

PENERAPAN METODA KRITERIA OPTIMUM DAN FAKTOR SKALA PADA OPTIMASI STRUKTUR RANGKA DENGAN KENDALA PERPINDAHAN TUNGGAL

Wahyu Kuntjoro
Jurusan Teknik Penerbangan ITB

Ringkasan

Proses optimasi dapat dilaksanakan secara a priori dengan menetapkan suatu kondisi yang harus dipenuhi suatu rancangan pada titik optimum. Persamaan redisain dalam bentuk sederhana diturunkan dengan memanipulasi kondisi optimum. Pada penelitian ini kriteria optimum berupa kondisi matematik yang diperoleh dengan mendiferensiasikan fungsi Lagrange (Lagrangian) terhadap variabel perancangan. Pengaruh kendala terhadap struktur dilibatkan sepenuhnya di dalam menurunkan kriteria optimum dan menyusun algoritma redisain. Faktor skala diterapkan pada rancangan kriteria optimum yang sudah konvergen. Suatu program komputer telah dikembangkan dan diterapkan pada struktur rangka. Hasil keluarannya dibandingkan dengan hasil keluaran piranti lunak optimasi NASTRAN Sol-200 dan dilakukan analisis.

Abstract

An optimization process could be performed through a priori specification of a set of conditions to be satisfied by the optimum design. By manipulating the optimality criteria, simple redesign equations can be derived. This research looks at mathematical criteria obtained from differentiation of Lagrangian with respect to the design variables. In deriving the optimality criterion and developing the algorithm, full use is made of the knowledge of the behaviour of the constraint imposed on the structure. Scale factor is applied to a design which meets the optimality criteria. A computer program has been developed and applied to a frame structure. The design output is compared to the optimum design produced by NASTRAN Sol-200 optimization package.

Keywords: optimasi rangka, kriteria optimum, faktor skala, kendala perpindahan

1. PENDAHULUAN

Prosedur optimasi struktur pada umumnya didasarkan pada metoda pemrograman matematika. Di dalam kategori ini dikenal metoda-metoda seperti Metoda Arah Fisibel (*Feasible Direction Method*), Metoda Fungsi Penalti, dan Metoda Pemrograman Linear Berurut [1,2]. Optimasi struktur merupakan proses pemilihan harga variabel perancangan yang meminimumkan fungsi obyektif tetapi masih memenuhi persyaratan perancangan. Persyaratan perancangan ini dinyatakan di dalam bentuk kendala perancangan.

Variabel perancangan dapat berupa ketebalan pelat, luas penampang batang, atau pun momen inersia penampang. Untuk struktur ringan fungsi obyektif biasanya menyatakan berat struktur. Kendala perancangan mensyaratkan bahwa respon struktur haruslah tetap di dalam batas keamanan yang diijinkan. Sebagai contoh, tegangan kerja haruslah dapat ditahan oleh struktur tanpa kegagalan, demikian pula defleksi harus berada di dalam batas aman.

Teknik optimasi pemrograman matematika didasarkan pada penentuan arah pencarian di dalam ruang disain dan menentukan panjang langkah pencarian. Proses tersebut dilakukan secara iteratif. Pencarian dihentikan jika disain tidak dapat dioptimasi lebih lanjut seperti karena tidak ada lagi perubahan (penurunan) pada harga fungsi obyektif. Dalam hal ini proses iterasi dinyatakan mencapai konvergensi. Dengan karakteristik prosedur seperti itu, metoda-metoda pemrograman matematika menuntut usaha komputasi yang tinggi.

Pada makalah ini dilaporkan penelitian alternatif prosedur optimasi dengan pendekatan yang berbeda dengan pemrograman matematika. Pendekatan yang dilakukan adalah secara a priori menetapkan suatu kondisi yang harus dipenuhi suatu rancangan pada titik optimum [3]. Sebagai contoh, suatu struktur disebut optimum (a priori) jika tegangan yang bekerja pada komponen-komponen struktur sama dengan kekuatan material (metoda *fully stressed design*, FSD), misal kekuatan luluh, yang dipakai pada komponen-

komponen tersebut. Tidak ada persyaratan yang menyangkut meminimuman suatu fungsi obyektif tertentu. Tetapi telah diketahui bahwa untuk optimasi struktur statik tentu dengan kendala tegangan, metoda FSD mampu menghasilkan struktur dengan berat paling rendah (optimum).

