

RESPONS STOKASTIK SISTEM DINAMIK NON-LINIER DENGAN n DERAJAT KEBEBASAN

Dr. Sangriyadi Setio
Prof. Wiranto Arismunandar

Laboratorium Motor Bakar dan Sistem Propulsi
Jurusan Teknik Mesin, Institut Teknologi Bandung

Fenomena loncatan yang terdapat pada suatu sistem dinamik non-linier deterministik, telah lama dikenal dengan baik. Tetapi pada sistem non-linier acak, fenomena ini sangat kurang dikenal. Secara alami sebagian besar struktur mengalami gaya-gaya luar yang sifatnya acak dan penyelesaian stokastik dari suatu sistem non-linier telah menarik perhatian banyak peneliti pada akhir-akhir ini. Pada tulisan ini akan diperlihatkan bahwa fenomena loncatan dapat dihasilkan dari suatu sistem non-linier yang mengalami gaya eksitasi luar acak. Masalah akan diselesaikan dengan menggunakan persamaan diferensial stokastik Ito, dan persamaan momen yang tak terbatas akan dibatasi dengan menggunakan bantuan metode Gauss tertutup.

1. PENDAHULUAN

Sampai saat ini terdapat sejumlah teknik yang dapat digunakan untuk melakukan analisis suatu sistem dinamik non-linier yang mempunyai satu derajat kebebasan, tetapi metode-metode ini sangat sulit untuk diperluas penggunaannya pada sistem yang mempunyai lebih dari satu derajat kebebasan. Penyelesaian eksak yang dapat digunakan untuk memecahkan berbagai problem dinamik non-linier secara umum belum ada.

Perilaku dinamik dari suatu sistem non-linier yang sangat sederhana dapat didekati dengan menggunakan metode Fokker-Planck. Metode pendekatan dari Fokker-Planck mempunyai banyak keuntungan dibandingkan dengan pendekatan eksak, tetapi sayangnya keuntungan-keuntungan ini hanya dapat dipakai untuk memecahkan problem yang sangat terbatas. Usaha untuk memperluas pendekatan ini telah banyak dilakukan oleh para peneliti, salah satunya dapat dilihat dari hasil pekerjaan yang dilakukan oleh Caughey [1], yang menunjukkan bahwa persamaan Fokker-Planck stasioner dapat dipecahkan dan kepadatan probabilitas pertama dari suatu proses Markov dapat diperoleh. Tetapi pada kenyataannya sebagian besar sistem yang mewakili kasus-kasus praktis tidak memiliki kondisi-kondisi yang diperlukan untuk pemecahan masalah, khususnya batasan-batasan yang diminta antara matrik redaman linier dan gaya eksitasi sangat sulit diperoleh.

Teknik linierisasi statistik dapat dipergunakan untuk memecahkan sebagian besar kesulitan-kesulitan yang sering ditemui pada metode-metode yang terdahulu, untuk mempelajari respon acak stasioner dari suatu

sistem non-linier dengan banyak derajat kebebasan. Hal ini dapat dilihat dari hasil penelitian yang dilakukan oleh Spanos dan Iwan [2] dan Iwan dan Yang [3]. Ide dasar dari metode pendekatan ini adalah mengganti persamaan diferensial dari suatu sistem dinamik non-linier dengan suatu persamaan diferensial linier ekuivalen dimana perbedaan yang terjadi antara kedua sistem tersebut adalah minimum. Jadi sistem dinamik non-linier digantikan dengan sistem dinamik linier ekuivalen dimana jawab dari sistem linier tersebut telah diketahui. Tentu saja pemilihan model linier ekuivalen ini harus didasari oleh pengetahuan yang cukup dan memadai mengenai karakteristik dinamik sistem asalnya. Teknik linierisasi statistik pada kasus-kasus ini memperlihatkan hasil-hasil yang sangat menjanjikan karena cara ini tidak memerlukan batasan-batasan yang sangat membatasi pemakaian metode-metode pendekatan lainnya.

Crandall [4], dalam penelitiannya menunjukkan bahwa teknik Gauss tertutup akan memberikan hasil yang sama dengan teknik linierisasi. Wen [5] menyimpulkan bahwa pendekatan dengan metode linierisasi adalah lebih baik dari pada pendekatan dengan mempergunakan metode Gauss tertutup. Sedangkan Wu [6,7] menyimpulkan bahwa pendekatan dari Gauss dan metode linierisasi akan memberikan hasil yang sama jika keduanya dipergunakan secara tepat.

Dalam tulisan ini, akan diperlihatkan bahwa, dalam kondisi tertentu fenomena loncatan yang sangat terkenal dalam sistem dinamik non-linier deterministik dapat juga diperlihatkan pada sistem dinamik non-linier acak. Fenomena loncatan yang terjadi pada sistem dinamik non-linier acak ini pada mulanya dipelajari secara analitik dan eksperimental oleh Lyon [8] untuk suatu

sistem non-linier dengan satu derajat kebebasan dengan menggunakan metode pendekatan linierisasi. Setio *et al* [9,10] dalam penelitiannya secara analitik dan eksperimental telah menunjukkan bahwa basis modal dapat digunakan untuk menerangkan fenomena loncatan dari sistem dinamik non-linier yang memiliki banyak derajat kebebasan. Jie dan Fang [11] menggunakan metode Fokker-Planck untuk mengamati fenomena loncatan untuk suatu sistem dengan dua derajat kebebasan.

