung sind die Gleichungen

$$(35) \quad c_2 = \frac{c}{ac_1 - c} c_1 \frac{1}{t} \text{ und}$$

$$l_3 = 2c \sqrt{t} \left( \frac{1}{c_1} \right)^2 - 2a \sqrt{t} \left( \frac{1}{c_1} \right) \text{ abzuleiten.}$$

Die quadratische Gleichung hat ihren Extremwert

$$(35a) \quad (l_3)_{\max} = -\frac{a^2 \sqrt{t}}{2c}$$

bei Werten von  $c_1$  bzw.  $c_2$ :  $c_1 = (2c/a)$   
 $c_2 = (2c/a) \cdot 1/t$

Aus der zweiten und der fünften Gleichung folgen die Gleichungen

$$(36) \quad l_{II} = \frac{2b}{\sqrt{t}} - \frac{l_I}{t} \quad \text{und}$$

$$l_3 = \frac{1}{2e\sqrt{t}} l_I^2 - \frac{b}{c} l_I - \frac{\sqrt{t}}{2e}$$

Die quadratische Gleichung hat ihren Extremwert

$$(36a) \quad (l_3)_{\max} = \frac{\sqrt{t}}{2e} (1 - b^2)$$

bei Werten von  $l_I$  bzw.  $l_{II}$ :  $l_I = b \sqrt{t}$   
 $l_{II} = b \sqrt{l_I/t}$

Weil nur eine Lösung zu erwarten ist, liegt es auf der Hand, die Werte  $(l_3)_{\max}$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $l_I$  und  $l_{II}$  von den extremen Punkten als Lösung anzunehmen.

Um diese Behauptung zu beweisen, müssen zuerst bewiesen werden, dass die zwei Extremwerte von  $(l_3)_{\max}$  in Gl. (35a) und (36a) gleich sein. Ausserdem muss die vierte Gleichung der Gl. (18a) nach einsetzen der Werten  $(l_3)_{\max}$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $l_I$  und  $l_{II}$ , identisch erfüllt sein.

Der Beweis geht folgenderweise:

Die zwei Werten von  $(l_3)_{\max}$  gleichgesetzt lauten

$$-\frac{a^2 \sqrt{t}}{2c} = \frac{\sqrt{t}}{2e} (1 - b^2) \quad \text{oder anders geschrieben}$$

$$b^2 = \frac{e}{c} a^2 - 1, \quad \text{was identisch ist mit der unteren der beiden}$$

Gleichungen (32).

Damit ist bewiesen worden, dass die zwei Extremwerte von  $(l_3)_{\max}$  gleich sind.

Nach einsetzen der Werte  $(l_3)_{\max}$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $l_I$  und  $l_{II}$  in die vierte Gleichung der Gl. (18a) ergibt sich

$$d = -\frac{1}{4c} a^2 - 2c \frac{b}{a}$$

Dieses eingesetzt in die erste Gleichung der Gl. (31a) ergibt die Gleichung

$$b = -\frac{1}{8c^2} a^3 + \frac{B}{4c^2} a \quad \text{was identisch ist mit Gl. (32)}$$

Die Behauptung, dass die Werte  $(l_3)_{\max}$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $l_I$  und  $l_{II}$  der Gl. (35a) und (36a) eine Lösung der Gl. (18a) sind, ist also damit bewiesen.

Zusammenfassend ergibt sich also folgender Rechenvorgang:

Wenn die zulässige Schwankung  $\Delta P_{2\max}/P_2$  des Leistungsverhältnisses  $P_{2\max}/P_2$ , innerhalb des gewünschten Frequenzbereiches zwischen der oberen und unteren Grenzfrequenz gegeben ist, berechnet man der Reihe nach:

s. Gl. (30) und (31)

$$c = \frac{1}{(\Omega_1 + \Omega_2) \left( \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2} \right)^2} \sqrt{\Delta \frac{P_{2\max}}{P_2}}$$

$$e = \frac{(\Omega_1 + \Omega_2) \Omega_1 \Omega_2}{(\Omega_2 - \Omega_1)^2} \sqrt{\Delta \frac{P_{2\max}}{P_2}}$$

$$D = 1 - \frac{4 \Omega_1 \Omega_2 (3 \Omega_2^2 + 2 \Omega_1 \Omega_2 + 3 \Omega_1^2)}{(\Omega_2 - \Omega_1)^4} \frac{1}{2} \Delta \frac{P_{2\max}}{P_2}$$

$b = \pm \sqrt{b^2}$  ist zu lösen aus der kubische Gleichung (33):

$$(b^2)^3 - (4D - 1)(b^2)^2 + (4D^2 - 1 - 64ce^3)(b^2) - (2D - 1)^2 = 0$$

$a$  ist zu lösen aus der Gleichung (32):

$$a = \sqrt{\frac{c}{e} (b^2 - 1)}$$

Die gewünschte fünf Schaltelemente sind zu bestimmen aus: s. Gl. (34), (35a) und (36a)

$$l_3 = \omega_s L_3 / R_1 = - \frac{a^2}{2c} \sqrt{t} \quad \text{oder} \quad = - \frac{\sqrt{t}}{2e} (b^2 - 1)$$

$$c_1 = \omega_s C_1 \cdot R_1 = \pm 2c/a \quad \text{s. Bild 38 auf s.65}$$

$$(37) \quad c_2 = \omega_s C_2 \cdot R_1 = \pm 2c \cdot a \cdot 1/t$$

$$l_2 = \omega_s L_2 / R_1 = \frac{l_3}{l_{II} - 1} = \frac{- \frac{a^2}{2c} \sqrt{t}}{b \sqrt{t} - 1}$$

$$l_1 = \omega_s L_1 / R_1 = \frac{l_3}{l_I - 1} = \frac{- \frac{a^2}{2c} \sqrt{t}}{b \sqrt{t} - 1} \quad \text{s. Bild 37 auf S.64}$$

**Anmerkung zu der Gl. (37):**

a). Die Gl. (37) zeigt deutlich, dass bei einem Übersetzungsfaktor  $t = b^2$ , die Induktivität  $l_2 = \infty$  und bei  $t = 1/b^2$  die Induktivität  $l_1 = \infty$  ist. Dass Ersatzschaltbild sieht dann wie Bild 12 aus.

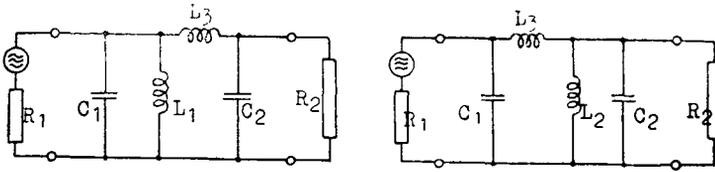


Bild 12

b). Für  $b$  bekommt man immer einen Wert grösser als eins. Im Anhang I sind einige gerechnete Werte in Tabellenform angegeben. Wenn man nur die Übersetzungsfaktoren  $t > 1$  betrachtet ist aus Gl. (37) zu sehen, dass

für  $t > b^2$   $L_2 > 0$  und  
 für  $t < b^2$   $L_2 < 0$  ist.

Bei einem negativen Wert der Induktivität  $L_2$  ist das Ersatzschaltbild nur mit einer Gegeninduktivität zu realisieren.

c). Wenn man die normierten Kurzschlussleitwerte mit dem Ergebnis von Gl. (37) ausrechnet, kommt man zu dem Ergebnis

$$\begin{aligned} \bar{g}_I &= j\omega C_1 R_1 + R_1 j\omega L_1 + R_1 j\omega L_3 \\ &= j \frac{2c}{a} + \frac{b \sqrt{t} - 1}{j \frac{a^2}{2c \sqrt{t}}} + \frac{1}{j \frac{a^2}{2c \sqrt{t}}} = j \left( \frac{2c}{a} + \frac{2bc}{a^2} \right) \\ \bar{g}_{II} &= j\omega C_2 R_1 + R_1 j\omega L_2 + R_1 j\omega L_3 \\ &= j \frac{2c}{a \sqrt{t}} + \frac{b \sqrt{1/t} - 1}{j \frac{a^2}{2c \sqrt{t}}} + \frac{1}{j \frac{a^2}{2c \sqrt{t}}} = j \left( \frac{2c}{a} + \frac{2bc}{a^2} \right) \frac{1}{t} \end{aligned}$$

Es ist deutlich zu sehen, dass die zwei Kurzschlussleitwerte die gleiche Resonanzfrequenz haben, ganz gleich ob  $L_2$  einen positiven oder negativen Wert hat.

Schmalbandige zweikreisige Filter mit diesem Verhalten bezeichnet man als abgestimmte Filter. [2.a] [2.b]

**IV. 4 Rechenbeispiel**

Um einen Vergleich machen zu können, zwischen den Ergebnissen der exakten Rechenmethode und der Rechenmethode des Kapitel III (s. S. 17) für schmale Bandbreite, wird als 1. Beispiel ein zweikreisiger Vierpol mit schmalen Durchlassbereich nach der exakten Rechenmethode gelöst.

**1. Beispiel:** Es sind zu rechnen die fünf Schaltelemente eines zweikreisigen Vierpols, der innerhalb des Durchlassbereichs, ausgedrückt durch das Verhältnis der oberen zur unteren Grenzfrequenz  $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 1,10$ , einen Widerstand  $tR_1$  in  $R_1$  transformiert. Der zugelassene maximale Reflexionsfaktor  $r$  ist  $20\%$ .

Nach Formel (1) ist  $P_{2\max}/P_2 = \frac{1}{1-r^2} = 1,041666$

Der Wert  $P_{2\max}/P_2$  bleibt also in dem Streifen bedingt durch

$$P_{2\max}/P_2 = (1 + \frac{1}{2} \Delta P_{2\max}/P_2) \pm \frac{1}{2} \Delta P_{2\max}/P_2 \\ = 1,020833 \pm 0,020833$$

Nimmt man  $\omega_1 = \omega_0$  an, wird  $\Omega_2 = 1,10$  und  $\Omega_1 = 1,000$ . Weiter sind zu rechnen:

$$c = \frac{\sqrt{\Delta \frac{P_{2\max}}{P_2}}}{(\Omega_1 + \Omega_2) \left( \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2} \right)^2} = -38,8808$$

$$e = -\frac{(\Omega_1 + \Omega_2)\Omega_1\Omega_2}{(\Omega_2 - \Omega_1)^2} \sqrt{\Delta \frac{P_{2\max}}{P_2}} = -47,1527$$

$$D = 1 - \frac{4\Omega_1\Omega_2(3\Omega_2^2 + 2\Omega_1\Omega_2 + 3\Omega_1^2)}{(\Omega_2 - \Omega_1)^4} \frac{1}{2} \Delta \frac{P_{2\max}}{P_2} = -8093,17$$

Die kubische Gleichung

$$(b^2)^3 - (4D - 1)(b^2)^2 + (4D^2 - 1 - 64ce^3)(b^2) - (2D - 1)^2 = 0$$

wird

$$(b^2)^3 + 3,23737 \cdot 10^4 (b^2)^2 + 1,12139 \cdot 10^6 (b^2) - 2,62030 \cdot 10^8 = 0$$

Die einzige positive Lösung lautet  $(b^2) = 74,3$   
oder  $(b) = 8,62$

a wird den Wert  $-\sqrt{\frac{c}{e}(b^2 - 1)} = -7,77$  annehmen.

Die fünf normierten Grössen der Schaltelemente lauten, z.B. für einen Übersetzungsfaktor  $t = 4$ ,

$$l_3 = \omega_0 L_3 / R_1 = -\frac{a^2}{2c} \sqrt{t} = 1,55$$

$$c_1 = \omega_0 C_1 \cdot R_1 = +2c/a = 10,01$$

$$c_2 = \omega_0 C_2 \cdot R_1 = -2c/a \cdot 1/t = 2,50$$

$$l_1 = \omega_c L_1 / R_1 = + \frac{l_3}{b/\sqrt{t} - 1} = 0,0957$$

$$l_2 = \omega_c L_2 / R_2 = - \frac{l_3}{b/\sqrt{t} - 1} = 0,470$$

Um es numerisch mit dem Ergebnis der einfachen Rechenmethode des Kapitels III zu vergleichen, ist es notwendig, die obigen normierten Grössen auf die Bandmittenfrequenz  $\omega_m = 1,05 \omega_c$  umzurechnen. Die normierten Werte bei  $1,05 \omega$  lauten

$$\begin{array}{ll} l_3 = 1,63 & \dots \dots \dots = 1,63 \\ c_1 = 10,5 & \dots \dots \dots = 10,0 \\ c_2 = 2,63 & \dots \dots \dots = 2,50 \\ l_1 = 0,100 & \dots \dots \dots = 0,106 \\ l_2 = 0,494 & \dots \dots \dots = 0,520 \end{array}$$

Auf der rechten Seite sind die Schaltelemente des gleichen Vierpols, die Ergebnis der Rechenmethode für schmale Bandbreite in Kap. III auf Seite 24, geschrieben worden. Die Abweichungen sind kleiner als  $10^0$ , was auch zu erwarten war.