Dengan memanipulasi kondisi (a priori) optimum, maka dapat diturunkan persamaan sederhana untuk mendapatkan variabel perancangan yang akan diterapkan secara iteratif. Analisis pada setiap proses iterasi adalah sederhana dan konvergensi seringkali mudah dicapai [3]. Fakta bahwa kondisi struktur dengan berat paling rendah tidak sepenuhnya tercapai, hanya didekati, menjadi tidak penting kemudahan yang dicapai di dalam mendapatkan disain yang lebih baik.

Kriteria optimum dapat ditetapkan secara intuitif seperti FSD atau diturunkan secara matematik berdasarkan masalah yang dihadapi [4]. Pada penelitian ini dipelajari kriteria matematika yang diperoleh dengan mendiferensiasikan fungsi Lagrange (*Lagrangian*) terhadap variabel perancangan. Pengaruh kendala terhadap struktur dimanfaatkan sepenuhnya di dalam menurunkan kriteria optimum dan menyusun algoritma. Algoritma yang dikembangkan menjadi efisien karena diturunkan khusus untuk masalah yang langsung dihadapi. Konvergensi dicapai jika tidak lagi terjadi perubahan berat struktur di dalam proses iterasi.

Struktur yang sudah konvergen ditinjau dari algoritma kriteria optimum diperbaiki lebih lanjut dengan secara iteratif menggunakan faktor skala. Faktor skala adalah angka pengali yang diperoleh dari rasio harga perpindahan akibat beban terhadap perpindahan yang diijinkan. Faktor skala diterapkan pada komponen-komponen struktur yang aktif. Komponen struktur aktif adalah komponen dengan variabel perancangan yang perubahannya didasarkan pada algoritma kriteria optimum, bukan pada kendala batas bawah atau batas atas (*gauge constraints*).

Masalah yang dibahas adalah optimasi struktur rangka dengan kendala perpindahan tunggal. Analisis rangka didasarkan atas batang tarik tekan. Suatu program komputer optimasi kriteria optimum bersama dengan faktor skala telah disusun. Fase analisis menggunakan metoda elemen hingga untuk struktur rangka batang tarik tekan. Metoda yang dikembangkan diterapkan pada struktur statik tak tentu klasik tiga batang. Untuk perbandingan digunakan piranti lunak optimasi NASTRAN Sol-200.

2. PENURUNAN PERSAMAAN OPTIMASI

2.1. Kriteria Optimum

Masalah optimasi struktur berkendala non-linear dapat dinyatakan sebagai: cari harga (x) sehingga fungsi obyektif

$$f(x) \text{ berharga minimum} \quad (1)$$

dan memenuhi kendala,

$$g_j(x) \leq 0 \quad j=1, m \quad (2)$$

dimana (x) = ($x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$) adalah variabel perancangan, dan g_j adalah kendala ketidaksamaan.

Dengan memperkenalkan variabel pengali Lagrange, λ , pada masalah optimasi di atas, dapat dituliskan Lagrangian [4],

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j \quad (3)$$

Berdasarkan persamaan (3), dapat diturunkan kondisi Kuhn Tucker yang merupakan kondisi optimum masalah optimasi berkendala sebagai berikut [4],

$$\nabla L(x^*, \lambda^*) = 0 \quad (4a)$$

$$\lambda_j^* g_j = 0 \quad (4b)$$

$$\lambda_j^* \geq 0 \quad g_j \leq 0 \quad (4c)$$

Ketiga persamaan di atas merupakan kondisi perlu (*necessary condition*) yang harus dipenuhi pada kondisi optimum (asterisk menyatakan pada optimum). Perlu disinggung di sini bahwa ketiga kondisi tersebut tidak menjamin titik yang diperoleh akan memberikan fungsi obyektif minimum global.

