

PENGARUH ARAH SERAT TERHADAP FAKTOR INTENSITAS TEGANGAN PADA UNIDIRECTIONAL LAMINA YANG MENGANDUNG CENTER CRACK

IGN Wiratmaja Puja
Yedi R. Supriyadi

Laboratorium Perancangan Mesin
Institut Teknologi Bandung

Ringkasan

Makalah ini menyajikan analisis faktor intensitas tegangan (SIF) pada unidirectional lamina serat-matrix yang mengandung center crack dan mendapat pembebanan uniaksial. Variabel arah serat, θ , parameter dimensi retakan, $2a/L$, fraksi volume serat, V^f , matrix, V^m , rasio kekakuan serat dan matrix, E^f/E^m , dan tebal pelat, t , dikaji pengaruhnya terhadap nilai faktor intensitas tegangan. Persamaan tegangan dan regangan pada lamina diturunkan dengan metoda pendekatan mikromekanik. Governing equation dipecahkan secara numerik dengan metoda elemen hingga menggunakan tipe elemen segitiga. Matrik kekakuan elemen segitiga diturunkan dengan menggunakan 'fungsi bentuk' polinomial. Dari metoda ini dikembangkan perangkat lunak untuk menganalisis tegangan-regangan unidirectional lamina yang mengandung center crack. Untuk studi kasus digunakan lamina carbon epoxy dengan serat karbon tipe P-100. Hasil analisis dipresentasikan dalam bentuk grafik-grafik SIF terhadap variabel-variabel arah serat, rasio sifat mekanis dan geometri crack.

Abstract

This paper presents the stress intensity factor (SIF) analysis for unidirectional fiber-matrix lamina containing center crack under uniaxial loading. Several variables are considered on the influence to the stress intensification factor i.e. fiber direction, θ , crack dimension parameter, $2a/L$, fiber and matrix volume fraction, V^f , V^m , fiber and matrix stiffness ration, E^f/E^m , and lamina thickness. The stress-strain equations for the lamina are derived using micromechanic approach. The governing equations are solved numerically using the finite element method with triangular type element. The element stiffness matrix is obtained using the polynomial shape functions. The software to calculate stress-strain in the lamina containing center crack is developed. Case studies for numerical purposes consider the carbon-epoxy lamina with carbon type P-100. Numerical results for carbon epoxy lamina are presented in graphical form of SIF as a function of the fiber direction, fiber matrix stiffness ratio and volume ratio, and crack geometry.

Keywords: Stress intensification factor, center crack, finite element method, fiber-matrix lamina.

1. Pendahuluan

Material komposit mempunyai sejarah penggunaan yang sudah cukup luas. Permulaan pemakaian material komposit tidak diketahui secara pasti. Namun demikian, sejarah menyatakan bahwa bangsa Mesir kuno telah menggunakan kayu lapis untuk meningkatkan kekuatan dan resistansi terhadap ekspansi panas. Susunan jerami kering telah digunakan oleh bangsa Israel untuk meningkatkan kekuatan baluk-balok lumpur sebagai bahan bangunan dari sejak dahulu.

Seiring dengan kemajuan ilmu dan teknologi yang dikuasai manusia, dewasa ini pemakaian material komposit semakin meningkat terutama untuk struktur dan komponen mesin. Hal ini terjadi karena material komposit memiliki sifat-sifat mekanik yang dapat dioptimalkan dengan mengatur geometri, distribusi dan orientasi fasa-fasa penyusunnya. Keistimewaan sifat-sifat material komposit diantaranya adalah memiliki kekuatan dan kekakuan yang tinggi, ketahanan lelah,

berat jenis yang rendah, tahan korosi dan aus, isolasi akustik yang baik dan sebagainya. Namun demikian, sifat anisotropik material komposit mengakibatkan persamaan-persamaan mekanika isotropik dalam analisis tegangan untuk keperluan perancangan tidak berlaku lagi.