Auf Seite 41 ist der Ortskurve des Eingangswiderstandes gezeichnet worden. Symmetrie der Durchlasskurve ist nur möglich, wenn man die Vernachlässigungen für schmale Bandbreite zulässt.

Es ist noch zu bemerken, dass man für einen Übersetzungsfaktor  $t > b^2$  (in unserem Fall = 74,3) immer ein negatives  $L_2$  als Ergebnis bekommt. Das besagt, dass man transformierende gekoppelte zweikreisige Schaltungen mit Tschebyscheffschem Verhalten nicht für jeden Übersetzungsfaktor ohne Gegeninduktivität realisieren kann, auch nicht für schmale Bandbreite.

**2. Beispiel:** Es sollen die Grössen der fünf Schaltelemente einer gekoppelten zweikreisigen Schaltung bestimmt werden, bei der obere und untere Grenzfrequenz um den Faktor 4 auseinander liegen. In dem obigen Frequenzbereich soll  $tR_1$  in  $R_1$  transformiert werden, wobei ein Reflexionsfaktor von maximal 20% zugelassen ist.

Wie bei dem vorigen Beispiel ist der Wert

$$P_{2\max}/P_2 = 1,020833 \pm 0,020833$$

Bei  $\omega_1 = \omega_c$  wird  $\Omega_2 = 4,00$  und  $\Omega_1 = 1,00$

Weiter sind

$$\begin{array}{l} c = -1,8144 \cdot 10^{-2} \\ e = -0,45361 \\ D = 0,75720 \end{array}$$

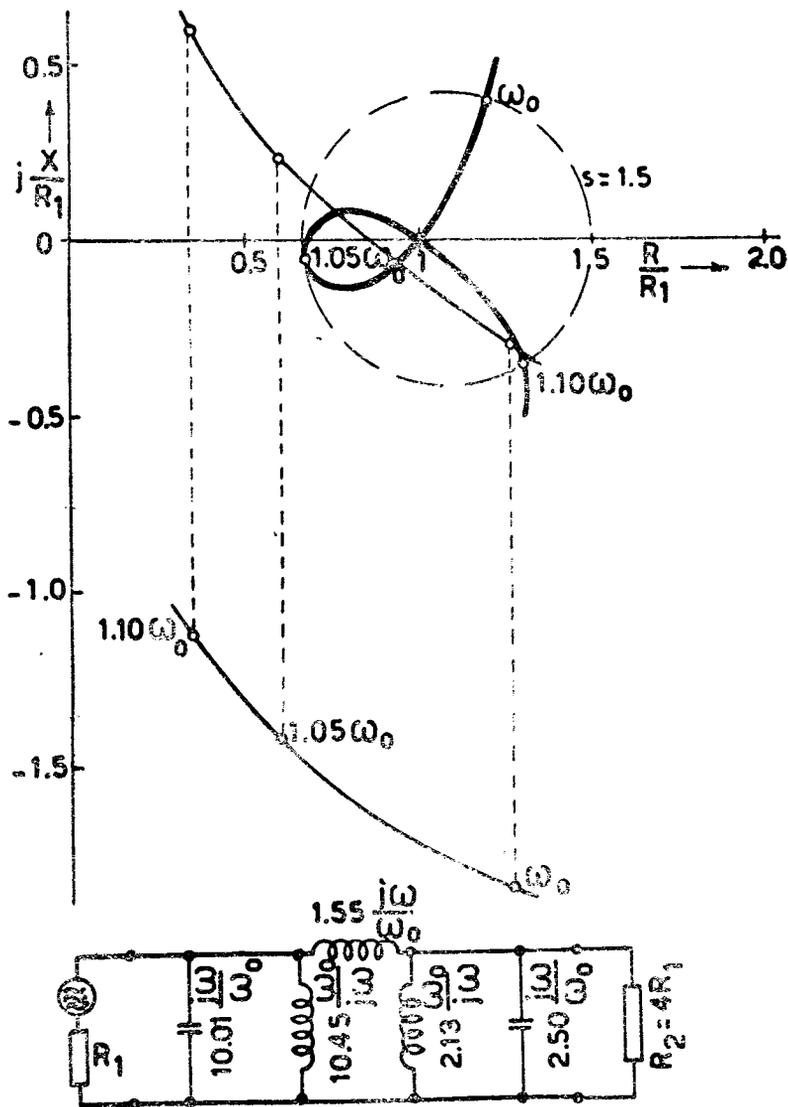


Bild 13

Ortskurve des Eingangswiderstandes bei:

$$t = R_2/R_1 = 4$$

$$\Omega_2/\Omega_1 = 1,1$$

Gerechnet mit der exakten Rechenmethode nach Kapitel IV.  
 Zu bemerken ist die unsymmetrische Form der Ortskurve.

Die einzige positive Lösung der kubische Gleichung  
 $(b^2)^3 - 2,0288(b^2)^2 + 1,1850(b^2) - 0,26461 = 0$   
 ist  $(b^2) = 1,2503$  oder  $b = 1,1181$

a hat den Wert  $-\sqrt{\frac{c}{e}(b^2 - 1)} = -0,10005$

Die fünf Schaltelemente für einen Übersetzungsfaktor  $t = 4$  haben die Grösse

$$\begin{aligned}l_3 &= \omega_c L_3 / R_1 = 0,5517 \\c_1 &= \omega_c C_1 \cdot R_1 = 0,3625 \\c_2 &= \omega_c C_2 \cdot R_1 = 0,09068 \\l_1 &= \omega_c L_1 / R_1 = 0,4462 \\l_2 &= \omega_c L_2 / R_1 = -1,251\end{aligned}$$

Das Ersatzschaltbild hat eine negative Induktivität  $L_2$  und ist nur mit einer Gegeninduktivität zu realisieren.

Auf Seite 43 ist die Ortskurve des Eingangswiderstandes gezeichnet worden.

Die drei Extremwerte der Durchlasskurve treten auf bei

$$\Omega_\alpha = \sqrt{\frac{\Omega_2^2 + \Omega_1^2}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2} \right)^2} \left\{ 1 + \sqrt{1 + 8 \left( \frac{\Omega_2 + \Omega_1}{\Omega_2 - \Omega_1} \right)^2} \right\} = 1,40$$

$$\Omega_m = \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2} = 2,50$$

$$\Omega_\beta = \sqrt{\frac{\Omega_2^2 + \Omega_1^2}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2} \right)^2} \left\{ 1 - \sqrt{1 + 8 \left( \frac{\Omega_2 + \Omega_1}{\Omega_2 - \Omega_1} \right)^2} \right\} = 3,58$$

nach der Gl. (29) auf Seite 33.

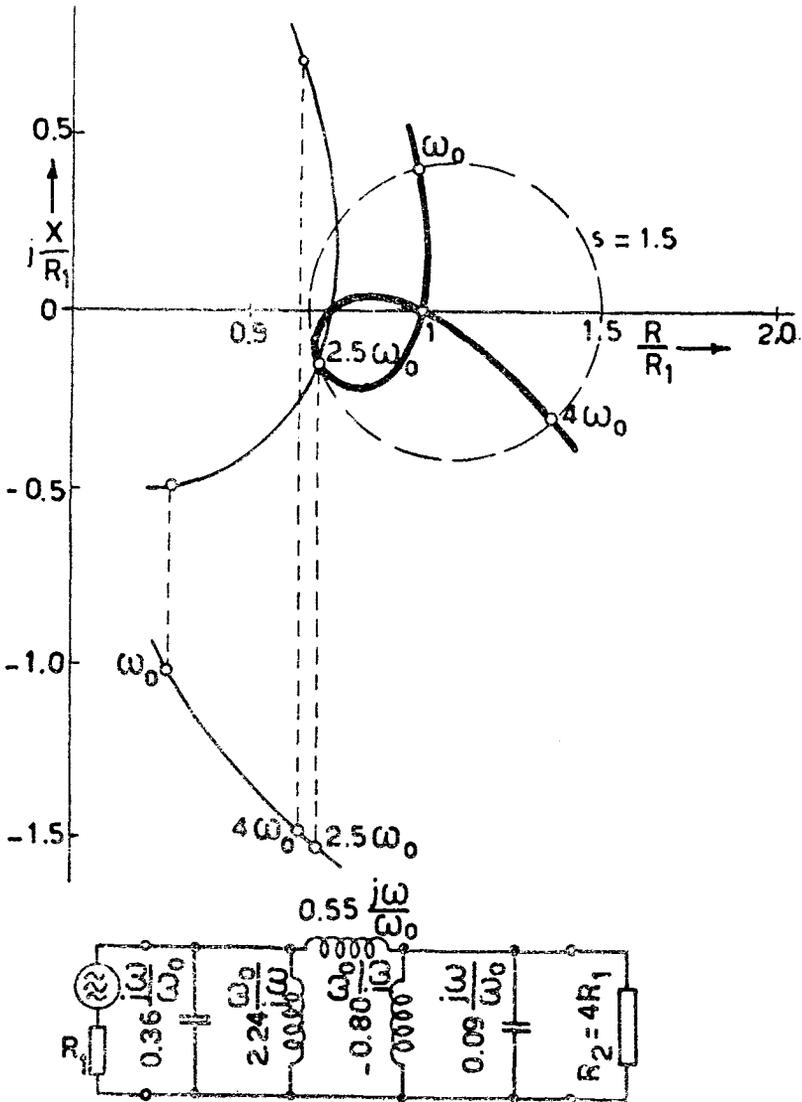


Bild 14

Ortskuve des Eingangswiderstandes bei

$$t = R_2/R_1 = 4$$

$$\Omega_2/\Omega_1 = 4$$

IV. 5 Dimensionierung bei der Realisierung mit einem Übertrager

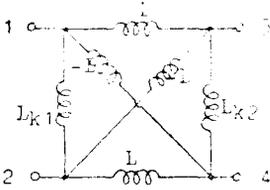


Bild 15

Gleichgültig, ob alle Querinduktivitäten  $L_1$  und  $L_2$  positiv sind, oder eine davon einen negativen Wert hat, ist das Ersatzschaltbild durch einen Übertrager zu realisieren. Der gewünschte Streuungsfaktor  $\sigma$  für einen Übertrager rechnet man nach dem Ersatzschaltbild in Bild 15, wie es in [4] abgeleitet wird. Durch Verbinden der Klemme 2 und 4 entsteht das übliche Ersatzschaltbild für

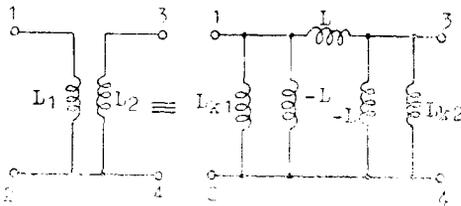


Bild 16

einen einfachen Übertrager in  $\pi$ -Schaltung, wie es Bild 16 zeigt. Die dazugehörigen Zeichen bedeuten folgendes:  $L_1$  und  $L_2$  sind die primären und sekundären Leerlaufinduktivitäten.  $L_{k1}$  und  $L_{k2}$  sind die primären und sekundären Kurzschlussinduktivitäten.

L hat den Wert 
$$L = \frac{L_{k1} \bar{I}_{k2}}{1 - \sigma_{\bar{u}}} = - \frac{L_{k1} \bar{I}_{k2}}{1 - \frac{L_{k1}}{L_1}}$$
 wo der

Streuungsfaktor mit  $\sigma_{\bar{u}}$  angedeutet wird.