Akan diperlihatkan disini dua metode pendekatan dari penyelesaian stokastik; yang pertama adalah pendekatan linierisasi berdasarkan hasil pekerjaan Iwan dan Yang [3] sedangkan metode yang lain adalah metode pendekatan berdasarkan persamaan diferensial stokastik Ito [6,7,11,12,13] dan hirarki dari persamaan momen dibatasi dengan menggunakan teknik Gauss tertutup [6,7].

2. METODE LINIERISASI

Persamaan diferensial orde dua dari suatu sistem non-linier yang mempunyai banyak derajat kebebasan dapat ditulis dalam bentuk :

$$M \ddot{u} + C \dot{u} + K u + f(u, \dot{u}) = P(t) \quad (1)$$

M , C , K , $f(u, \dot{u})$, $P(t)$ dan u berturut-turut adalah matriks massa, matrik redaman, matrik kekakuan, vektor gaya dalam non-linier yang merupakan fungsi dari perpindahan dan kecepatan, vektor gaya eksitasi luar acak stasioner yang mempunyai sifat-sifat Gauss dan vektor perpindahan.

Persamaan diferensial linier orde dua, yang dapat mewakili persamaan diferensial non-linier orde dua dari Pers. (1) adalah :

$$M \ddot{u} + C \dot{u} + K u + C' \dot{u} + K' u = P(t) \quad (2)$$

Matriks C' dan K' adalah matriks redaman dan kekakuan linier ekuivalen yang menggantikan vektor gaya-gaya dalam non-linier $f(u, \dot{u})$.

Pers. (2) dapat dianggap mempunyai penyelesaian linier stasioner dan merupakan fungsi dari c_{ij} dan k_{ij} .

$$u = u(c_{ij}, k_{ij}, t) \quad (3)$$

c_{ij} dan k_{ij} berturut-turut adalah elemen-elemen matrik C' dan K' .

Perbedaan antara Pers. (1), yang menggambarkan sistem yang sebenarnya dengan sistem substitusinya yang linier pada Pers. (2) dapat dijelaskan melalui vektor selisih ϵ :

$$\epsilon = f(u, \dot{u}) - C' \dot{u} - K' u \quad (4)$$

dengan u adalah penyelesaian Pers. (3) dari persamaan substitusi Pers. (2). Harga vektor selisih adalah fungsi dari parameter-parameter sistem substitusi c_{ij} dan k_{ij} . Suatu penyelesaian pendekatan dari Pers. (1) dapat dihasilkan dengan memilih harga c_{ij} dan k_{ij} sedemikian

rupa sehingga harga selisih ϵ mempunyai harga yang minimum. Sehingga dapat dianggap bahwa penyelesaian dari Pers. (1) dapat diwakili oleh Pers. (3) dan (2) dengan ketelitian yang cukup tinggi.

Kriteria minimum harus memenuhi hubungan berikut :

$$E[\epsilon^T \epsilon] = \text{minimum} \quad (5)$$

Operator E adalah harga rata-rata statistik atau harga harapan matematik.

Kondisi-kondisi yang diperlukan untuk Pers. (5) adalah :

$$\frac{\partial E[\epsilon^T \epsilon]}{\partial c_{ij}} = 2E[\epsilon^T \frac{\partial \epsilon}{\partial c_{ij}}] = 2E[\epsilon_i \dot{u}_j] = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial E[\epsilon^T \epsilon]}{\partial k_{ij}} = 2E[\epsilon^T \frac{\partial \epsilon}{\partial k_{ij}}] = 2E[\epsilon_i u_j] = 0$$

$$i, j = 1, \dots, n$$

Karena $P(t)$ mempunyai sifat-sifat Gauss, maka dapat ditunjukkan bahwa Pers. (6) menunjukkan harga minimum yang sesungguhnya dari $E[\epsilon^T \epsilon]$. Dengan menggunakan definisi harga selisih ϵ dan Pers. (4), Pers. (6) dapat disederhanakan menjadi :

$$E[\epsilon \dot{u}^T] = E[g(u, \dot{u}) \dot{u}^T] - C' E[\dot{u} \dot{u}^T] - K' E[u \dot{u}^T] = 0 \quad (7)$$

$$E[\epsilon u^T] = E[g(u, \dot{u}) u^T] - C' E[\dot{u} u^T] - K' E[u u^T] = 0$$

Untuk memecahkan Pers. (7) untuk harga-harga C' dan K' , maka diperlukan transformasi harga-harga $E[g(u, \dot{u}) \dot{u}^T]$ dan $E[g(u, \dot{u}) u^T]$ menjadi harga-harga baru sebagai fungsi dari $E[u u^T]$, $E[u \dot{u}^T]$ dan $E[\dot{u} \dot{u}^T]$

y_{ij} adalah perpindahan relatif dari massa ke i terhadap massa ke j dan $s_{ij}(y_{ij}, \dot{y}_{ij})$ adalah vektor gaya yang bekerja pada elemen non-linier yang menghubungkan massa i dan j .

$$E[g_i(u, \dot{u}) u_j] = \sum_{k, k \neq i} E[s_{ik}(y_{ik}, \dot{y}_{ik}) u_j] \quad (8)$$

$$E[g_i(u, \dot{u}) \dot{u}_j] = \sum_{k, k \neq i} E[s_{ik}(y_{ik}, \dot{y}_{ik}) \dot{u}_j]$$

y_{ij} adalah perpindahan relatif dari massa ke i terhadap massa ke j dan $s_{ij}(y_{ij}, \dot{y}_{ij})$ adalah vektor gaya yang bekerja pada elemen non-linier yang menghubungkan massa i dan j .