2.2. Kendala Perpindahan Tunggal

Berat struktur rangka dapat dinyatakan di dalam fungsi obyektif sebagai berikut:

$$W(x) = \sum_{i=1}^n \rho_i x_i l_i \quad (5)$$

dengan ρ_i adalah massa jenis batang i , x_i adalah luas penampang batang i , dan l_i adalah panjang batang i . Parameter n menyatakan jumlah batang. Rancangan harus memenuhi kendala perpindahan tunggal,

$$g = \delta - \Delta \leq 0 \quad (6)$$

Parameter δ menyatakan perpindahan akibat beban sedangkan Δ adalah perpindahan yang diijinkan.

Persamaan kendala perpindahan seperti persamaan (6) seringkali disebut sebagai kendala tingkah laku. Disamping kendala tingkah laku, perancangan struktur juga melibatkan kendala ukuran komponen (*gauge constraints*) yang menyatakan ukuran penampang minimum (dan juga maksimum) penampang yang diperbolehkan. Di dalam penyusunan algoritma pada penelitian ini, kendala ukuran dianggap sebagai kendala pasif dan tidak dimasukkan secara langsung ke dalam kriteria optimum. Dalam hal terjadi pelanggaran

kendala ukuran, maka harga variabel perancangan komponen tersebut akan ditetapkan sama dengan harga batas ukuran yang telah dilanggar.

Dengan menyusun Lagrangian:

$$L(x, \lambda) = \sum_{i=1}^n \rho_i x_i l_i + \lambda(\delta - \Delta) \quad (7)$$

dan menerapkan persamaan (4a) terhadap variabel perancangan diperoleh,

$$\rho_i l_i + \lambda \frac{\partial \delta}{\partial x} = 0 \quad (8)$$

Dengan demikian dapat dituliskan,

$$1 = -\lambda \frac{\frac{\partial \delta}{\partial x_i}}{\rho_i l_i} \quad (9)$$

Persamaan (9) hanya berlaku pada kondisi optimum. Pencarian variabel perancangan dilakukan secara iteratif dengan didasarkan pada persamaan (9). Dengan mengalikan persamaan (9) dengan x_i^r diperoleh,

$$x_i^{k+1} = x_i^k \left(-\frac{\lambda \frac{\partial \delta}{\partial x_i}}{\rho_i l_i} \right)^{\frac{1}{r}} \quad (10)$$

Harga r menentukan besarnya perubahan harga variabel perancangan. Untuk mengimplementasikan persamaan (10), perlu diketahui terlebih dahulu harga pengali lagrange, λ , dan harga turunan perpindahan terhadap variabel perancangan. Turunan perpindahan dicari dengan metoda beda hingga dimana perpindahan didapat dari analisis elemen hingga.

Pengali Lagrange dapat dicari sebagai berikut. Dengan menggunakan metoda Castigliano untuk menghitung perpindahan dan menuliskan kendala sebagai kesamaan, persamaan kendala (6) dapat ditulis sebagai berikut:

$$g = \sum_{i=1}^n \frac{T_i t_i l_i}{x_i E_i} - \Delta = 0 \quad (11)$$

T_i adalah gaya dalam batang akibat gaya yang bekerja, t_i adalah gaya dalam akibat beban maya, dan E_i adalah modulus Young material yang dipakai. Dengan memasukkan persamaan (11) ke Lagrangian, dan menerapkan kondisi pertama Kuhn-Tucker akan diperoleh,

$$x_i = \lambda \frac{T_i t_i}{\rho_i E_i} \quad (12)$$

Substitusi harga x_i ke persamaan (5) memberikan,

$$W(x) = \lambda \delta \quad (13)$$

Dengan demikian persamaan kendala dapat ditulis,

$$g = \frac{W}{\lambda} - \Delta = 0$$

Sehingga pengali Lagrange dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\lambda = \frac{W}{\Delta} \quad (14)$$

Persamaan (14) berlaku valid pada optimum (demikian juga persamaan (10)), dengan demikian pemakaiannya di dalam iterasi merupakan pendekatan.