Weiter gilt  $\sigma_{\bar{u}} = L_{k1} / L_1 = 1 - k^2$ , wo k der Kopplungsfaktor ist. Dieses Ersatzschaltbild, verglichen mit den drei Induktivitäten der induktiv gekoppelten Schaltung, ergibt:

$$L_{k1} = \frac{-L L_{k1}}{L_{k1} - L} \quad L_{k2} = \frac{-L I_{k2}}{I_{k2} - L} \quad L_3 = L$$

Hieraus kann man  $L_{k1}$  und  $L_{k2}$  explizit in  $L_1$ ,  $L_2$  und  $L_3$  ausdrücken wie folgt:

$$(38) \quad L_{k1} = \frac{L_1 L_3}{L_1 + L_3} \quad L_{k2} = \frac{L_2 L_3}{L_2 + L_3}$$

Aus der vorigen Beziehung zwischen L,  $L_{k1}$ ,  $L_{k2}$  und  $\sigma_{\bar{u}}$  ist abzuleiten

$$1 - \sigma_{\bar{u}} = \frac{L_{k1} L_{k2}}{L_2} = \frac{L_1 L_2}{(L_1 + L_3)(L_2 + L_3)}$$

Wenn die normierten Werte der Gl. (37) eingesetzt werden, ergibt sich

$$1 - \sigma_{\bar{u}} = \frac{\left(\frac{1}{b\sqrt{t-1}}\right) \left(\frac{1}{b'\sqrt{t-1}}\right)}{\left(\frac{1}{b\sqrt{t-1}} + 1\right) \left(\frac{1}{b'\sqrt{t-1}} + 1\right)}$$

Der Bruch mit  $(b\sqrt{t-1})(b'\sqrt{t-1})$  multipliziert führt zu dem Ergebnis

$$(39) \quad 1 - \sigma_{\bar{u}} = 1/b^2 \quad \text{oder} \quad \sigma_{\bar{u}} = 1 - 1/b^2$$

Weil  $\sigma_{\bar{u}} = 1 - k^2$  ist, folgt  $k = 1/b$

Es ist bekannt aus physikalischen Überlegungen, dass der Kopplungsfaktor  $k$  immer kleiner als eins sein muss. Folglich ist die Zwischengrösse  $b$  immer grösser als eins.

Weiter ist zu bemerken, dass der Streuungsfaktor unabhängig ist von dem Übersetzungsfaktor  $t$

Auf Seite .. ist der Streuungsfaktor  $\sigma_{\bar{u}}$  in Abhängigkeit von dem Verhältnis  $\Omega_2/\Omega_1$  aufgetragen worden. Der maximale Reflexionsfaktor oder die Welligkeit werden als Parameter benutzt.

Die gewünschte normierte primäre und sekundäre Leerlaufinduktivität bekommt man aus Gl. (37) und (38) wie folgt:

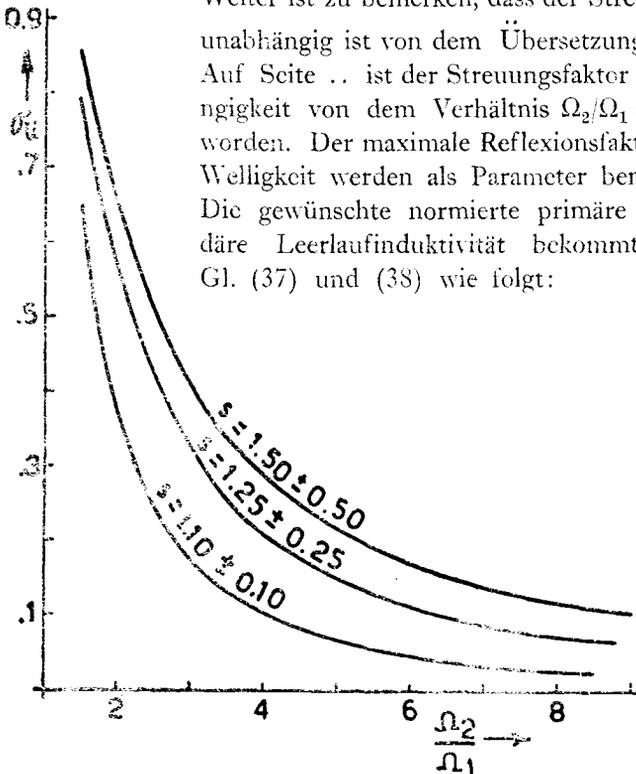


Bild 17 Streuungsfaktor der zwei Wicklungen eines Übertragers als Funktion des Verhältnisses  $\Omega_2/\Omega_1$  mit der Welligkeitschwankung  $s_{\pm} \pm \Delta s$  als Parameter.  $\Omega_2$  = obere normierte Frequenz  
 $\Omega_1$  = untere normierte Frequenz

$$\begin{aligned} \omega L_1/R_1 &= \frac{\omega L_{k1}}{R_1} \frac{1}{\sigma_{\dot{u}}} = \frac{\omega L_1 L_3}{R_1 L_1 + L_3} \frac{1}{\sigma_{\dot{u}}} \\ &= -\frac{a^2}{2c} \sqrt{t} \frac{\frac{1}{b\sqrt{t}-1}}{\frac{1}{b\sqrt{t}-1} + 1} \frac{1}{\sigma_{\dot{u}}} \quad \text{oder} \\ (40) \quad \omega L_1/R_1 &= -\frac{a^2}{2c} \frac{1}{b-1/b} \quad \text{s.Bild 37, S. 66} \end{aligned}$$

Auf die gleiche Weise bekommt man

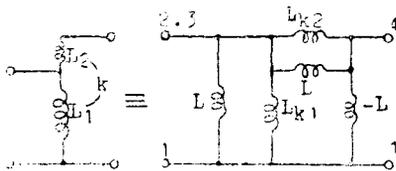
$$(41) \quad \omega L_2/R_1 = -\frac{a^2}{2c} \frac{1}{b-1/b} t$$

Es ist zu bemerken dass die Grösse der Primärseite nur von Bandbreite und Welligkeit abhängen, nicht aber von dem Übersetzungsfaktor  $t$ .

#### IV 6. Dimensionierung bei der Realisierung mit einen Sparübertrager.

Die induktiv gekoppelte zweikreisige Schaltung ist durch einen Sparübertrager zu realisieren, wenn eine von seinen Querinduktivitäten einen negativen Weart hat.

Den gewünschten Streuungsfaktor für einen Sparübertrager berechnet man aus dem Ersatzschaltbild in Bild 18.



Dieses Ersatzschaltbild entsteht aus dem Bild 15 wenn die Klemme 2 und 3 verbunden werden.

Die dazugehörigen Zeichen bedeuten folgendes:

Bild 18

$L_1$  und  $L_2$  sind die Lcerlaufinduktivitäten, wie im Bild 18 gezeichnet.  $L_{k1}$  ist die Kurzschlussinduktivität an den Klemmen der Spule  $L_1$  gemessen, wenn die Spule  $L_2$  kurzgeschlossen wird.  $L_{k2}$  ist die Kurzschlussinduktivität an den Klemmen der Spule  $L_2$  gemessen, wenn die Spule  $L_1$  kurzgeschlossen wird.

$k^2 = 1 - \sigma_{\dot{u}}$  ist der Kopplungsfaktor zwischen der Spule  $L_1$  und  $L_2$ .

Weiter gilt die Beziehung 
$$L = \frac{L_{k1} L_{k2}}{1 - \sigma_{\dot{u}}} = \frac{L_{k1} L_{k2}}{1 - \frac{L_{k1}}{L_1}}$$

Wenn das obige Ersatzschaltbild mit den drei Induktivitäten der induktiv gekoppelten zweikreisigen Schaltung verglichen wird, ergeben sich:

$$L_1 = \frac{LL_{k1}}{L + L_{k1}} \quad L_2 = -L \quad L_3 = \frac{LL_{k2}}{L + L_{k2}}$$

$L_{k1}$  und  $L_{k2}$  explizit ausgedrückt, ergeben sich zu

$$(42) \quad L_{k1} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \quad \text{und} \quad L_{k2} = \frac{L_2 L_3}{L_2 + L_3}$$

Aus der Beziehung zwischen  $L$ ,  $L_{k1}$ ,  $L_{k2}$  und  $\sigma_{sü}$  kommt man zu dem Ergebnis

$$1 - \sigma_{sü} = L_{k1} L_{k2} / L^2 = \frac{L_1 L_3}{(L_1 + L_2)(L_2 + L_3)}$$

Die Werte von Gl. (47) eingesetzt liefern

$$1 - \sigma_{sü} = \frac{1}{b\sqrt{t} - 1} \left/ \left( \frac{1}{b\sqrt{t} - 1} + \frac{1}{b/\sqrt{t} - 1} \right) \left( 1 + \frac{1}{b/\sqrt{t} - 1} \right) \right.$$

Nach einer kleinen Rechenarbeit kommt man zu dem Ergebnis

$$(43) \quad \sigma_{sü} = \frac{\left(b - \frac{1}{b}\right) \sqrt{t}}{b \left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}}\right) - 2}$$

Der Index sü bezieht sich auf Sparübertrager.

Der Streuungsfaktor  $\sigma_{sü}$  wird sich dem Grenzwert

$$(\sigma_{sü})_{t=\infty} = 1 - 1/b^2$$

nähern, wenn der Übersetzungsfaktor  $t$  gegen  $\infty$  geht.

Dieser Grenzwert ist genau das gleiche wie der Streuungsfaktor  $\sigma_{ü}$  bei einem Übertrager des vorigen Kapitels, wie zu erwarten war.

Die Werte der Induktivitäten für die zwei Spulen  $L_1$  und  $L_2$  ergeben sich mit Gl. (42) wie folgt:

$$\omega_o L_1 / R_1 = \frac{\omega_o L_{k1}}{R_1} \frac{1}{\sigma} = \frac{\omega_o}{R_1} \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \frac{1}{\sigma}$$

$$\omega_o L_2 / R_1 = \frac{\omega_o L_{k2}}{R_1} \frac{1}{\sigma} = \frac{\omega_o}{R_1} \frac{L_2 L_3}{L_2 + L_3} \frac{1}{\sigma}$$

Gl. (43 und (37) eingesetzt, kommt man nach einer kurzen Rechenarbeit zu dem Ergebnis:

$$(44) \quad \begin{aligned} \omega_0 I_1 / R_1 &= \frac{a^2}{2c} \frac{1}{b - \frac{1}{b}} \quad \text{s. Bild 37 auf S. ...} \\ \omega_0 I_2 / R_1 &= \frac{a^2}{2c} \frac{b(\sqrt{t} + \sqrt{1/t}) - 2}{b(b - 1/b)} \sqrt{t} \end{aligned}$$

Es ist hier auch zu bemerken, dass die Grössen der Primärseite nur von Bandbreite und Welligkeit abhängen, nicht aber von dem Übersetzungsfaktor  $t$ .

Auf den nächsten drei Seiten ist der berechnete Streuungsfaktor  $\sigma_{st}$  als Funktion des Übersetzungsfaktors  $t$ , mit dem Verhältnis  $\Omega_2/\Omega_1$  als Parameter gezeichnet worden.