Karena u mempunyai sifat-sifat Gauss, maka y_{ij} , \dot{y}_{ij} , u_j dan \dot{u}_j dapat dianggap mempunyai distribusi Gauss.

Dapat diperlihatkan bahwa :

$$E[s_{ik}(y_{ik}, \dot{y}_{ik}) u_j] = E[(y_{ik} \dot{y}_{ik} + k_{ik} y_{ik}) u_j] \quad (9)$$

$$E[s_{ik}(y_{ik}, \dot{y}_{ik}) \dot{u}_j] = E[(y_{ik} \dot{y}_{ik} + k_{ik} y_{ik}) \dot{u}_j]$$

dengan

$$\gamma_{ik} = E[s_{ik}(y_{ik} \dot{y}_{ik}) \dot{y}_{ik}] / E[\dot{y}_{ik}^2] \quad (10)$$

$$\kappa_{ik} = E[s_{ik}(y_{ik} \dot{y}_{ik}) y_{ik}] / E[y_{ik}^2]$$

$$i \neq k$$

Matrik redaman dan matrik kekakuan dari sistem linier yang didefinisikan pada Pers. (10) adalah C dan K , jadi elemen-elemen dari matrik C tergantung pada harga γ_{ik} dan elemen-elemen dari matrik K tergantung pada harga κ_{ik} . Dapat diperlihatkan bahwa :

$$E[g(u, \dot{u})u^T] - \hat{C}' E[\dot{u} u^T] - \hat{K}' E[u u^T] = 0 \quad (11)$$

$$E[g(u, \dot{u})\dot{u}^T] - \hat{C}' E[\dot{u} \dot{u}^T] - \hat{K}' E[u \dot{u}^T] = 0$$

Pers. (7) dapat diselesaikan untuk C dan K yang memenuhi persyaratan minimum $E[\varepsilon^T \varepsilon]$, dengan mensubstitusi Pers. (11) pada Pers. (7), akan didapat :

$$(C' - \hat{C}') E[\dot{u} u^T] - (K' - \hat{K}') E[u u^T] = 0 \quad (12)$$

$$(C' - \hat{C}') E[\dot{u} \dot{u}^T] - (K' - \hat{K}') E[u \dot{u}^T] = 0$$

Suatu seri dari dua $n \times n$ persamaan dapat ditulis kembali dalam bentuk :

$$X = \begin{bmatrix} (C' - \hat{C}')^T \\ (K' - \hat{K}')^T \end{bmatrix} = 0 \quad (13)$$

atau

$$X = \begin{bmatrix} E[\dot{u} u^T] & E[u u^T] \\ E[\dot{u} \dot{u}^T] & E[u \dot{u}^T] \end{bmatrix} \quad (14)$$

Jika matrik X dengan ukuran $2n \times 2n$ dari nilai harapan u adalah non-singular, maka satu-satunya jawab dari Pers. (12) adalah :

$$C = \hat{C}' \quad (15)$$

$$K = \hat{K}'$$

Jika X adalah singular, maka penyelesaian Pers. (15) bukan merupakan satu-satunya jawab dari Pers. (12), tetapi setiap penyelesaian C dan K dari Pers. (12) akan tetap memberikan harga minimum untuk $E[\varepsilon^T \varepsilon]$.

3. METODE ITO

Perhatikan persamaan dinamik dari suatu sistem non-linier dengan banyak derajat kebebasan yang mengalami gaya-gaya luar acak yang dapat digambarkan melalui persamaan diferensial (1), dan $P(t)$ adalah suatu gaya eksitasi acak stasioner dengan pita besar. Gaya eksitasi ini dianggap mempunyai harga rata-rata nol dan kepadatan spektral $2D$ sampai frekuensi $\omega \gg \omega_n$, dimana ω_n adalah frekuensi diri dari

sistem. Pada kondisi ini, Pers. (1) dapat didekati dengan menggunakan suatu seri dari persamaan ekuivalen dari Ito[6,7,11,12,13] dan penyelesaiannya mengikuti proses Markov.

Lakukan transformasi koordinat :

$$Y_i = u_i$$

$$Y_{i+n} = \dot{u}_i \quad (16)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

Pers. (1) kemudian ditulis dalam bentuk $2n$ persamaan diferensial orde satu dan dalam bentuk vektor Markov, maka satu seri persamaan keadaan non-linier dari Pers. (1) dapat ditulis melalui suatu persamaan diferensial stokastik berikut ini :

$$dY(t) = F(Y, t) dt + G(Y, t) dB(t) \quad (17)$$

B adalah suatu proses pergerakan dari Brown, $Y(t)$ adalah vektor keadaan ruang, $F(Y, t)$ dan $G(Y, t)$ adalah matrik dari vektor keadaan yang mendefinisikan suatu sistem non-linier.