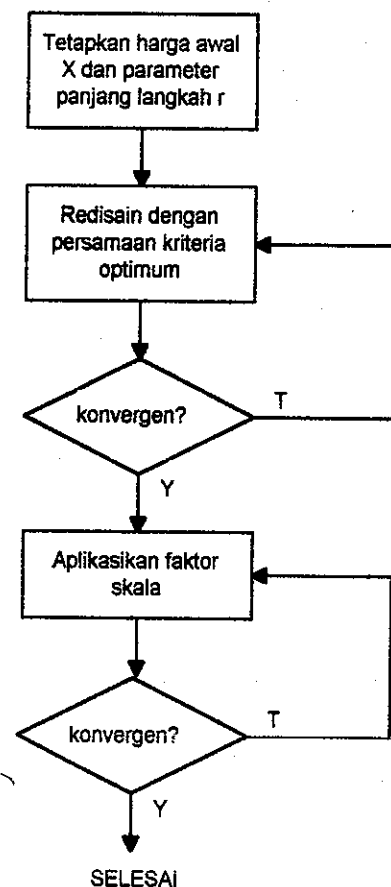
2.3. Faktor Skala

Faktor skala k adalah faktor pengali yang harganya ditentukan dari persamaan,

$$k = \frac{\delta}{\Delta} \quad (15)$$

Faktor skala k dipergunakan apabila kondisi konvergen kriteria optimum sudah tercapai. Faktor pengali k diterapkan secara iteratif pada komponen aktif yang harga variabel perancangannya melulu ditentukan oleh Pers. (10).

Gambar 1 memperlihatkan diagram alir dari sistem yang dikembangkan.



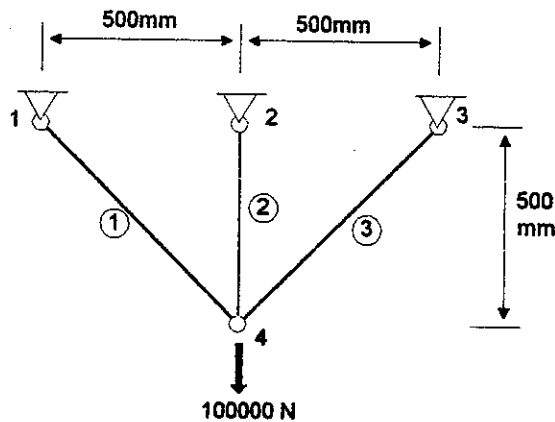
Gambar-1 Diagram alir optimasi kriteria optimum dan faktor skala.

2.4. Pemrograman

Pemrograman dilakukan dengan bahasa FORTRAN pada Fortran PowerStation 4.0. Respon perpindahan diperoleh dari analisis elemen hingga untuk struktur rangka. Elemen rangka dimodelkan sebagai batang tarik tekan. Metoda analisis rangka diprogramkan berdasarkan teknik yang diberikan pada [5]. Rutin-rutin solusi numerik yang dibutuhkan diambil dari [6].

3. OPTIMASI STRUKTUR RANGKA TIGA BATANG

Program optimasi diterapkan untuk mencari optimum kasus klasik struktur rangka 3 batang, seperti tampak dalam Gambar 2.



$E=71000 \text{ N/mm}^2$ $\rho=2.8 \text{ kg/dm}^3$ $\text{Min.}=50 \text{ mm}^2$

Gambar-2 Struktur rangka tiga batang.