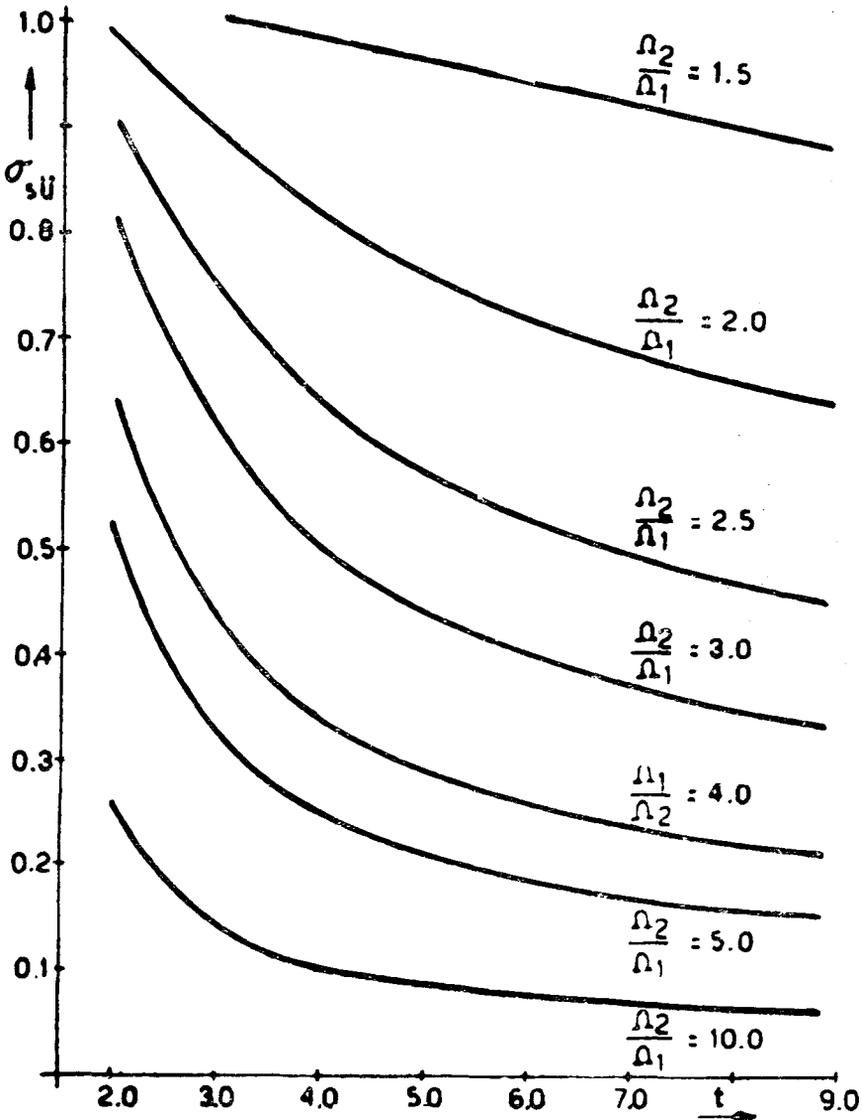


Bild 19. Streuungsfaktor  $\sigma_{sü}$  der zwei Teilwicklungen eines Sparübertragers als Funktion des Übersetzungsfaktors  $t = R_2/R_1$  mit dem Verhältnis  $\Omega_2/\Omega_1$  als Parameter.

Welligkeitschwankung  $1,10 \pm 0,10$

$\Omega_2$  = obere normierte Grenzfrequenz

$\Omega_1$  = untere normierte Grenzfrequenz

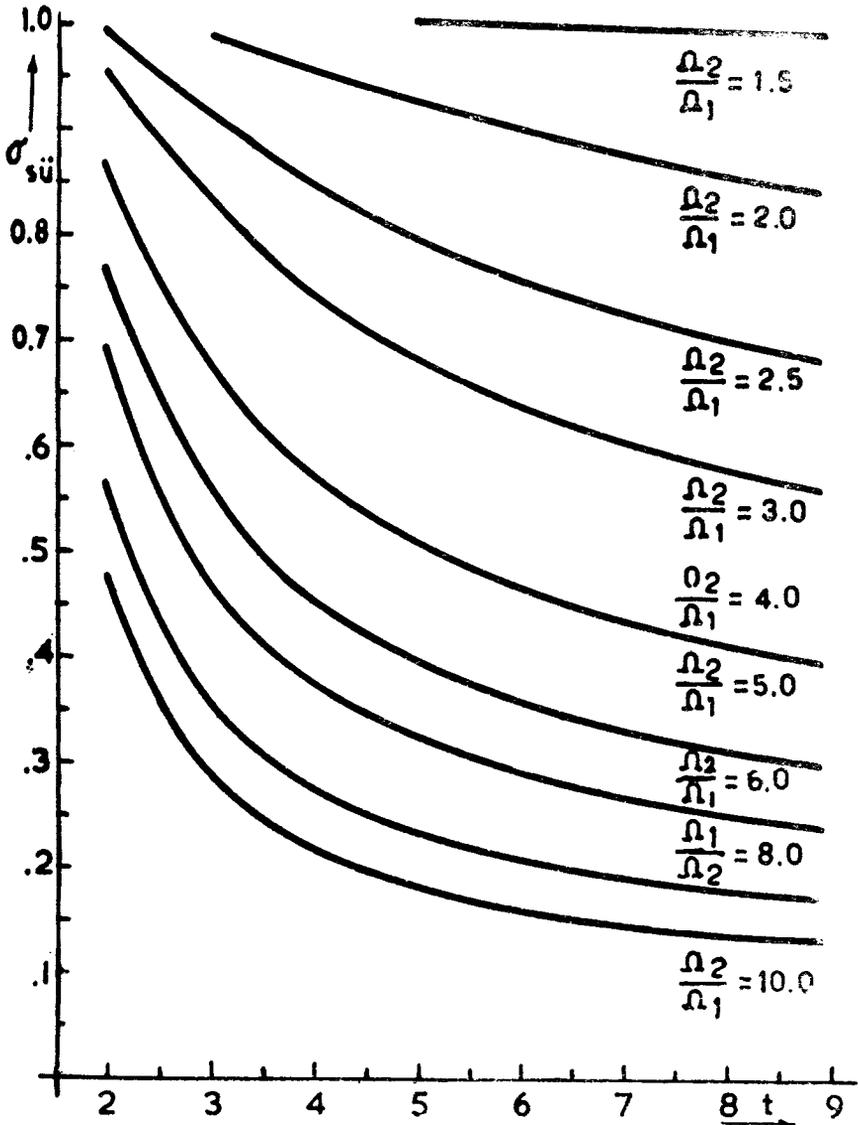


Bild. 20 Streuungsfaktor  $\sigma_{sü}$  der zwei Teilwicklungen eines Sparübertragers als Funktion des Übersetzungsfaktors  $t = R_2/R_1$  mit dem Verhältnis  $\Omega_2/\Omega_1$  als Parameter.

Welligkeitschwankung  $1,25 \pm 0,25$

$\Omega_2$  = obere normierte Grenzfrequenz

$\Omega_1$  = untere normierte Grenzfrequenz

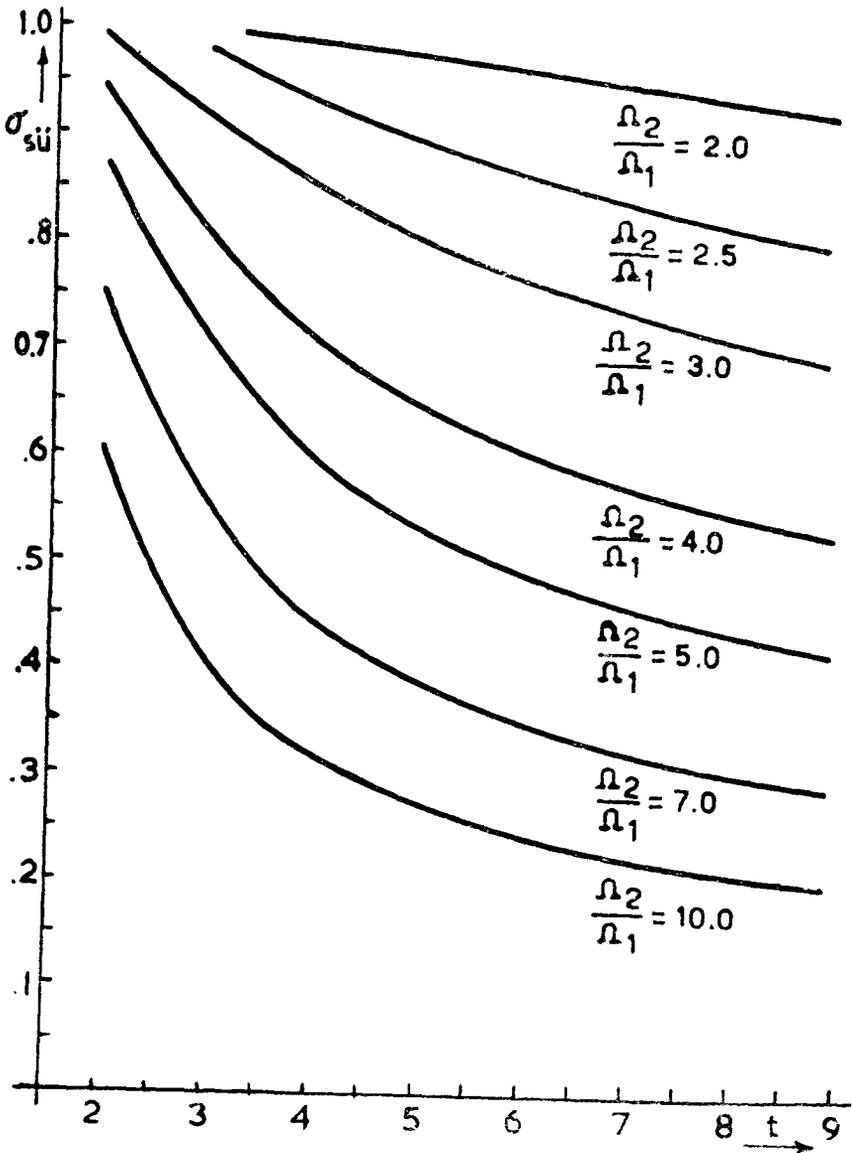


Bild. 21 Streuungsfaktor  $\sigma_{sü}$  der zwei Teilwicklungen eines Sparübertragers als Funktion des Übersetzungsfaktors  $t = R_2/R_1$  mit dem Verhältnis  $\Omega_2/\Omega_1$  als Parameter.

Welligkeitschwankung  $1,50 \pm 0,50$

$\Omega_2$  = obere normierte Grenzfrequenz

$\Omega_1$  = untere normierte Grenzfrequenz

#### IV. 7 Dimensionierung bei der Realisierung mit einem symmetrischen Sparübertrager

Zur Symmetrierung wird häufig die Symmetrierschleife nach Bild 22 benutzt. Sie besteht aus zwei Rohren, A und B die bei a leitend miteinander verbunden sind, und deren andere

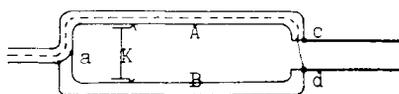


Bild 22

Enden sich bei c und d gegenüber stehen. Bei c tritt der Innenleiter des Rohr A aus und ist mit Rohr B bei Punkt d verbunden. Die erdsymmetrische Leitung wird an c und d angeschlossen. Eine Änderung des Wellenwiderstandes tritt dabei nicht auf. Nun liegt an den Punkten c und d parallel zum Wellenwiderstand des koaxialen Kabels der Blindwiderstand der aus den Rohren A und B bestehende Schleife. Dieser Blindwiderstand kann für eine Frequenz durch Herstellung einer  $\lambda/4$  Resonanz mittels des Kurzschlusschiebers K sehr gross gemacht werden, sodass es für diese Frequenzen nicht stört. Bei anderen Frequenzen hat dann allerdings der Blindwiderstand eine endlich Grösse, was u.U. für Kompensationszwecke vorteilhaft ist. Macht man nun den Wellenwiderstand der Rohrschleife

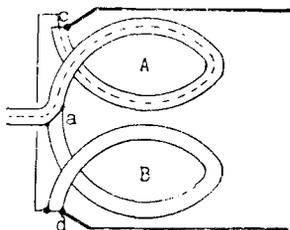


Bild 23

gross gegenüber dem Wellenwiderstand des Kabels, so ist der Einfluss des Blindwiderstandes in grossen Bereichen gering und es kann in vielen Fällen auf eine Abstimmung verzichtet werden.

Bild 23 zeigt das Prinzip einer Anordnung, bei der der Wellenwiderstand durch Vergrössern der Induktivität stark erhöht wurde.

Der Unterschied gegenüber Bild 22 besteht darin, dass die durch die Rohre A und B begrenzte Fläche möglichst gross ist und dass jedes der beiden Rohre A und B mehr als eine halbe Windung bildet. Der zusätzliche Blindwiderstand zwischen den Punkten c und d lässt sich darstellen als Blindwiderstand der aus den Rohren A und B bestehenden Spule, der genügend weit unterhalb der Eigenresonanz das Verhalten einer reinen Induktivität zeigt und auf bekannte Weise berechnet werden kann.

Verlängert man nun die Rohre A und B über die Punkte c und d hinaus, bis zu den Punkten e und f, wie es in Bild 24 dargestellt ist, so erhält man einen Symmetrier-Sparübertrager.