Persamaan diferensial dari momen dapat dibuat umum dengan menggunakan prosedur dari persamaan diferensial stokastik Ito.

$$d\Phi(Y) = \left\{ \frac{\partial \Phi(Y)}{\partial Y_i} \right\}^T [dY] + 1/2 \text{Trace } GQG^T \left\{ \frac{\partial^2 \Phi(Y)}{\partial Y_i \partial Y_j} \right\} dt \quad (18)$$

dengan $\Phi(Y)$ adalah suatu fungsi skalar umum dari koordinat respon dan $Q dt = E[dB(t) dB(t)^T]$. Dengan mengambil harga harapan pada ke dua sisi dari Pers. (18) dan dengan membagi dengan dt , maka akan didapat :

$$dE[\Phi]/dt = E \left\{ \frac{\partial \Phi(Y)}{\partial Y_i} \right\}^T \{f(Y, t)\} + 1/2 E[\text{Trace } GQG^T \Phi_{YY}] \quad (19)$$

atau

$$\dot{M}_{ijk} = (d/dt)E[\Phi(Y)] = E \left\{ \frac{\partial \Phi(Y)}{\partial Y_i} \right\}^T \{F_i(Y, t)\} + 1/2 [\text{Trace } GQG^T \Phi_{YY}] \quad (20)$$

$\Phi_{YY}(\cdot)$ adalah matrik Jacob dari suatu transformasi, $\Phi(\cdot)$ adalah suatu fungsi skalar umum dan $M_{ijk} = E[Y_1^i, Y_2^j, Y_3^k, \dots]$.

Momen statistik dari suatu sistem dinamik non-linier yang mengalami gaya eksitasi acak dari luar pada Pers. (20) dapat dijabarkan melalui persamaan hirarki yang tak terbatas. Suatu strategi pemotongan yang tepat diperlukan untuk melakukan perhitungan pendekatan

pada orde-orde pertama. Secara klasik dan karena kesederhanaannya, maka teknik Gauss tertutup sering digunakan untuk memecahkan problem dinamik non-linier acak. Harga kumulan yang menunjukkan momen pada Pers. (20) dengan orde lebih besar dari dua adalah nol untuk membatasi hirarki dari persamaan momen menjadi orde dua. Oleh karena itu harga-harga momen kemudian dinyatakan sebagai fungsi dari momen orde pertama dan orde kedua.

Secara sistematis perluasan dari prosedur ini adalah metode non-Gauss tertutup dimana jumlah momen ditingkatkan untuk mendapatkan parameter-parameter tambahan dan ketelitian perhitungan dapat ditingkatkan dengan memperpanjang pemotongan dari orde dua ke orde yang lebih tinggi [12]. Misalnya dapat digunakan metode dengan orde 4 dari metode non-Gauss tertutup dengan cara menghilangkan kumulan yang berhubungan dengan momen-momen yang mempunyai orde 5, 6 dan orde lainnya yang lebih tinggi lagi pada Pers. (20), dengan maksud agar didapat hirarki dari persamaan momen untuk orde 4. Atau dapat juga digunakan metode dengan orde 6 dengan cara mengambil persamaan-persamaan momen hingga orde 6.

Dengan mempergunakan formula kumulan dari Wu [6], Momen dan kumulan mempunyai hubungan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 E[Y_j Y_k] &= \kappa_2[Y_j, Y_k] \\
 E[Y_j Y_k Y_l] &= \kappa_3[Y_j, Y_k, Y_l] \\
 E[Y_j Y_k Y_l Y_m] &= \kappa_4[Y_j, Y_k, Y_l, Y_m] \\
 &+ 3\{\kappa_2[Y_j, Y_k] \kappa_2[Y_l, Y_m]\}_s \\
 E[Y_j Y_k Y_l Y_m Y_n] &= \kappa_5[Y_j, Y_k, Y_l, Y_m, Y_n] \\
 &+ 10\{\kappa_2[Y_j, Y_k] \kappa_3[Y_l, Y_m, Y_n]\}_s \\
 E[Y_j Y_k Y_l Y_m Y_n Y_p] &= \kappa_6[Y_j, Y_k, Y_l, Y_m, Y_n, Y_p] \\
 &+ 15\{\kappa_2[Y_j, Y_k] \kappa_4[Y_l, Y_m, Y_n, Y_p]\}_s \\
 &+ 15\{\kappa_2[Y_j, Y_k] \kappa_2[Y_l, Y_m] \kappa_2[Y_n, Y_p]\}_s \\
 &+ 10\{\kappa_3[Y_j, Y_k, Y_l] \kappa_3[Y_m, Y_n, Y_p]\}_s
 \end{aligned} \tag{21}$$

{ }_s adalah suatu operasi yang meliputi seluruh kemungkinan kombinasi, seperti

$$\begin{aligned}
 \{\kappa_2[Y_j, Y_k] \kappa_2[Y_l, Y_m]\}_s &= 1/3\{\kappa_2[Y_m, Y_j] \kappa_2[Y_k, Y_l] \\
 &+ \kappa_2[Y_j, Y_k] \kappa_2[Y_l, Y_m] \\
 &+ \kappa_2[Y_j, Y_l] \kappa_2[Y_k, Y_m]\} \tag{22}
 \end{aligned}$$

4. CONTOH

Sebagai ilustrasi pemakaian metode Ito, telah diambil sebagai contoh suatu sistem dinamik yang mempunyai kekakuan non-linier jenis kubik dan mengalami gaya eksitasi luar acak.