3.1. Solusi Algoritma Kriteria Optimum dan Faktor Skala

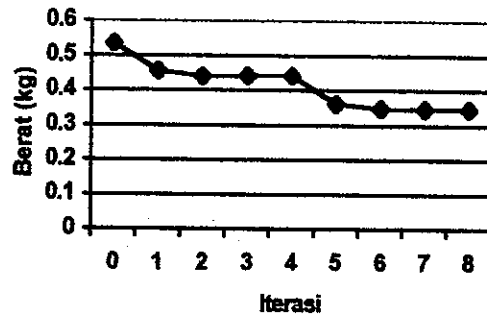
Geometri masalah optimasi kasus rangka tiga batang diberikan pada Gambar 2. Ukuran luas penampang minimum untuk ketiga batang adalah 50 mm^2 . Beban yang bekerja adalah 100.000 N . Perpindahan arah vertikal maksimum yang diijinkan pada titik lokasi pemberian beban (nodal 4) adalah 5 mm . Material yang dipakai memiliki harga modulus Young, $E=71.000 \text{ N/mm}^2$. Massa jenis material adalah $2,8 \text{ kg/dm}^3$. Luas penampang masing-masing batang dianggap sebagai variabel perancangan dengan harga awal 100 mm^2 .

Tabel-1 Proses iterasi untuk harga awal $X_0=100 \text{ mm}^2$

Iter	X1 (mm ²)	X2 (mm ²)	X3 (mm ²)	δ (mm)	W (kg)
0	100.0	100.0	100.0	-4.13	0.534
1	50.0	183.9	50.0	-3.21	0.456
2	50.0	173.8	50.0	-3.37	0.441
3	50.0	174.9	50.0	-3.35	0.443
4	50.0	174.8	50.0	-3.35	0.443
5	50.0	117.1	50.0	-4.61	0.361
6	50.0	107.9	50.0	-4.92	0.349
7	50.0	106.2	50.0	-4.98	0.347
8	50.0	105.8	50.0	-4.99	0.346

Optimasi berhenti sesudah 4 iterasi algoritma kriteria optimum ditambah 4 iterasi faktor skala (total 8 iterasi). Tabel-1 memperlihatkan perubahan harga variabel perancangan, perpindahan, dan berat struktur di dalam proses menuju optimum. Perubahan berat struktur selama proses optimasi, hingga iterasi ke-8, ditunjukkan pada gambar-3.

Perubahan Berat



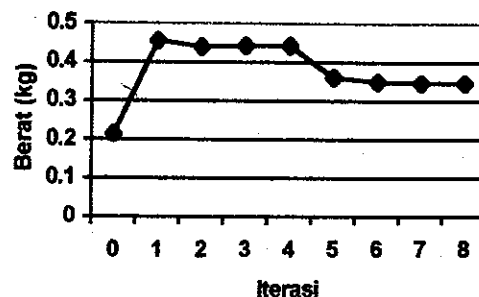
Gambar-3 Perubahan berat struktur, $X_0=100 \text{ mm}^2$

Dicoba pula harga variabel perancangan awal yang berbeda, yaitu $X_0=40 \text{ mm}^2$. Iterasi untuk harga awal yang berbeda ini ditunjukkan pada Tabel-2, sedangkan gambar-4 memperlihatkan perubahan berat struktur. Tampak bahwa proses optimasi berhenti sesudah 4 iterasi kriteria optimum ditambah 4 iterasi faktor skala.

Tabel-2 Proses iterasi untuk harga awal $X_0=40 \text{ mm}^2$

Iter	X1 (mm ²)	X2 (mm ²)	X3 (mm ²)	δ (mm)	W (kg)
0	40.0	40.0	40.0	-10.31	0.214
1	50.0	183.9	50.0	-3.21	0.456
2	50.0	173.8	50.0	-3.37	0.441
3	50.0	174.9	50.0	-3.35	0.443
4	50.0	174.8	50.0	-3.35	0.443
5	50.0	117.1	50.0	-4.61	0.361
6	50.0	107.9	50.0	-4.92	0.349
7	50.0	106.2	50.0	-4.98	0.347
8	50.0	105.8	50.0	-4.99	0.346

Perubahan Berat



Gambar-4 Perubahan berat struktur, $X_0=40 \text{ mm}^2$

Terlihat bahwa kedua harga disain awal yang berbeda akan memberikan hasil optimum yang sama. Karena konvergensi kriteria optimum dicapai pada harga variabel (dan juga berat serta perpindahan) yang sama maka hasil akhir dari faktor skala akan memberikan solusi yang identik.