Der Widerstand zwischen den Punkten e und f ist dann höher als der Wellenwiderstand des bei a angeschlossenen Kabels.

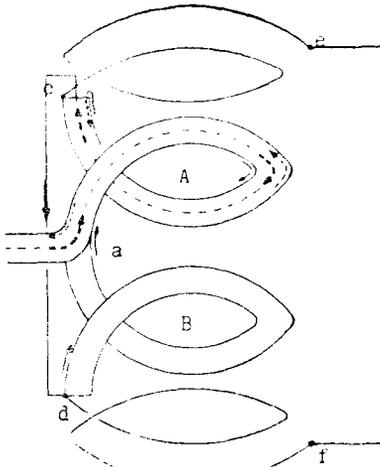


Bild 24

Man nimmt an, dass bei der Betriebsfrequenz genügender Skinneffekt herrscht, sodass die Ströme auf der Innenseite und der Aussenseite der Aussenleiter von einander gut abgeschirmt sind. In Bild 24 sind die momentanen Stromrichtungen gezeichnet worden. Der Strom auf dem Innenleiter und auf der Innenseite des Aussenleiters des koaxialen Kabels A kompensieren sich gegenseitig, sodass sie für das Feld ausserhalb des koaxialen Kabels keinen Beitrag liefern. Wenn man die Symmetrieeigenschaften ausser Betracht lässt und nur

die Transformationseigenschaften betrachtet, kann man Bild 24 in das untenstehende Bild 25 umwandeln.

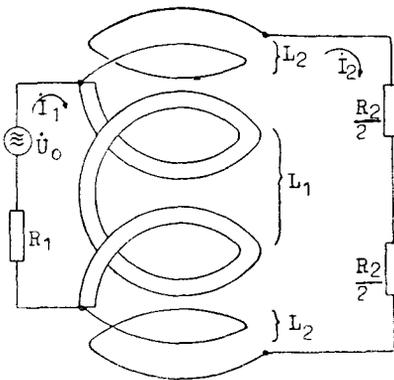


Bild 25

$L_1$ ,  $L_2$  und  $L_2$  stellen die Induktivitäten der einzelnen Wicklungen dar. Die dazugehörigen Gegeninduktivitäten werden mit  $M = k_{ssü} L_1 L_2$  und  $M' = k' L_2$  gekennzeichnet.

Die Maschengleichungen lauten:

$$\dot{U}_0 = \dot{I}_1(R_1 + j\omega L_1) - \dot{I}_2(j\omega L_1 + 2j\omega M)$$

$$0 = -\dot{I}_1(j\omega L_1 + 2j\omega M) + \dot{I}_2(R_2 + 2j\omega L_2 + 2j\omega M' + j\omega L_1 + 4j\omega M)$$

oder

$$\dot{U}_0 = \dot{I}_1(R_1 - 2j\omega M) + (\dot{I}_1 - \dot{I}_2)(j\omega L_1 + 2j\omega M)$$

$$0 = \dot{I}_2(R_2 + 2j\omega L_2 + 2j\omega M + 2j\omega M') - (\dot{I}_1 - \dot{I}_2)(j\omega L_1 + 2j\omega M)$$

Das Ersatzschaltbild ohne Gegeninduktivität sieht wie in das nächstehende Bild 26 aus

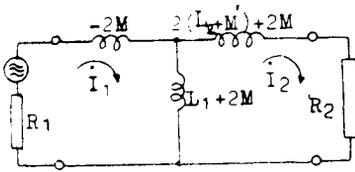


Bild 26

Das Ersatzschaltbild hat eine negative Induktivität  $-2M$

Wenn man die drei Induktivitäten des Vierpols mit Tschebyscheffschem Übertragungsverhalten in Bild 9 in Sternschaltung umwandelt, ergibt sich

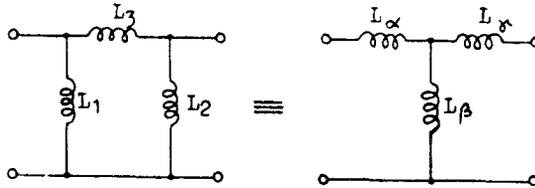


Bild 27

mit der normierten Größen:

$$\omega_c I_1 / R_1 = l_1 = \frac{l_3}{b\sqrt{t}-1}$$

$$\omega_c I_\alpha / R_1 = -\frac{a^2}{2c} \sqrt{t} \frac{b/\sqrt{t}-1}{b^2-1}$$

$$\omega_c I_2 / R_1 = l_2 = \frac{l_3}{b\sqrt{t}-1}$$

$$\omega_c I_\beta / R_1 = -\frac{a^2}{2c} \sqrt{t} \frac{1}{b^2-1}$$

$$\omega_c I_3 / R_3 = l_3 = -\frac{a^2}{2c} \sqrt{t}$$

$$\omega_c I_\gamma / R_1 = -\frac{a^2}{2c} \sqrt{t} \frac{b/\sqrt{t}-1}{b^2-1}$$

Beim Vergleich der zwei Sternschaltungen in Bild 26 und Bild 27 ergeben sich die Gleichungen

$$\frac{\omega_c(-2M)}{R_1} = -\frac{a^2}{2c} \sqrt{t} \frac{b/\sqrt{t}-1}{b^2-1}$$

$$\frac{\omega_c(I_1 + 2M)}{R_1} = -\frac{a^2}{2c} \sqrt{t} \frac{1}{b^2-1}$$

$$\frac{\omega_c(2L_2 + 2M + 2M')}{R_1} = -\frac{a^2}{2c} \sqrt{t} \frac{b/\sqrt{t}-1}{b^2-1}$$

Daraus erhält man die Größen  $M$ ,  $L_1$  und  $L_2$  explizit:

$$\omega_c M / R_1 = \frac{1}{2} \frac{a^2}{2c} \sqrt{t} \frac{b/\sqrt{t}-1}{b^2-1}$$

$$(45) \quad \omega_c I_{L_1} / R_1 = - \frac{a^2}{2c} \frac{1}{b - 1/b} \quad \text{s. Bild 37 S. ...}$$

$$\omega_c I_{L_2} / R_1 = - \frac{a^2}{2c} \sqrt{t} \frac{b(\sqrt{t} + \sqrt{1/t}) - 2}{b^2 - 1} \frac{1}{2(1 + k')}$$

Zu bemerken ist, dass die Grössen der Primärseite nur von Bandbreite und Welligkeit abhängen und sind gleich gross wie bei der Sparübertrager der vorigen Kapitel. Mit  $k'$  wird der Kopplungsfaktor zwischen den zwei Spulen  $L_2$  gemeint.

Den Kopplungsfaktor  $k_{ssü}$  bekommt man aus

$$k_{ssü}^2 = \frac{M^2}{L_1 I_{L_2}} = \frac{\frac{1}{4} \left( \frac{b}{\sqrt{t}} - 1 \right)^2}{\frac{b}{\sqrt{t}} \frac{1}{2(1+k')} \{b(\sqrt{t} + 1/\sqrt{t}) - 2\}}$$

$$k_{ssü}^2 = \frac{1 + k' \frac{b/\sqrt{t} + \sqrt{t}/b - 2}{b(\sqrt{t} + 1/\sqrt{t}) - 2}}{2}$$

worin der Index  $ssü$  sich auf Symmetrier-Sparübertrager bezieht. Mit Hilfe Gl. (43) ist das leicht umzuformen in

$$(46) \quad k_{ssü}^2 = (1 + k') \frac{1 - \sigma_{sü}}{2}$$

Worin der Index  $sü$  sich auf Sparübertrager der vorigen Kapitel bezieht. Der Streuungsfaktor eines Symmetrier-Sparübertrager ist

$$\sigma_{ssü} = 1 - k_{ssü}^2 = 1 - (1 + k') \frac{1 - \sigma_{sü}}{2} \quad \text{oder}$$

$$(47) \quad \sigma_{ssü} = \sigma_{sü} + (1 - k') \frac{1 - \sigma_{sü}}{2}$$

Bei  $k' = 0$  hat man den grössten Streuungsfaktor nämlich

$$(\sigma_{ssü})_{\max} = \sigma_{sü} + \frac{1 - \sigma_{sü}}{2} \quad \text{und bei}$$

$k' = 1$  kommt man zu dem Ausdruck

$$\sigma_{ssü} = \sigma_{sü}$$

was zu erwarten war.

#### IV. 8 Kapazitiv gekoppelte zweikreisige Schaltung bei beliebiger Bandbreite

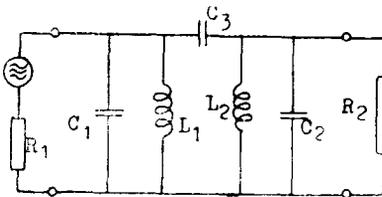


Bild 28

Die Elemente der Kettenmatrix der kapazitiv gekoppelten Schaltung lauten:

$$a_{11} = (1 + C_2/C_3) - \frac{1}{L_2 C_3} \frac{1}{\omega_2}$$

$$a_{22} = (1 + C_1/C_3) - \frac{1}{L_1 C_3} \frac{1}{\omega^2}$$

$$a_{12} = \frac{1}{j\omega C_3}$$

$$a_{21} = -\frac{1}{j\omega^3} \frac{1}{L_1 L_2 C_3} - \frac{1}{j\omega} \frac{1}{L_1} (1 + C_2/C_3) + \frac{1}{L_2} (1 + C_1/C_3) - j\omega C_3 \{(1 + C_2/C_3)(1 + C_1/C_3) - 1\}$$

Wenn man diese mit den äquivalenten Elementen bei der induktiv gekoppelten zweikreisigen Schaltung vergleicht, sieht man deutlich, dass man alle Ergebnisse für die induktiv gekoppelte Schaltung übernehmen kann, wenn statt

$$\begin{array}{l} \Omega = \omega_1 \omega_2 \\ j \frac{\omega_2 L_3}{R_1} \\ j \frac{\omega_2 L_2}{R_1} \\ j \frac{\omega_2 L_1}{R_1} \\ j \omega_2 C_1 R_1 \\ j \omega_2 C_2 R_1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{-----} \\ \text{-----} \\ \text{-----} \\ \text{-----} \\ \text{-----} \\ \text{-----} \end{array} \quad \begin{array}{l} 1/\Omega = \omega_2/\omega \\ \frac{1}{j\omega_2 C_3 R_1} \\ \frac{1}{j\omega_2 C_2 R_1} \\ \frac{1}{j\omega_2 C_1 R_1} \\ \frac{R_1}{j\omega_2 L_1} \\ \frac{R_1}{j\omega_2 L_2} \end{array}$$

genommen wird.

Hieraus ist zu entnehmen, dass eine kapazitiv gekoppelte zweikreisige Schaltung mit Tschebysheffschem Übertragungsverhalten für beliebige Bandbreite, nur für einen Übersetzungsfaktor  $t < b^2$  zu realisieren ist, weil eine negative Kapazität nicht mit passiven Schaltelementen zu realisieren ist.

**Biespiel:** Für ein Frequenzverhältnis  $\Omega_2/\Omega_1 = 2$  und ein Leistungsverhältnis

$$P_{2\max}/P_2 = 1,020833 \pm 0,020833 \quad (r = 20\%)$$

bekommt man  $b^2 = 2,254$  bzw.  $b = 1,501$

Für eine Übersetzungsfaktor  $t = 2$  sind die normierte Grösse der Schaltelemente

$$\frac{1}{\omega_0 C_3 R_1} = 0,723$$

$$\omega_0 C_1 R_1 = 1,55$$

$$\omega_0 C_2 R_1 = 0,0849$$

$$\frac{R_1}{\omega_0 L_1} = 1,03$$

$$\frac{R_1}{\omega_0 L_2} = 0,516$$

Die Ortskurve ist auf der nächsten Seite gezeichnet worden.