Suatu keluaran dari saringan linier dengan pita sempit dan masukan berupa derau putih digunakan dalam analisis. Proses penyaringan dapat ditulis sebagai berikut [11] :

$$\ddot{x} + \xi \dot{x} + \omega_0^2 x = p(t) \tag{C-1}$$

Dengan x dan \dot{x} adalah keluaran dari hasil saringan dan $\omega(t)$ adalah derau putih dengan kepadatan spektral S_0 . Masukan dapat dianggap memenuhi sifat Gauss dengan harga rata-rata nol. x dan \dot{x} tidak saling bergantung. Keluaran rata-rata kuadrat mempunyai hubungan sebagai berikut :

$$\langle \dot{x}^2 \rangle = \omega_0^2 \langle x^2 \rangle = \pi S_0 / \xi \tag{C-2}$$

Fungsi keluaran dari kepadatan spektral didapat melalui :

$$S_x(\omega) = |H(\omega)|^2 S_0 = S_x(\omega) / \omega^2 \tag{C-3}$$

Dimana $H(\omega)$ merupakan suatu fungsi transfer dari saringan linier. Jika redaman dari saringan cukup kecil, $1 \gg \xi / \omega_0$, maka sebagian besar dari keluaran akan berkumpul pada harga di sekitar ω_0 dimana terletak puncak spektral dari keluaran. Besaran pita dari harga setengah kekuatan adalah kurang lebih sama dengan ξ . Dalam hal ini, derau putih hasil saringan dapat dianggap sebagai gaya eksitasi acak dengan pita sempit. Dengan mengatur ξ dan ω_0 , eksitasi dengan pita sempit dengan berbagai besaran pita dan berbagai harga tengah frekuensi dapat diperoleh.

Perhatikan sistem nonlinier tak berdimensi dengan jenis Duffing berikut ini :

$$\begin{aligned}
 \ddot{u}_1 + \mu_1 \dot{u}_1 + \omega_1^2 u_1 &= \alpha_1 u_1^3 + \alpha_2 u_1^2 u_2 + \alpha_3 u_1 u_2^2 + \beta_1 x \\
 \ddot{u}_2 + \mu_2 \dot{u}_2 + \omega_2^2 u_2 &= \alpha_5 u_1^3 + \alpha_6 u_1^2 u_2 + \alpha_8 u_2^3 + \beta_2 \dot{x}
 \end{aligned} \tag{C-4}$$

dimana x dan \dot{x} adalah keluaran dari filter dengan μ_i , ω_i dan α_i adalah konstanta.

Dengan melakukan transformasi koordinat,

$$Y_1 = x, Y_2 = u_1, Y_3 = u_2, Y_4 = \dot{x}, Y_5 = \dot{u}_1, Y_6 = \dot{u}_2 \tag{C-5}$$

Pers. (C-1) dan (C-4) dapat ditulis dalam bentuk :

$$\begin{aligned}
 \dot{Y}_1 &= Y_4, \\
 \dot{Y}_2 &= Y_5, \\
 \dot{Y}_3 &= Y_6, \\
 \dot{Y}_4 &= -\xi Y_4 - \omega_0^2 Y_1 + p(t), \\
 \dot{Y}_5 &= -\mu_1 Y_5 - \omega_1^2 Y_2 + \alpha_1 Y_2^3 + \alpha_2 Y_2^2 Y_3 + \alpha_3 Y_2 Y_3^2 + \beta_1 Y_1, \\
 \dot{Y}_6 &= -\mu_2 Y_6 - \omega_2^2 Y_3 + \alpha_5 Y_2^3 + \alpha_6 Y_2^2 Y_3 + \alpha_8 Y_3^3 + \beta_2 Y_4,
 \end{aligned} \tag{C-6}$$

Dengan menggunakan persamaan momen dari Pers. (20) dan Pers. (C-6), maka harga-harga respon dari momen dapat diperoleh dalam bentuk persamaan umum berikut :