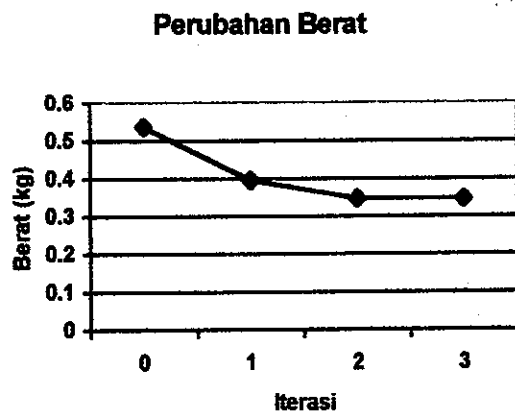
3.2. Solusi NASTRAN Sol-200

NASTRAN Sol-200 adalah piranti lunak optimasi struktur yang didasarkan atas pemrograman matematika. Metoda optimasi yang diadopsi di dalam NASTRAN Sol-200 adalah Metoda Arah Fisibel yang sudah dimodifikasi. Analisis respon stuktur di dalam NASTRAN adalah dengan menggunakan metoda elemen hingga. NASTRAN Sol-200 diterapkan pada masalah optimasi rangka tiga batang untuk mendapatkan solusi yang akan dibandingkan dengan solusi kriteria optimum dan faktor skala.

Tabel-3 memperlihatkan proses iterasi dengan harga variabel perancangan awal $X_0=100 \text{ mm}^2$. Gambar 4 memperlihatkan proses konvergensi.

Tabel-3 Solusi NASTRAN Sol-200, $X_0=100 \text{ mm}^2$

Iter	X1 (mm ²)	X2 (mm ²)	X3 (mm ²)	δ (mm)	W (kg)
0	100.0	100.0	100.0	-4.13	0.536
1	56.1	123.7	56.1	-4.31	0.395
2	50.0	105.6	50.0	-5.00	0.346
3	50.0	105.6	50.0	-5.00	0.346



Gambar-5 Perubahan berat struktur, solusi NASTRAN Sol-200

3.3. Pembahasan

Dari hasil-hasil yang ditunjukkan pada bahasan sebelumnya terbukti bahwa solusi optimasi yang diberikan oleh kombinasi metoda kriteria optimum dan faktor skala mencapai harga optimum yang sama dengan yang dihasilkan oleh piranti lunak optimasi NASTRAN. Dengan demikian metoda optimasi yang telah diselidiki ini mampu memecahkan masalah optimasi kendala perpindahan tunggal dengan baik.

Dengan mengamati proses iterasi yang terjadi tampak bahwa untuk kedua harga variabel perancangan awal yang berbeda, algoritma kriteria optimum mencapai konvergensi pada iterasi ke empat. Namun demikian konvergensi yang terjadi tidaklah pada titik desain optimum sebenarnya (*true optimum*). Masalah utama dari algoritma kriteria optimum adalah persamaan redesain yang dipakai, baik persamaan (10) maupun persamaan (14), diturunkan dari kriteria matematika yang hanya berlaku pada optimum. Dengan demikian persamaan yang diturunkan hanya berlaku benar pada kondisi optimum. Pemakaiannya pada titik-titik rancang yang jauh dari optimum dapat mengarah pada konvergensi yang tidak tepat pada optimum yang sebenarnya.

Dari penjelasan tersebut dapat dimengerti alasan diperlukannya kombinasi pemakaian algoritma kriteria optimum dengan algoritma faktor skala. Pemakaian faktor skala akan secara pasti membawa rancangan menuju harga optimum. Konsep faktor skala yang dikembangkan di sini mirip dengan kriteria FSD. Namun demikian faktor skala hanya perlu diterapkan pada komponen aktif. Dengan menerapkan terlebih dahulu algoritma kriteria optimum akan diketahui komponen-komponen mana yang aktif.