Keretakan merupakan salah satu modus kegagalan yang sering terjadi pada struktur. Akibat adanya retak tersebut, distribusi tegangan di sekitarnya akan mengalami perubahan. Hal ini mengakibatkan persamaan dasar mekanika untuk menghitung tegangan tidak lagi dapat menyatakan keadaan tegangan yang sebenarnya, terutama pada daerah di sekitar retakan. Tegangan lokal yang tinggi akan terjadi disekitar daerah retak terutama pada ujung retak. Disamping itu, perambatan retak dapat terjadi apabila energi elastik yang dilepaskan pada pertumbuhan retak lebih besar daripada energi yang diperlukan untuk mengakibatkan suatu permukaan menjadi retak^[6]. Intensitas medan

tegangan lokal yang mengakibatkan perambatan retak pertama kali dijelaskan oleh Irwin^[8]. Irwin mengusulkan tiga modulus perpanjangan retak yang dinyatakan dengan faktor intensitas tegangan K_I , K_{II} , dan K_{III} .

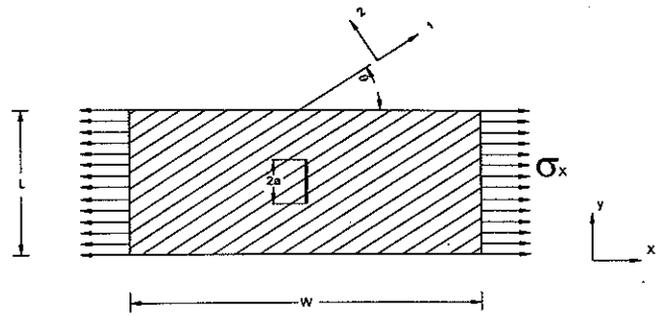
Analisis tegangan yang dilakukan terhadap lamina komposit berpenguat serat telah dikembangkan dengan dua jenis model. Model yang pertama adalah model mikromekanik lokal dan yang kedua adalah model makromekanik global. Analisis dengan menggunakan model mikromekanik mempunyai ide dasar memisahkan sifat-sifat antara serat dan matrix untuk keperluan perhitungan. Sedangkan pada model makromekanik, sifat-sifat serat dan matrix digabungkan dan menjadi sifat secara global dari material komposit. Dalam hal ini, lamina komposit berpenguat serat dianggap sebagai material anisotropik homogen. Pada penggunaan model makromekanik, tidak terdapat pemisahan sifat terhadap serat dan matrix.

Metoda pendekatan mikromekanik telah dikembangkan untuk mempelajari retak yang terjadi pada serat, matriks, atau pada *interphase*. Hasil penelitian tentang hal ini telah dipublikasikan oleh Adams^[1], Goree dan Gross^[5], Reedy^[13], dan Hermann^[7]. Disamping itu, analisis makromekanik telah pula dikembangkan untuk mempelajari pengaruh retak pada skala makro seperti delaminasi. Penelitian terhadap retak dengan menghubungkan analisis retak pada skala mikro dan dan retak pada skala makro telah dilakukan oleh Kwon^[9]. Dalam penelitian yang dilakukan oleh Kwon, model analisis yang menjembatani perbedaan antara analisis mikromekanik dan analisis makromekanik telah digunakan.

Melanjutkan penelitian yang telah diuraikan di atas, dalam makalah ini analisis dilakukan dengan tujuan antara lain untuk mengetahui pengaruh arah serat, θ , parameter geometri retak, $2a/L$, rasio kekakuan serat dan matrix, E^f/E^m , fraksi volume serat dan matrix serta tebal pelat lamina, t , terhadap besarnya harga faktor intensitas tegangan modulus I. Jenis pembebanan yang diberikan adalah beban tarik uniaksial. Sistem koordinat dan geometri lamina yang dianalisis ditunjukkan pada gambar 1. Hasil analisis ditampilkan dalam bentuk grafik-grafik yang didalamnya tersusun beberapa kurva.