$$\dot{M}_{i,j,k,l,m,n} = 1/2 l(l-1) p(t)^2 M_{i,j,k,l,m,n}$$

$$\begin{aligned}
& + iM_{i-1,j,k,l+1,m,n} + jM_{i,j-1,k,l,m+1,n} \\
& + kM_{i,j,k-1,l,m,n+1} - \xi l M_{i,j,k,l,m,n} \\
& + \omega_0^2 l M_{i+1,j,k,l-1,m,n} - \mu_1 m M_{i,j,k,l,m,n} \\
& + \omega_1^2 m M_{i,j+1,k,l,m-1,n} \\
& + \alpha_1 m M_{i,j+3,k,l,m-1,n} \\
& + \alpha_2 m M_{i,j+2,k+1,l,m-1,n} \\
& + \alpha_3 m M_{i,j+1,k+2,l,m-1,n} \\
& + \beta_1 m M_{i+1,j,k,l,m-1,n} \\
& - \mu_2 n M_{i,j,k,l,m,n} - \omega_2^2 n M_{i,j,k+1,l,m,n-1} \\
& + \alpha_5 n M_{i,j+3,k,l,m,n-1} \\
& + \alpha_6 n M_{i,j+2,k+1,l,m,n-1} \\
& + \alpha_8 n M_{i,j,k+3,l,m,n-1} \\
& + \beta_2 n M_{i,j,k,l-1,m,n-1}
\end{aligned} \tag{C-7}$$

Penjumlahan indeks $i+j+k+l+m+n$ mempunyai harga yang beragam dari satu sampai dengan harga orde yang dikehendaki.

Harga-harga momen dengan orde pertama didapat dari Pers. (C-7) dengan memberikan harga $i+j+k+l+m+n=1$

$$\begin{aligned}
\dot{M}_{100000} &= M_{000100} \\
\dot{M}_{010000} &= M_{000010} \\
\dot{M}_{001000} &= M_{000001}
\end{aligned} \tag{C-8}$$

$$\begin{aligned}
\dot{M}_{000100} &= -\xi M_{000100} + \omega_0^2 M_{100000} \\
\dot{M}_{000010} &= -\mu_1 M_{000010} - \omega_1^2 M_{010000} \\
& + \alpha_1 M_{030000} + \alpha_2 M_{021000} \\
& + \alpha_3 M_{012000} + \beta_1 M_{100000}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{M}_{000001} &= -\mu_2 M_{000001} - \omega_2^2 M_{001000} \\
& + \alpha_5 M_{030000} + \alpha_6 M_{021000} \\
& + \alpha_8 M_{003000} + \beta_2 M_{000100}
\end{aligned}$$

Dan harga-harga momen dengan orde dua didapat dengan memberikan harga $i+j+k+l+m+n=2$

$$\begin{aligned}
\dot{M}_{200000} &= 2 M_{100100} \\
\dot{M}_{110000} &= M_{100010} + M_{010100} \\
\dot{M}_{101000} &= M_{100001} + M_{001100} \\
\dot{M}_{100100} &= -\xi M_{100100} - \omega_0^2 M_{200000} \\
\dot{M}_{100010} &= -\mu_1 M_{100010} - \omega_1^2 M_{110000} \\
& + \alpha_1 M_{130000} + \alpha_2 M_{121000} \\
& + \alpha_3 M_{112000} + \beta_1 M_{200000} \\
& + M_{000110}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{M}_{100001} &= -\mu_2 M_{100001} - \omega_2^2 M_{101000} \\
& + \alpha_5 M_{130000} + \alpha_6 M_{121000} \\
& + \alpha_8 M_{103000} + \beta_2 M_{100100} \\
& + M_{000101}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{M}_{020000} &= 2 M_{010010} \\
\dot{M}_{011000} &= M_{010001} + M_{001010} \\
\dot{M}_{010100} &= -\xi M_{010100} - \omega_0^2 M_{110000} \\
& + M_{000110}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{M}_{010010} &= -\mu_1 M_{010010} - \omega_1^2 M_{020000} \\
& + \alpha_1 M_{040000} + \alpha_2 M_{031000} \\
& + \alpha_3 M_{022000} + \beta_1 M_{110000} \\
& + M_{000020}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{M}_{010001} &= -\mu_2 M_{010001} - \omega_2^2 M_{011000} \\
& + \alpha_5 M_{040000} + \alpha_6 M_{031000} \\
& + \alpha_8 M_{013000} + \beta_2 M_{010100} \\
& + M_{000011}
\end{aligned} \tag{C-9}$$

$$\begin{aligned}
\dot{M}_{002000} &= 2 M_{001001} \\
\dot{M}_{001100} &= -\xi M_{001100} - \omega_0^2 M_{101000} \\
& + M_{000101}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{M}_{001010} &= -\mu_1 M_{001010} - \omega_1^2 M_{011000} \\
& + \alpha_1 M_{031000} + \alpha_2 M_{022000} \\
& + \alpha_3 M_{013000} + \beta_1 M_{101000} \\
& + M_{000011}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{M}_{001001} &= -\mu_2 M_{001001} - \omega_2^2 M_{002000} \\
& + \alpha_5 M_{031000} + \alpha_6 M_{022000} \\
& + \alpha_8 M_{004000} + \beta_2 M_{001100} \\
& + M_{000002}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{M}_{000200} &= -2\xi M_{000200} - 2\omega_0^2 M_{100100} \\
& + 2\pi S_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{M}_{000110} &= -(\mu_1 + \xi) M_{000110} - \omega_1^2 M_{010100} \\
& + \alpha_1 M_{030100} + \alpha_2 M_{021100} \\
& + \alpha_3 M_{012100} + \beta_1 M_{100100} \\
& - \omega_0^2 M_{100010}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{M}_{000101} &= -(\mu_2 + \xi) M_{000101} - \omega_2^2 M_{011000} \\
& + \alpha_5 M_{030100} + \alpha_6 M_{021100} \\
& + \alpha_8 M_{003100} + \beta_2 M_{000200} \\
& - \omega_0^2 M_{100001}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{M}_{000020} &= -2\mu_1 M_{000020} - 2\omega_1^2 M_{010010} \\
& + 2\alpha_1 M_{030010} + 2\alpha_2 M_{021010} \\
& + 2\alpha_3 M_{012010} + 2\beta_1 M_{100010}
\end{aligned}$$