Algoritma kriteria optimum yang dikembangkan di dalam penelitian ini hanya "mendekati" optimum dan bukan menghasilkan harga optimum sebenarnya. Hal ini dapat dilihat dari perbandingan hasil yang dicapai dengan hasil yang diperoleh dari NASTRAN Sol-200 yang menggunakan prinsip pemrograman matematika. Namun demikian, algoritma kriteria optimum sangatlah menarik karena kemudahannya. Persamaan redesain yang diperoleh dan prosedur optimasinya sangatlah sederhana jika dibandingkan dengan prosedur pemrograman matematika. Jumlah variabel perancangan yang lebih besar tidaklah membuat proses optimasi menjadi lebih rumit dan tidak pula mempengaruhi karakteristik konvergensi proses optimasi. Dengan menerapkan metoda faktor skala pada solusi kriteria optimum akan diperoleh desain yang sangat mendekati optimum.

Parameter r pada persamaan (10) dipilih dengan harga $r \geq 1$. Pada optimasi yang dilakukan, dipilih harga $r=1$. Harga r yang lebih besar akan mereduksi harga x yang baru. Harga $r=2$ juga telah dicoba dan menghasilkan disain yang sama tetapi pada jumlah iterasi yang lebih besar.

Perlu disampaikan di sini bahwa optimasi yang dilakukan adalah untuk menunjukkan kemampuan algoritma kriteria optimum dan faktor skala. Struktur yang dihasilkan, juga oleh NASTRAN Sol-200, fisibel hanya untuk kendala perpindahan mengingat algoritma yang diturunkan adalah berdasarkan kendala perpindahan tunggal.

Kasus yang diberikan, yaitu struktur statik tak tentu tiga batang, memang sangat sederhana. Namun demikian, algoritma yang dikembangkan juga berlaku

untuk struktur rangka dengan jumlah komponen yang lebih banyak. Walaupun contoh yang diberikan adalah optimasi struktur rangka, namun konsep yang diberikan juga berlaku bagi jenis-jenis struktur yang lain.

4. KESIMPULAN

Di dalam makalah ini telah dilaporkan penelitian mengenai pengembangan metoda optimasi struktur rangka berkendala perpindahan tunggal dengan menggunakan metoda kriteria optimum dan faktor skala. Algoritma kriteria optimum diperoleh dengan mendiferensiasikan fungsi Lagrange terhadap variabel perancangan dengan melibatkan aspek kendala secara langsung. Faktor skala diperoleh dengan mendapatkan harga rasio dari perpindahan akibat beban terhadap harga perpindahan yang diijinkan. Dari hasil optimasi tampak bahwa metoda yang dikembangkan mampu memperoleh hasil rancangan yang paling tidak sudah mendekati optimum.

Hal yang menarik dari metoda kriteria optimum dan faktor skala adalah kemudahan di dalam melaksanakan proses optimasi. Persamaan redisain yang diturunkan sangat sederhana dan mudah diterapkan. Untuk kasus yang dipelajari, penambahan jumlah variabel perancangan tidaklah membuat proses optimasi menjadi lebih rumit dan tidak pula mempengaruhi karakteristik konvergensi proses optimasi.

Tahapan lebih lanjut dari penelitian metoda kriteria optimum adalah menurunkan algoritma optimasi dengan memasukkan kendala tegangan di samping kendala perpindahan.

5. PUSTAKA

1. G.N. Vanderplaats, *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design: With Applications*, McGraw-Hill, New York, (1984)
2. J.S. Arora, *Introduction to Optimum Design*, McGraw Hill, Singapore, (1989)
3. R.H. Gallagher dan O.C Zienkiewicz, *Optimum Structural Design Theory and Applications*, John Wiley & Sons, London, (1973)
4. A.J. Morris, *Foundations of Structural Optimization: A Unified Approach*, John Wiley & Sons, Chichester, (1982)
5. R.D. Cook, *Concepts and Applications of Finite Element Analysis. 2nd ed.*, John Wiley & Sons, USA, (1981)
6. W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky, dan W.T. Vetterling, *Numerical Recipes*, Cambridge University Press, USA, (1989)
7. G.J. Moore, *MSC NASTRAN Design Sensitivity and Optimization V68*, The MSC, USA, (1994)