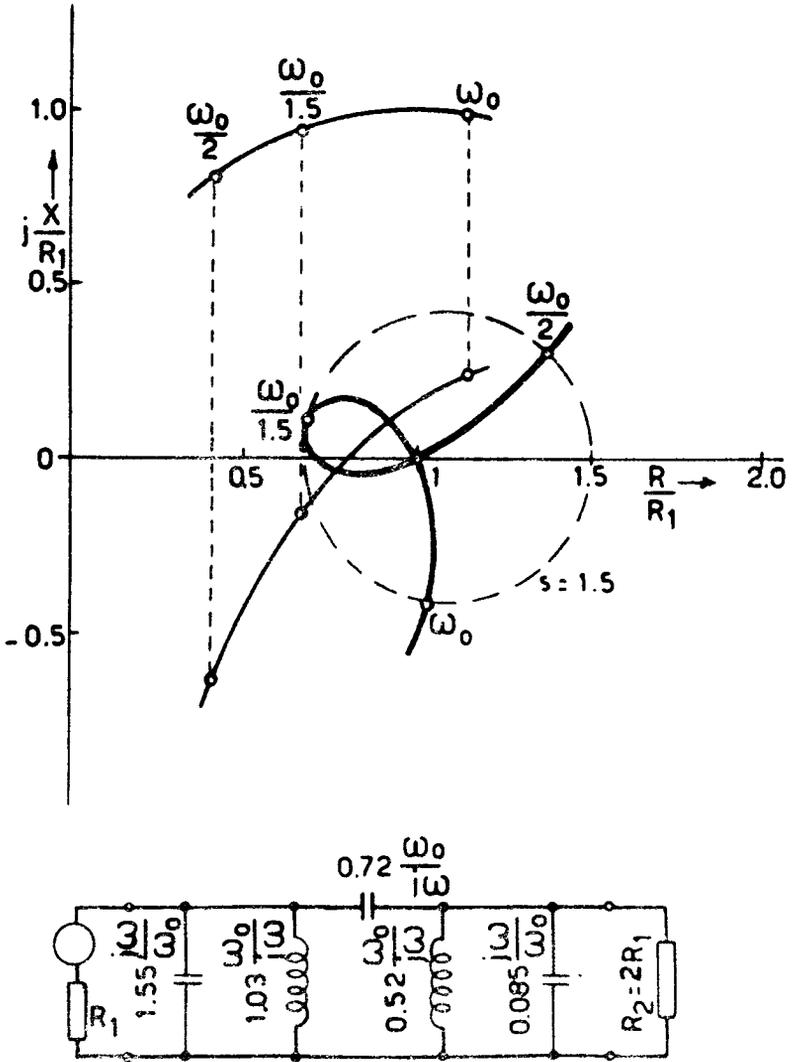


Bild 29

Ortskurve des Eingangswiderstandes bei

$$t = R_2/R_1 = 2$$

$$\text{und } \Omega_2/\Omega_1 = 2$$

## V. MESSUNGEN AN EINIGEN MODELLEN

### V. 1 Eisenlose Symmetrier-Sparübertrager

Überschlagmessungen an zwei Luftspulen mit einigen Wicklungen von 500 mm  $\varnothing$  haben ergeben, dass man nur Streuungsfaktoren  $\sigma$  grösser als etwa 0,5 realisieren kann.

Für einen maximalen Reflexionsfaktor  $r = 20\%$ , ein Frequenzverhältnis  $\frac{\Omega_2}{\Omega_1} = 4$  und ein Übersetzungsfaktor  $t = 4$ , liegt der Wert der gerechneten

Streuungsfaktors je nach der Grösse von  $k'$ , zwischen

$$(\sigma_{ssü})_{k'=1} = \sigma_{sü} = 0,56 \quad \text{und}$$

$$(\sigma_{ssü})_{k'=0} = \sigma_{sü} + \frac{1 - \sigma_{sü}}{2} = 0,56 + 0,22 = 0,78$$

$\sigma_{sü}$  ist aus dem Bild 20 auf Seite 43 entnommen worden. Aus diesem Zahlen kann man entnehmen, dass man ohne schwierige Bauform den nötigen Streuungsfaktor  $\sigma_{ssü}$  für einen Symmetrier-Sparübertrager mit  $\Omega_2/\Omega_1 = 4$  und Übersetzungsfaktor  $t = 4$  leicht erreichen kann.

Aus dem 2. Beispiel von Seite 32 ist zu entnehmen

$$b = 1,1181$$

$$- a = 0,1001$$

$$- c = 0,1814$$

Aus der Formel (45) sind die Induktivitäten  $L_1$  und  $L_2$  auszurechnen:

$$\omega_c L_1/R_1 = -\frac{a^2}{2c} \frac{1}{b - 1/b} = 1,235$$

$$\omega_c L_2/R_1 = -\frac{a^2}{2c} \sqrt{t} \frac{b(\sqrt{t} + 1/\sqrt{t}) - 2}{b^2 - 1} \frac{1}{2(1 + k')}$$

Wenn als erste Näherung  $k' = 0$  angenommen wird, ergibt sich der Wert für

$$\omega_c L_2/R_1 = -\frac{a^2}{2c} \sqrt{t} \frac{b(\sqrt{t} + 1/\sqrt{t}) - 2}{b^2 - 1} 1/2 = 0,875$$

Aus mehreren Überschlagmessungen wird der Wert  $k' = 0,3$  geschätzt, wenn die zwei Sekundärspulen  $L_2$  so weit entfernt sind wie es der gewünschte Streuungsfaktorgrösse  $\sigma_{ssü}$  zwischen Primär- und Sekundärspule  $L_1$  und  $L_2$  zulässt.

Für  $k' = 0,3$  bekommt man für

$$\omega_c L_2/R_1 = \frac{1}{(1 + k')} 0,875 = 0,673 \quad \text{und der Streuungsfaktor}$$

$$\sigma_{ssü} = \sigma_{sü} + (1 - k') \frac{1 - \sigma_{si}}{2} = 0,56 + 0,7 \cdot 0,22 = 0,71$$

Wenn jetzt weiter  $R_1 = 60 \text{ Ohm}$  und  $\omega_s = \omega_1 = 2\pi \cdot 2,5 \text{ Mhz.}$  angenommen wird, ergeben sich die Werte

$$L_1 = 4,72 \mu\text{H}$$

$$L_2 = 2,57 \mu\text{H}$$

Die primäre Spule  $L_1$  besteht aus 2 Windungen

Koaxialkabel mit Aussenleiter  $10 \text{ mm } \varnothing$ .

Der Wicklungsdurchmesser ist  $520 \text{ mm } \varnothing$ .

Die beiden Sekundärspulen  $L_2$  werden aus  $1,5 \text{ mm } \varnothing$

Kupferdraht gewickelt und bestehen aus je 1 Windung.

Die Werten der Kapazitäten sind nach Gl. (37)

$$C_1 = \frac{1}{\omega_s R_1} \left( \frac{2c}{a} \right) = 380 \text{ pF} \quad C_2 = \frac{380}{t} = 95 \text{ pF}$$

Die Konstruktionszeichnung des Modells ist auf Seite 61 gezeichnet worden. Teil I ist eine runde Holzplatte, die alle Wicklungen des Übertragers trägt. Auf ihrem ganzen Umfang sind unter gleichen Abständen acht Winkelstücke II geschraubt worden. Teilstück III hält die Wicklungen der Spule  $L_2$  zusammen, und kann in beliebigem Abstand von Spule  $L_1$  mit Klammern an Teil II fest gemacht worden.

Die dazu geschalteten Primär- und Sekundärkapazitäten haben die Werte

$$C'_1 = 260 \text{ pF} \quad \text{bzw.} \quad C'_2 = 30 \text{ pF}$$

Hieraus kann man entnehmen, dass die Eigenkapazitäten der Spule  $L_1$  und  $L_2$  etwa

$$380 - 260 = 120 \text{ pF} \quad \text{bzw.} \quad 95 - 30 = 65 \text{ pF}$$

gross sind.

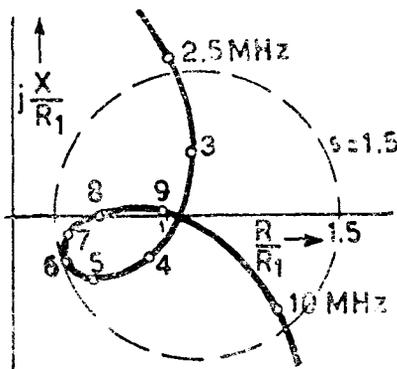


Bild 30

Die gemessene Punkte des Eingangswiderstandes des belasteten Übertrager ist in Bild 30 gezeichnet worden. Aus dem Vergleich der gemessenen Punkte und der zugehörigen gerechneten Ortskurve auf Seite 35 kann man entnehmen, dass das Ersatzschaltbild und das Rechenverfahren zu vernünftigen praktischen Ergebnissen führen.

Am Ausgang ist einer Unsymmetrie von weniger als 15% gemessen worden.

Die Abstand zwischen Sekundär- und Primärwicklung  $y = 9 \text{ mm}$  (s.S.61)

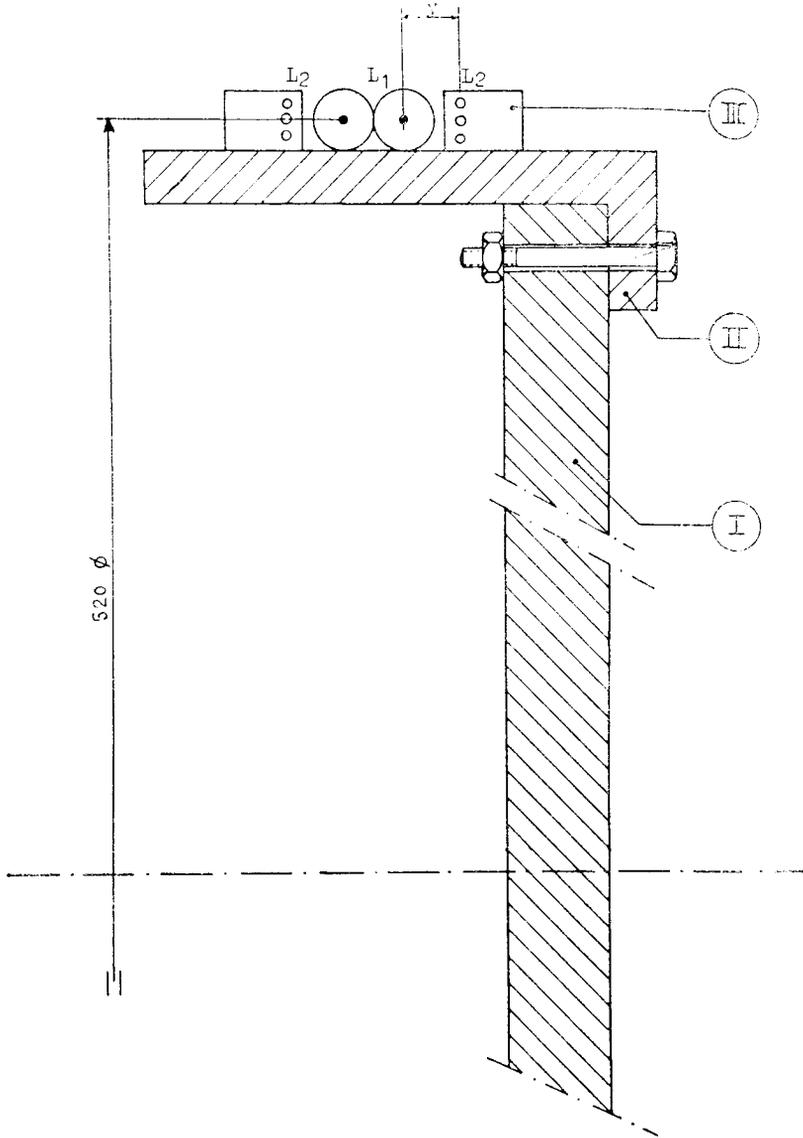


Bild 31

Prinzipaufbau eines  
Luft-Symmetrier-Sparübertrager

## V. 2 Symmetrier-Sparübertrager mit Ferrit-Kern

Ein speziell hergestellter Perminvar Ferrit mit der Bezeichnung PF 577 wird als Kern benutzt. Dieses Ferritmaterial wird in einer Nutenring Form für Fernseh-Ablenkjöche gepresst. Jeder Nutenring ist ungefähr 10mm dick. Etwa zehn solche Nutenringe werden aufeinander geklebt und als Kern benutzt.

Einige Überschlagmessungen haben ungefähr die gleichen Werte für den Streuungsfaktor wie bei den vorigen Modell ergeben, sodass man erwarten kann, dass auch ein Symmetrier-Sparübertrager mit diesem Kern etwa gleichen Daten wie der Luftübertrager haben wird.