Persamaan-persamaan differensial tegangan-perpindahan untuk laminate yang mengandung center crack dipecahkan dengan menggunakan metoda elemen hingga. Dari analisis numerik ini dikembangkan perangkat lunak untuk analisis tegangan regangan lamina serat-matrik yang mengandung crack.

Dalam analisis, rasio modulus elastisitas fiber terhadap matrik divariasikan pada 1, 2, 5, 10, 15, dan 20. Sedangkan harga fraksi volume serat divariasikan pada harga-harga 0,35, 0,50 dan 0,65^[9] dan tebal lamina pada variasi 0,02 inch, 0,04 inch, 0,05 inch, 0,06 inch, 0,08 inch dan 0,1 inch. Parameter retak, $2a/L$, divariasikan pada 0,25, 0,50 dan 0,75. Untuk perhitungan numerik diambil studi kasus lamina dengan serat carbon jenis P-100^[2] dan matrik epoxy



Gambar 1 Geometri lamina serat-matrik yang mengandung center crack ($2a$ = panjang crack; L = lebar plat; W = Panjang lamina; σ = Beban uniaxial; θ = Arah serat)

2. Dasar Teori

Lamina serat dan matrix yang dibahas dalam makalah ini adalah merupakan golongan material orthotropik. Hubungan antara konstanta elastik pada material orthotropik lebih kompleks apabila dibandingkan dengan material isotropik. Secara umum, hubungan tegangan-regangan pada material orthotropik dapat dinyatakan dengan hukum Hooke berupa persamaan tensor yaitu^[3,4]

$$\epsilon_{ij} = S_{ijkl} \cdot \sigma_{ij} \quad (1)$$

atau

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \epsilon_{kl} \quad (2)$$

dengan σ_{ij} adalah tegangan, ϵ_{ij} adalah regangan, C_{ijkl} adalah matriks *stiffness*, S_{ijkl} adalah matriks *compliances*. Matriks *stiffness*, $[C_{ijkl}]$, merupakan invers dari matriks *compliance*, $[S_{ijkl}]$. Persamaan tegangan-regangan pada lamina orthotropik dengan tiga bidang tegak lurus dapat ditulis dalam persamaan matriks dengan *contracted notations* sebagai berikut^[3] Daniel:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Kondisi tegangan pada lamina serat matrik dapat diidealkan dengan plane stress. Lamina dengan bidang 1-2, untuk plane stress :

$$\sigma_3 = 0 ; \tau_{23} = 0 ; \tau_{31} = 0 \quad (4)$$

Berdasarkan kondisi plane-stress dan dengan menggunakan persamaan regangan-tegangan, maka untuk lamina orthotropik dapat diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \epsilon_3 &= S_{13} \cdot \sigma_1 + S_{23} \cdot \sigma_2 \\ \gamma_{23} &= 0 ; \gamma_{31} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Dengan demikian, persamaan (3) dapat direduksi menjadi

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Persamaan (6) dapat diinvers sehingga diperoleh persamaan tegangan-regangan

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

dengan Q adalah komponen *stiffness* yang direduksi, dan masing-masing merupakan fungsi konstanta material:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (8)$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (9)$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (10)$$

$$Q_{66} = G_{12} \quad (11)$$

Pendekatan secara mikromekanik digunakan untuk menentukan harga-harga komponen matriks *compliances* atau matriks *stiffness* dalam hubungannya dengan sifat-sifat elastisitas material penyusun komposit. Hal ini dapat ditulis dalam *contracted notations* sebagai berikut:

$$C_{ij} = C_{ij}(E^f, \nu^f, V^f, E^m, \nu^m, V^m) \quad (12)$$

dengan

E = Modulus Young untuk serat isotropik,

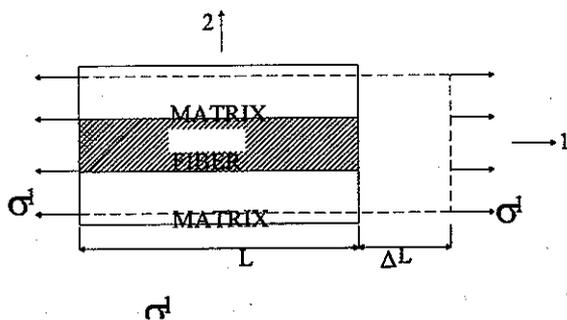
ν = Poisson's Ratio untuk serat isotropik,

V = fraksi volume

superscript f untuk *fiber* dan m untuk *matrix*.