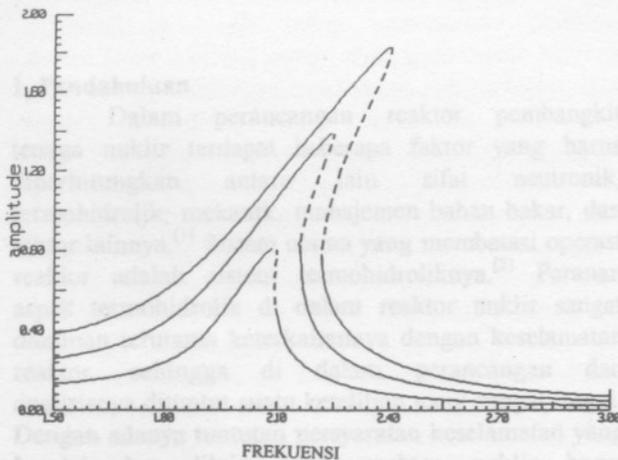
$$\begin{aligned}
 M_{000011} = & -(\mu_1 + \mu_2)M_{000011} - \omega_2^2 M_{001010} \\
 & + \alpha_5 M_{030010} + \alpha_6 M_{021010} \\
 & + \alpha_8 M_{003010} + \beta_2 M_{000110} \\
 & - \omega_1^2 M_{010001} + \alpha_1 M_{030001} \\
 & + \alpha_2 M_{021001} + \alpha_3 M_{012001} \\
 & + \beta_1 M_{100001}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{000002} = & -2\mu_2 M_{000002} - 2\omega_2^2 M_{001001} \\
 & + 2\alpha_5 M_{030001} + 2\alpha_6 M_{021001} \\
 & + 2\alpha_8 M_{003001} + 2\beta_2 M_{000101}
 \end{aligned}$$

Momen stasioner didapat dengan cara membuat bagian kiri Pers. (C-7) sama dengan nol. Pers. (C-8) dan (C-9) adalah persamaan terbuka, karena momen-momen dengan orde yang lebih tinggi terdapat dalam persamaan. Sesuai dengan metode Gauss tertutup yang didapat melalui Pers. (21) dan dengan memberikan $\kappa_n = 0$ untuk $n \geq 3$, maka didapat momen stasioner dengan orde 4 dalam bentuk :

$$\begin{aligned}
 E[Y_i Y_j Y_k Y_l] = & E[Y_i Y_j] E[Y_k Y_l] + E[Y_i Y_k] E[Y_j Y_l] \\
 & + E[Y_i Y_l] E[Y_j Y_k] \quad (C-10)
 \end{aligned}$$

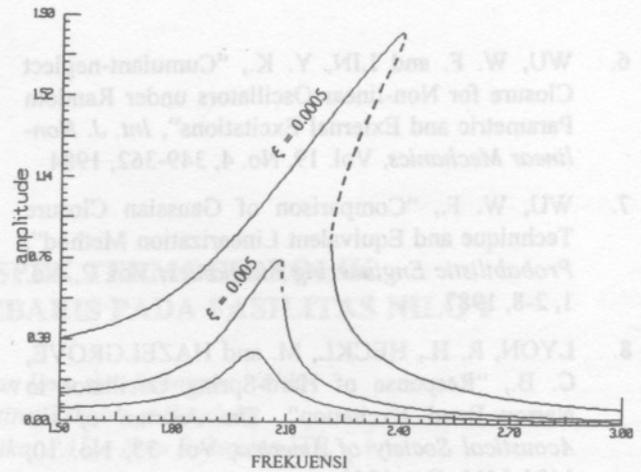
Dengan menggunakan Pers. (C-10), Pers. stasioner (C-8) dan (C-9) menjadi persamaan tertutup. Momen stasioner diperoleh dengan mempergunakan analisis numerik.



$$\begin{aligned}
 \omega_1 = 2.0, \omega_2 = 4.0, \mu_1 = \mu_2 = 0.1, \alpha_1 = -0.2, \alpha_2 = -0.93, \\
 \alpha_3 = -0.33, \alpha_5 = -0.03, \alpha_6 = -0.33, \alpha_8 = -1.15, \\
 \xi = 0.0005, \beta_2 = 0.1, \pi S_0 = 0.001
 \end{aligned}$$

Gambar 1 Respon-frekuensi untuk berbagai amplitudo gaya eksitasi dengan harga β_1 berturut-turut 0.25, 0.5 dan 0.75

Gb. (1) menunjukkan respon-frekuensi dengan berbagai harga amplitudo gaya eksitasi yang berbeda dan Gb. (2) adalah respon-frekuensi dengan harga amplitudo gaya eksitasi tetap $\beta_1 = 0.75$ tetapi mempunyai lebar pita yang berbeda $\xi = 0.25, 0.005$ dan 0.0005



Gambar 2 Respon-frekuensi dengan berbagai lebar pita $\xi = 0.25, 0.005$ dan 0.0005 . untuk $\beta_1 = 0.75$.