Der Aufbau des Übertragers ist auf Seite 63 im Massstab 1:1 gezeichnet worden.

Die primäre Spule  $L_1 = 4,72$  H besteht aus vier Windungen Koaxialkabel mit einem Aussenleiter 10mm  $\varnothing$ .

Das Koaxialkabel wird direkt auf den Ferritkern gewickelt und wird durch einer gespannten Kunststoffolie auf den Ferritkern gedruckt.

Die beiden Sekundärwicklungen je  $L_2 = 2,57$  H, bestehen je aus 2,5 Windungen 1,5mm Kupferdraht und werden auf zwei Spulenkörper gewickelt. Die Spulenkörper sind mit drei Schrauben versehen und können dadurch in einem beliebigen Abstand von Primärspule  $L_1$  festgehalten werden. Die zugeschalteten primären bzw. Sekundären Kapazität sind  $C'_1 = 340$ pF und  $C'_2 = 90$  pF.

Auf Seite 62 ist die gemessene Ortskurve des Übertragers gezeichnet worden. Die Messkurve stimmt gut mit der gerechneten Kurve auf Seite 43 überein. Am Ausgang ist einer Unsymmetrie von weniger als 15% gemessen worden.

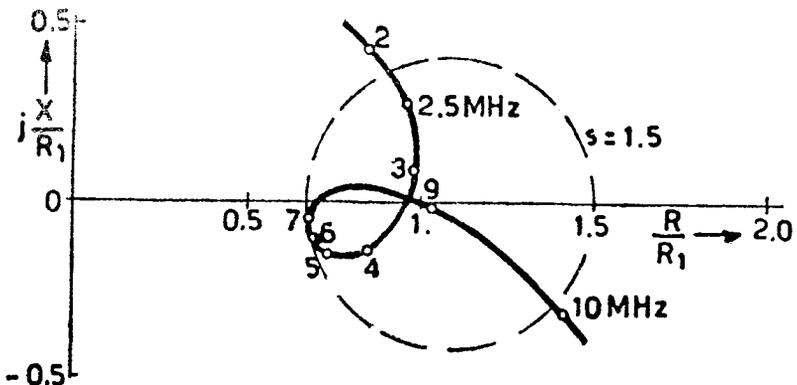


Bild 32

Nach drei Betriebsstunden bei der Frequenz von 6,5 Mhz und einer Leistungübertragung von 400 Watt, ist der Ferritkern nur handwarm geworden.

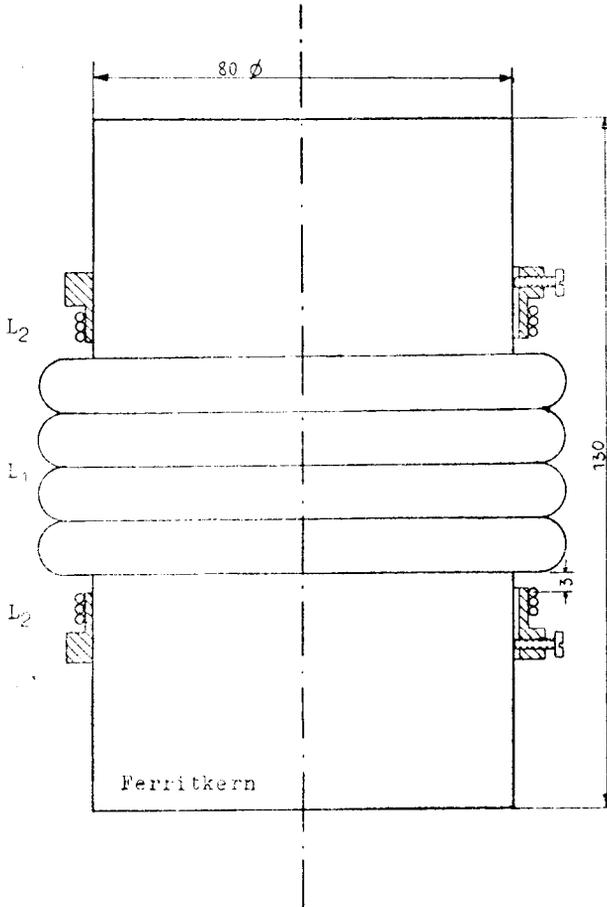


Bild 33

Symmetrier-Sparübertrager mit Ferritkern

### V. 3 Symmetrier-Sparübertrager mit einer Reihenkapazität zur Kompensation

Aus allen Ortskurven, die während der Arbeit gerechnet worden sind, ist zu entnehmen, dass sie alle die gleiche Grundform haben, wie es

im Bild 34 gezeichnet ist. Weil man in der Praxis nicht viel Wert

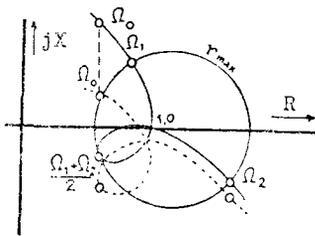


Bild 34

darauf legt, dass die Ortskurve durch den Punkt  $P_{2max}/P_2 = 1,0$  geht, kann man den senkrechten Teil der Ortskurve mit einer Reihenkapazität am Eingang hinunter drücken, um ein Frequenzverhältnis  $\frac{\Omega_2}{\Omega_0} > \frac{\Omega_2}{\Omega_1}$  zu bekommen, wie es im Bild 34 mit der gestrichelten Linie gezeigt wird. Natürlich gehen dabei die Punkte die

den Frequenzen  $\Omega_2$  und  $\frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2}$  gehören auch senkrecht hinunter, aber viel weniger als bei  $\Omega_0$ , sodass diese Punkte etwas ausserhalb des Grenzkreises  $r_{max}$  liegen. Diesem kann man entgegen wirken, wenn bei der

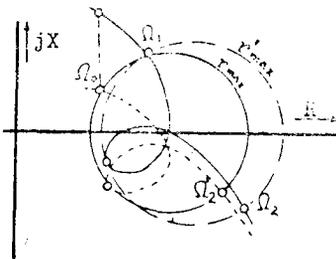


Bild 35

Dimensionierung eines Übertragers für ein Übersetzungsfaktor  $t = R_2/R_1$ , nicht mit  $t = R_2/R_1$  aber mit einem kleineren Übersetzungsfaktor z.B  $t = R_2/1,1 R_1$  gerechnet wird. Der dazugehörige Grenzkreis  $r'_{max}$  bezogen auf  $1,1 R_1$  wird etwas rechts liegen, wie es mit dem gestrichelten Kreis im Bild 35 gezeichnet ist. Die obere Grenzfrequenz liegt zwar ausserhalb des gültigen Grenzkreises  $r_{max}$ , aber wegen des

Gewinnes durch die Reihenkapazität im unteren Frequenzbereich ist  $\frac{\Omega'_2}{\Omega_0}$

immer noch grösser als  $\frac{\Omega_2}{\Omega_1}$

In den praktischen Ausführung braucht man nur weniger Windungen für  $L_2$  zu nehmen wie die Dimensionierungsvorschrift für  $t = R_2/R_1$  es vorschreibt und durch einige Messungen der Ortskurve, die Windungszahl und die Reihenkapazität optimal zu bestimmen.

In Bild 36 ist eine gemessene Ortskurve eines eisenlose Symmetrier-Sparübertragers mit einer Reihenkapazität an der Eingangsseite gezeichnet worden.

Der günstigste Kombination von Schaltelementen der induktiv gekoppelten zweikreisigen Schaltung mit der Reihenkapazität rein rechnerisch zu bestimmen ist nicht gelungen.

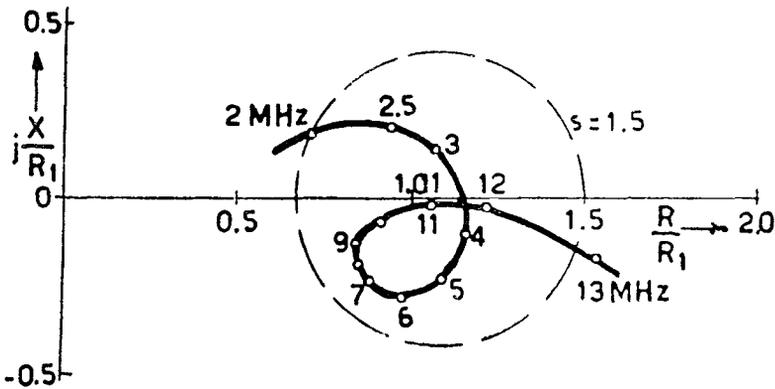


Bild 36

Eingang-Reihenkapazität = 2700 pF

Zugeschalteten Primär- bzw. Sekundärkapazität  $C_1=150$  pF  $C_2=70$  pF

## VI. PRAKTISCHE GRENZEN BEI DER REALISIERUNG VON EISENLOSEN ÜBERTRAGERN

Nach der Gl. (40), (44) und (45) hat die primäre Induktivität bei Übertragern, Sparübertragern und Symmetrier-Sparübertragern mit Tscheybyscheffischem Übertragungsverhalten denselben Wert. Bild 37 auf Seite 66 zeigt die Grösse der primären Induktivität  $L_1$  bei verschiedenen Verhältnissen der oberen zur unteren Grenzfrequenz und bei verschiedenen zugelassenen Welligkeitschwankungen  $s$ . Wie erwartet wird  $L_1$  grösser bei zunehmendem Frequenzverhältnis  $\Omega_2/\Omega_1$  und abnehmender Welligkeitschwankung  $s$ .

Die sekundäre Induktivität  $L_2$  unterscheidet sich bei Übertragern nur durch den Übersetzungsfaktor  $t$ . Bei Sparübertragern und Symmetrier-Sparübertragern ist es schwierig die sekundäre Induktivität  $L_2$  grafisch darzustellen.

Die praktische Grenze bei der Realisierung von eisenlosen Übertragern wird dadurch bedingt, dass der Streuungsfaktor  $\sigma$  zwischen der primären und der sekundären Wicklung nicht beliebig klein gemacht werden kann und die Wicklungen zu grosse Eigenkapazitäten besitzen.

In Bild 38 auf Seite 65 ist die gerechnete Eingangskapazität  $C_1$  für verschiedene Frequenzverhältnis  $\frac{\Omega_2}{\Omega_1}$  und Welligkeitschwankung  $s$  gezeichnet worden. Wie zu erwarten war, wird  $C_1$  kleiner bei zunehmenden

Frequenzverhältnis  $\frac{\Omega_2}{\Omega_1}$  und bei abnehmender Welligkeitschwankung  $s$ . Die Ausgangskapazität  $C_2$  unterscheidet sich nur durch den Faktor  $1/t$ . Die Praxis hat gezeigt, dass in dem Kurzwellengebiet bis zu einem Übersetzungsfaktor  $t$  von etwa zehnte nicht die Eigenkapazität sondern der Streuungsfaktor der Wicklungen die Realisierungsgrenze bei Luftübertragern bedingen.