Regangan yang terjadi pada serat dan matrix untuk pembebanan uniaksial pada arah serat (longitudinal), seperti ditunjukkan pada gambar 2 adalah sama besar ($\varepsilon_1^f = \varepsilon_1^m = \varepsilon_1$), dengan asumsi antara fiber dan matrix terjadi perekatan yang sempurna. Berdasarkan gambar 2, diperoleh persamaan untuk modulus elastisitas lamina arah longitudinal sebagai fungsi dari modulus elastisitas serat dan *matrix* yaitu:

$$E_1 = V^f E^f + V^m E^m \quad (13)$$

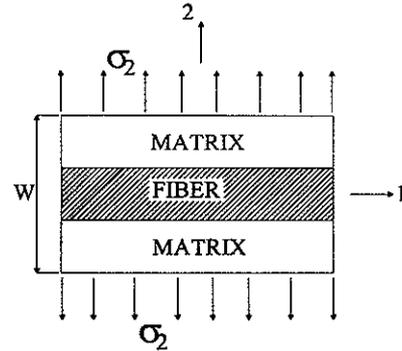


Gambar 2 Model Elemen Volume Lamina dengan Pembebanan Arah 1 (Sumbu Utama Material)

Idealisasi juga dilakukan dengan menganggap bahwa baik *matrix* maupun serat akan menerima tegangan transversal yang sama besar, sehingga regangan transversal (ε_2) pada serat dan matrix berbeda ($\varepsilon_2^f \neq \varepsilon_2^m$).

Asumsi ini berlaku apabila pada lamina serat dan *matrix* bekerja tegangan transversal yang terdistribusi seragam. Untuk beban uniaksial arah transversal seperti ditunjukkan pada gambar 3, diperoleh harga regangan lamina arah transversal yang dihitung dari regangan transversal serat dan *matrix* serta fraksi volume serat dan *matrix*,

$$\varepsilon_2 = V^f \varepsilon_2^f + V^m \varepsilon_2^m \quad (14)$$



Gambar 3 Model Elemen Volume Lamina dengan Pembebanan Arah 2 (melintang)

Hubungan modulus elastisitas lamina arah transversal akhirnya dapat dinyatakan dengan

$$E_2 = \frac{E^f E^m}{V^m E^f + V^f E^m} \quad (15)$$

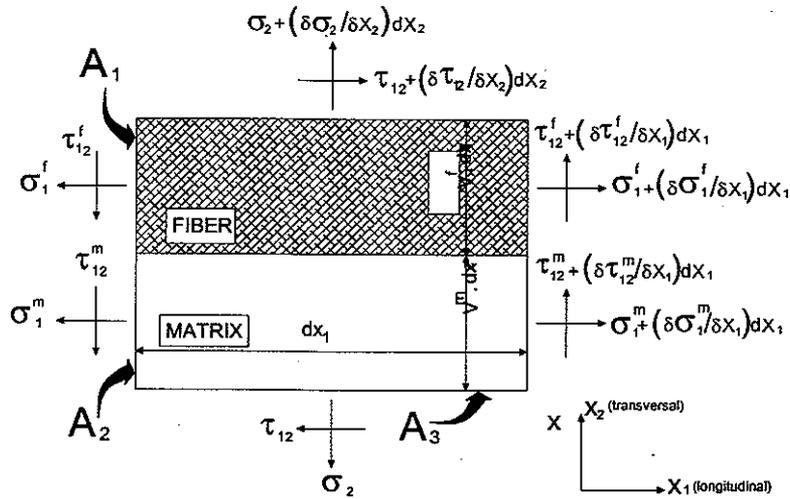
Selanjutnya persamaan (1) sampai (15) akan digunakan sebagai dasar untuk penurunan *governing equations* tegangan-regangan disekitar center crack.