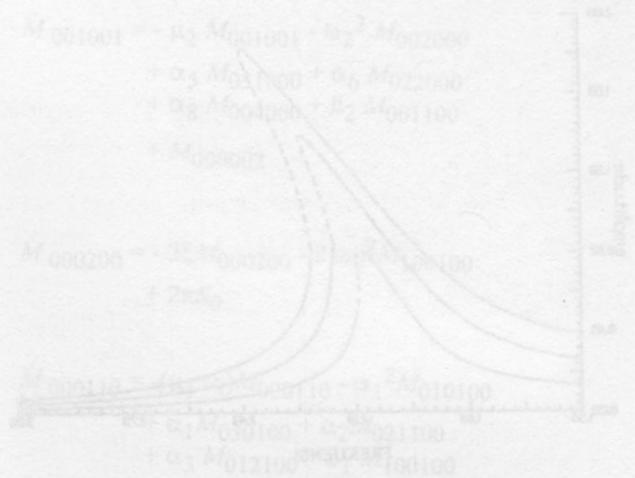
5. KESIMPULAN

Telah diperlihatkan bahwa pada kondisi-kondisi tertentu, fenomena loncatan dapat dihasilkan dari suatu sistem non-linier yang mengalami gaya eksitasi luar acak. Untuk besaran pita yang sangat sempit, maka akan didapat fenomena loncatan yang mempunyai karakteristik yang sama dengan fenomena loncatan yang dihasilkan dengan menggunakan gaya eksitasi deterministik.

Pustaka

1. CAUGHEY, T. K., "Derivation and Application of the Fokker-Planck Equation to Discrete Nonlinear Dynamic Systems Subjected to White Random Excitation", *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 35, No. 11, 1683-1692, Nov. 1963
2. SPANOS, P. T. D. and IWAN, W. D., "On the Existence and Uniqueness of Solutions Generated by Equivalent Linearisation", *Int. J. Non-linear Mechanics*, Vol. 13, 71-78, 1978
3. IWAN, W. D. and YANG, I. M., "Application of Statistical Linearization Techniques to Nonlinear Multidegree-of-Freedom Systems", *Journal of Applied Mechanics*, Trans. ASME, 545-550, June 1972
4. CRANDALL, S. H., "Non-gaussian Closure Techniques for Stationary Random Vibration", *Int. J. Non-linear Mechanics*, Vol. 20, No. 1, 1-8, 1985
5. WEN, Y. K., "Equivalent Linearization for Hysteretic Systems Under Random Excitation", *Journal of Applied Mechanics*, Trans. ASME, Vol. 47, 150-154, Mar. 1980

6. WU, W. F. and LIN, Y. K., "Cumulant-neglect Closure for Non-linear Oscillators under Random Parametric and External Excitations", *Int. J. Non-linear Mechanics*, Vol. 19, No. 4, 349-362, 1984
7. WU, W. F., "Comparison of Gaussian Closure Technique and Equivalent Linearization Method", *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 2, No. 1, 2-8, 1987
8. LYON, R. H., HECKL, M. and HAZELGROVE, C. B., "Response of Hard-Spring Oscillator to Narrow-Band Excitation", *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 33, No. 10, 1404-1411, Oct. 1961
9. SETIO, S., SETIO, H.D. and JEZEQUEL, L., "Modal Analysis of Nonlinear Multi-Degree-of-Freedom Structures", *The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, Society for Experimental Mechanics, Inc., USA, 75-93, Volume 7, Number 2, April 1992
10. SETIO, S., SETIO, H.D. and JEZEQUEL, L., "A Method of Non-Linear Modal Identification from Frequency Response Tests", *Journal of Sound and Vibration*, 497-515, 158(3), 1992
11. JIA, W. and FANG, T., "Jump Phenomena in Coupled Duffing Oscillators Under Random Excitation", *Journal Acoust. Soc. Am.* 81 (4), 961-965, 1987
12. IBRAHIM R. A., SOUNDARARAJAN, A., HEO, H., "Stochastic Response of Nonlinear Dynamic Systems Based on a Non-Gaussian Closure", *Journal of Applied Mechanics*, Trans. ASME, 965-970, Dec. 1985
13. IYENGAR, R. N. and DASH, P. K., "Study of the Random Vibration of Nonlinear Systems by the Gaussian Closure Technique", *Journal of Applied Mechanics*, Trans. ASME, 393-398, June 1978



Gambar 1. Respons sistem dengan harga β_1 berturut-turut 0.25, 0.5 dan 0.75
 (a) menunjukkan respon-turunan dengan berbagai harga amplitudo gaya eksitasi yang berbeda-beda (b) adalah respon-turunan dengan harga amplitudo gaya eksitasi tetap $\beta_1 = 0.75$ tetapi dengan nilai ω yang berbeda-beda $\omega = 0.25, 0.5$ dan 0.75