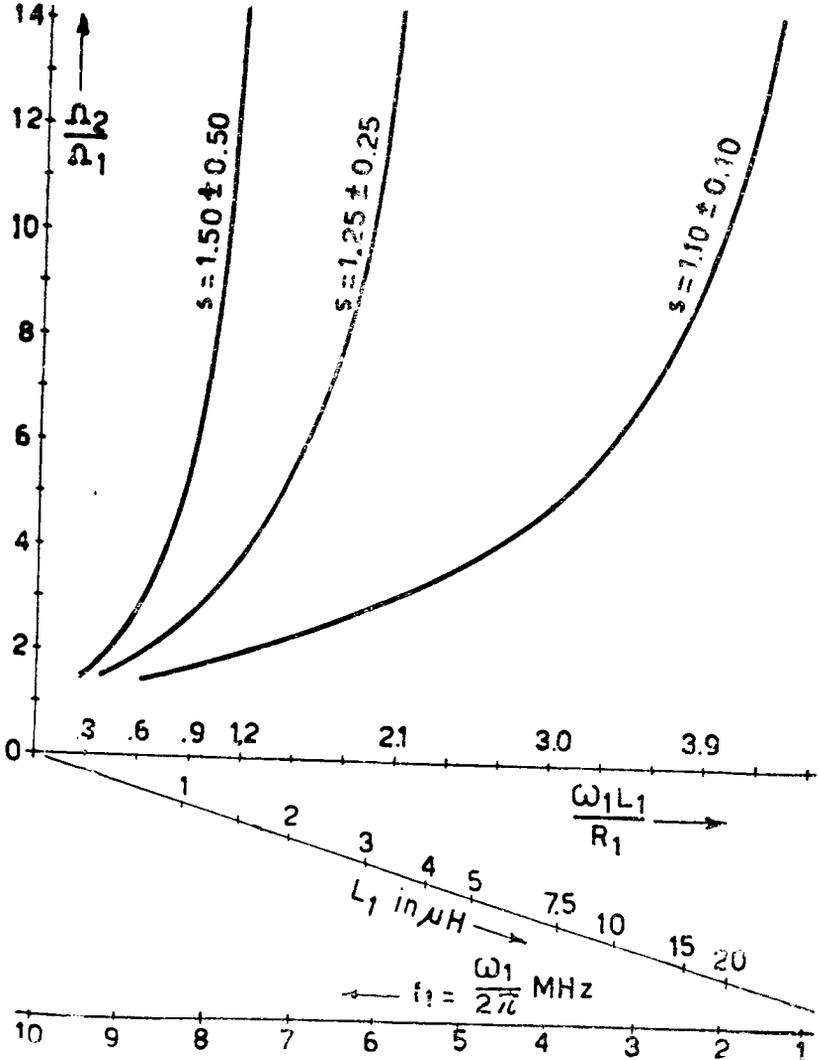


Bild. 37 Primäre Induktivität  $L_1$  als Funktion des Verhältnisses  $\frac{\Omega_2}{\Omega_1}$  mit der Welligkeitschwankung  $s$ ;  $\Delta s$  als Parameter.  $R_1 = 60$  Ohm.

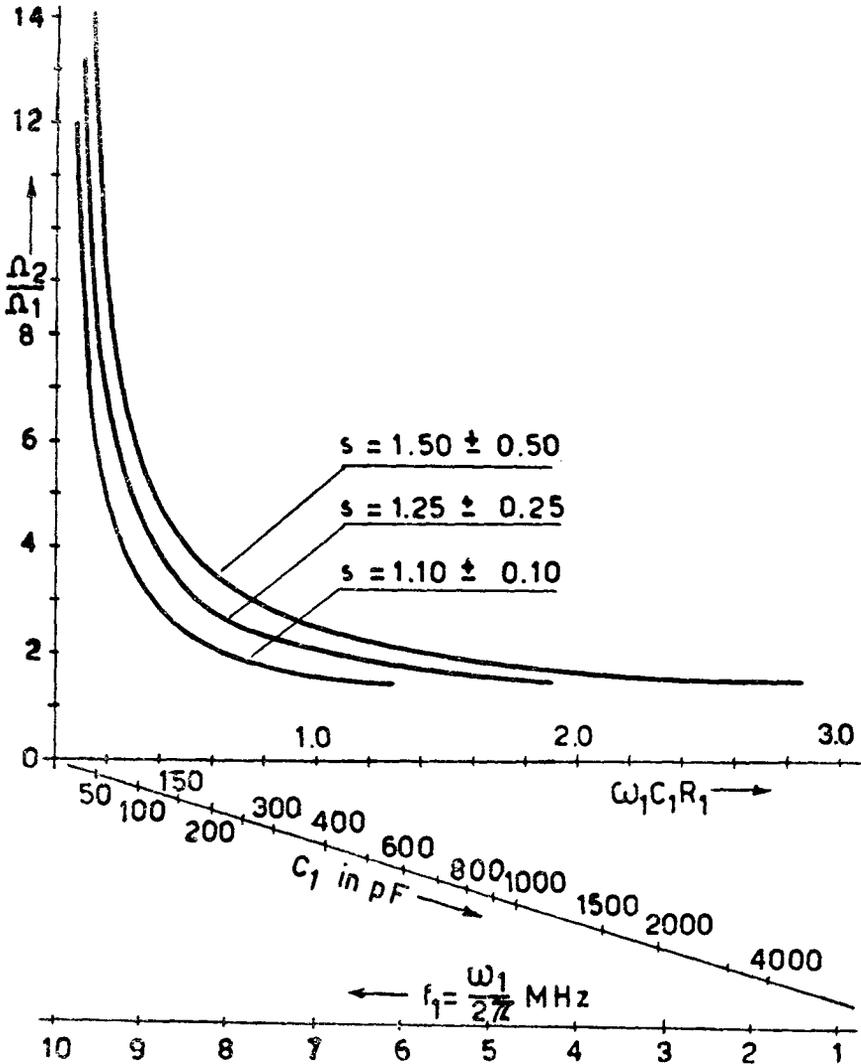


Bild. 38 Eingangskapazität  $C_1$  als Funktion des Verhältnisses  $\Omega_1/\Omega_2$  mit der Welligkeitsschwankung  $s_j \pm \Delta s$  als Parameter.  $R_1 = 60$  Ohm.

Aus Spannungsfestigkeitsgründen kann man Erfahrungsgemäss für zwei Luftspulen mit einigen Windungen von etwa 500mm Durchmesser, den Streuungsfaktor  $\sigma = 0,5$  als Grenze annehmen.

Die Schnittpunkte  $\sigma_{sü} = 0,5$  mit der Kurvenschar von Bild 19, 20 und 21, liefern drei Grenzkurven für eisenlose Sparübertragern, für die Welligkeit  $s = 1,10 \pm 0,10$ ,  $s = 1,25 \pm 0,25$  und  $s = 1,50 \pm 0,50$ .

Für eisenlose Symmetrier-Sparübertragern entspricht die Grenze  $\sigma_{ssü} = 0,5$  bei  $k' = 0,3$  nach Gl. (47) einen Steuerungsfaktor  $\sigma_{sü} = 0,25$ , sodass man drei günstigere Grenzkurven bekommt, wie in Bild 39 gestrichelt gezeichnet.

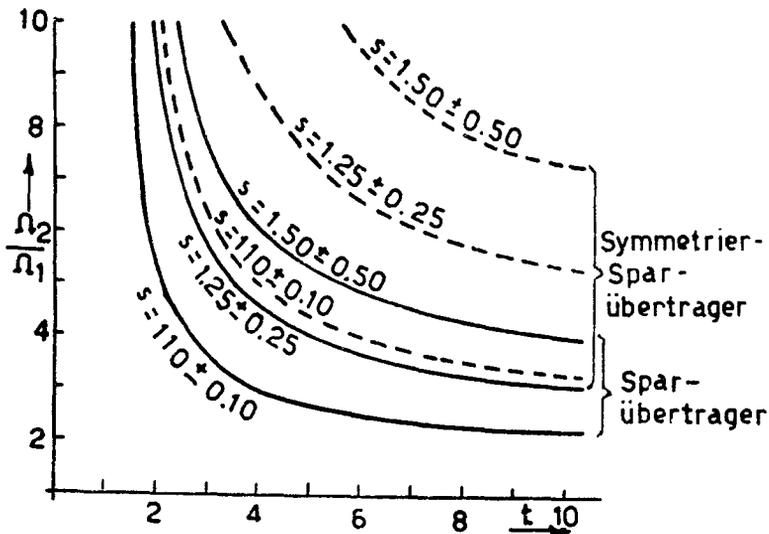


Bild. 39 Grenzkurven bei der Realisierung von eisenlose Sparübertragern und Symmetrier-Sparübertragern

## VII. ZUSAMMENFASSUNG

Im Kurzwellengebiet werden im allgemeinen, breitbandige Anpassungsprobleme durch Leitungstransformatoren gelöst.

Einige Versuche, das Anpassungsproblem mit der klassischen Methode, Transformatoren aus gekoppelten Induktivitäten, zu lösen, ergaben brauchbare Bandbreiten.

Diese Arbeit befasst sich mit der Aufgabe, die theoretischen Grundlagen zu untersuchen und beschränkt sich auf Frequenzen, bei denen die Transformatoren sich nach quasistationär verhalten.

Am Anfang wird als Vergleich, die Dimensionierungsvorschrift einer induktiv oder kapazitiv gekoppelten zweikreisigen Schaltung mit Tschebyscheffischem Übertragungsverhalten für schmale relative Bandbreite  $\left(\frac{\Delta f}{f} \leq 10\% \right)$  abgeleitet. Im Gegensatz zu Feldtkeller [2.a] [2.b] wird

hier von Anfang an, allgemein für jeden Übersetzungsfaktor  $t$  gerechnet, und die Grösse der Schaltelemente direkt explizit in der zugelassenen Leistungsschwankung  $\Delta P_{2\max} P_2$  ausgedrückt. Durch die Vernachlässigungen, die bei schmaler relativer Bandbreite möglich sind, kann der Betriebsübertragungsfaktor mit einem einfachen Tschebyscheffischen Polynom verglichen werden, wodurch auch die Durchlasskurve symmetrisch wird.

Die Rechnung zeigt, dass die Realisierung bei jedem Übersetzungsfaktor  $t$  ohne Gegeninduktivität möglich ist.

Die exakte Rechnung des Betriebsübertragungsfaktor einer induktiv oder kapazitiv gekoppelten zweikreisigen Schaltung für beliebige Bandbreite und beliebigen Übersetzungsfaktor  $t$ , führt auf eine gebrochene Funktion. Der Vergleich des Betriebsübertragungsfaktors einer induktiv gekoppelten zweikreisigen Schaltung mit der gebrochenen Tschebyscheffischen Funktion liefert ein Ersatzschaltbild, das teils ohne und teils nur mit Gegeninduktivität zu realisieren ist. Der Übersetzungsfaktor  $t$  ist hier entscheidend.

Die Dimensionierungsvorschrift für Übertrager, Sparübertrager und Symmetrier-Sparübertrager ist ausgearbeitet worden.

Bei der exakten Rechnung für die kapazitiv gekoppelte zweikreisige Schaltung ist ab einem bestimmten Übersetzungsfaktor  $t$  das Ersatzschaltbild nicht mehr mit passiven Schaltelementen zu realisieren. Im Gegensatz dazu ist der Transformator bei schmaler Bandbreite bei jedem Übersetzungsfaktor  $t$  sowohl mit induktiv, als auch kapazitiv gekoppelten zweikreisigen Schaltungen zu realisieren.

Anschließend sind Messungen an einigen Symmetrier-Sparübertragern gemacht worden. Das vorgeschlagene Ersatzschaltbild und des Rechenverfahren haben vernünftige praktische Ergebnisse geliefert.

Die Rechnung hat gezeigt dass jeder induktiv gekoppelte zweikreisige Transformator mit beliebigem Verhältnis von oberer zu unterer Grenzfrequenz  $\frac{\Omega_2}{\Omega_1}$  und mit beliebigem Übersetzungsfaktor  $t$  sowie mit beliebiger Welligkeitsschwankung  $s$ , theoretisch realisierbar ist. Die praktische

Realisierung der gerechnete Schaltelemente (Streuungsfaktor, Kapazitäten und Induktivitäten) stösst auf Grenzen. Einige Grenzkurven für eisenlose Sparübertrager und Symmetrier-Sparübertrager sind ermittelt worden.

### VIII. LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Tschebyscheff — Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions  
Mem. Acad. Imperiale des Sci. de St. Petersburg, t. VII, 1859, 199 — 291.
- [2] R. Feldtkeller a. Einführung in die Theorie der Rundfunkschaltungen.  
b. Einführung in die Theorie der Hochfrequenz-Bandfilter.  
S. Hirzel Verlag.
- [3] H. Meinke a. Theorie der Hochfrequenzschaltungen  
R. Oldenbourg Verlag.  
b. Breitbandtransformation bei hohen Frequenzen.  
F.T.Z. 1951 Heft 6 S. 252  
c. Der Durchlassbereich zweikreisiger Bandfilter, insbesondere für grossen Bandbreite.  
F.T.Z. 1951 Heft 8 S. 362
- [4] H. Knapp — Der Einfluss von Kapazitäten zwischen den Wicklungen eines Übertragers auf seine Eigenschaften  
Dissertation am T.H. Stuttgart 1942
- [5] A. Weißfloch — Die Wirkleistungsabgabe eines Generators mit konstantem Innenwiderstand und konstanter EMK an beliebige komplexe Außenimpedanzen.  
Hochfrequenztechnik und Elektroakustik 60 Juli 1942