3. Analisis Tegangan-Regangan dengan Pendekatan Mikromekanik

Pemodelan dalam analisis mikromekanik digunakan untuk memperoleh *governing equations* yang menyatakan hubungan tegangan-regangan antara masing-masing material penyusunnya.

Model lamina orthotropik pada gambar 4 diasumsikan mewakili potongan kecil dari material dengan dimensi dx_1 dan dx_2 . Model yang mewakili lamina orthotropik diambil dari potongan melintang segiempat pelat lamina dengan serat mengisi material *matrix* secara seragam (tanpa daerah kosong atau *void*). Ikatan antara serat dan *matrix* diasumsikan sempurna sehingga tegangan-tegangan yang bekerja menjadi seragam untuk setiap potongan serat dan *matrix* tetangganya.

Pada kondisi tegangan dua dimensi, terdapat dua komponen tegangan normal dan tegangan geser yang bekerja pada masing-masing material pokok. Namun demikian, semua komponen tegangan yang bekerja pada masing-masing material penyusun tersebut saling berhubungan. Persamaan kesetimbangan pada gambar 4 dapat ditulis sebagai



Gambar 4 Model Analisis Pelat Unidirectional Lamina

- Kesetimbangan gaya arah longitudinal:

$$0 = \frac{\partial \sigma_1^f}{\partial x_1} V^f + \frac{\partial \sigma_1^m}{\partial x_1} V^m + \frac{\partial \tau_{12}^f}{\partial x_2} V^f + \frac{\partial \tau_{12}^m}{\partial x_2} V^m \quad (16)$$

- Kesetimbangan gaya arah transversal:

$$0 = \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{12}^f}{\partial x_1} V^f + \frac{\partial \tau_{12}^m}{\partial x_1} V^m \quad (17)$$

Sifat-sifat pada model analisis, dalam pengkajiannya, dibedakan berdasarkan sifat-sifat material penyusun sistem komposit yang bersangkutan. Hubungan antara tegangan-regangan pada masing-masing unsur pokok dapat dinyatakan sebagai

$$\{d\sigma^f\} = [Q^f] \{d\epsilon^f\} \quad (18)$$

dan

$$\{d\sigma^m\} = [Q^m] \{d\epsilon^m\} \quad (19)$$

Hubungan antara tegangan-regangan pada masing-masing material penyusun, yaitu:

$$\{d\sigma^f\} = \{d\sigma_1^f d\sigma_2 d\tau_{12}^f\}^T \quad (20)$$

$$\{d\sigma^m\} = \{d\sigma_1^m d\sigma_2 d\tau_{12}^m\}^T \quad (21)$$

$$\{d\epsilon^f\} = \{d\epsilon_1 d\epsilon_2^f d\gamma_{12}\}^T \quad (22)$$

$$\{d\epsilon^m\} = \{d\epsilon_1 d\epsilon_2^m d\gamma_{12}\}^T \quad (23)$$

Matriks $[Q^f]$ dan $[Q^m]$ merupakan reduksi matriks stiffness dan dalam hal ini adalah untuk kondisi *plane stress* (persamaan 7). Berdasarkan persamaan (12), maka sifat-sifat material penyusun lamina komposit dapat digolongkan ke dalam sifat-sifat material isotropik, baik untuk serat maupun *matrix*. Dengan demikian, dapat ditetapkan bahwa $E_1^f = E_2^f = E^f$ dan $\nu_{12}^f = \nu_{21}^f = \nu^f$. Hal yang sama berlaku untuk *matrix*.

Langkah selanjutnya adalah menyusun matriks global dari matriks lokal. Pengglobalan matriks dilakukan dengan mencari hubungan tegangan pada tingkat lokal (*constituent level*) terhadap regangan pada tingkat global. Kemudian, regangan pada tingkat global dapat dinyatakan dalam fungsi perpindahan global. Berdasarkan persamaan (14), regangan normal arah transversal, $d\epsilon_2$, dalam hubungannya dengan regangan normal transversal serat, $d\epsilon_2^f$, dan *matrix*, $d\epsilon_2^m$, sebagai

fungsi dari fraksi volume serat, V^f , dan *matrix*, V^m , dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$d\epsilon_2 = V^f d\epsilon_2^f + V^m d\epsilon_2^m \quad (24)$$

Dengan meninjau kembali persamaan (18) dan (19), maka kenaikan tegangan normal arah transversal (arah 2) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$d\sigma_2 = Q_{21}^f d\epsilon_1 + Q_{22}^f d\epsilon_2^f + Q_{23}^f d\gamma_{12} = Q_{21}^m d\epsilon_1 + Q_{22}^m d\epsilon_2^m + Q_{23}^m d\gamma_{12} \quad (25)$$

Dari persamaan (18) dan (19), dapat diketahui hubungan $d\epsilon_2^f$ dan $d\epsilon_2^m$ terhadap $d\epsilon_2$ sebagai berikut:

$$\begin{Bmatrix} d\epsilon_1 \\ d\epsilon_2^f \\ d\gamma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ -V^m(Q_{21}^f - Q_{21}^m) & Q_{22}^m & -V^m(Q_{23}^f - Q_{23}^m) \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\epsilon_1 \\ d\epsilon_2 \\ d\gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

dan,

$$\begin{Bmatrix} d\epsilon_1 \\ d\epsilon_2^m \\ d\gamma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ V^f(Q_{21}^f - Q_{21}^m) & Q_{22}^f & V^f(Q_{23}^f - Q_{23}^m) \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\epsilon_1 \\ d\epsilon_2 \\ d\gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (27)$$

dengan,

$$R = V^f Q_{22}^m + V^m Q_{22}^f \quad (28)$$

Hubungan tegangan tingkat lokal (*constituent level*) dengan regangan tingkat global (level lamina) dapat diketahui dengan mensubstitusi persamaan (26) dan (27) ke dalam persamaan (18) dan (19) yaitu:

- Pada serat:

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_1^f \\ d\sigma_2 \\ d\tau_{12}^f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^f - Q_{12}^f \frac{V^m(Q_{21}^f - Q_{21}^m)}{R} & Q_{12}^f \frac{Q_{22}^m}{R} & -Q_{12}^f \frac{V^m(Q_{23}^f - Q_{23}^m)}{R} + Q_{13}^f \\ Q_{21}^f - Q_{22}^f \frac{V^m(Q_{21}^f - Q_{21}^m)}{R} & Q_{22}^f \frac{Q_{22}^m}{R} & -Q_{22}^f \frac{V^m(Q_{23}^f - Q_{23}^m)}{R} + Q_{23}^f \\ Q_{31}^f - Q_{32}^f \frac{V^m(Q_{21}^f - Q_{21}^m)}{R} & Q_{32}^f \frac{Q_{22}^m}{R} & -Q_{32}^f \frac{V^m(Q_{23}^f - Q_{23}^m)}{R} + Q_{33}^f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\epsilon_1 \\ d\epsilon_2 \\ d\gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (29)$$

- Pada *matrix*:

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_1^m \\ d\sigma_2 \\ d\tau_{12}^m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^m - Q_{12}^m \frac{V^f(Q_{21}^f - Q_{21}^m)}{R} & Q_{12}^m \frac{Q_{22}^f}{R} & Q_{12}^m \frac{V^f(Q_{23}^f - Q_{23}^m)}{R} + Q_{13}^m \\ Q_{21}^m - Q_{22}^m \frac{V^f(Q_{21}^f - Q_{21}^m)}{R} & Q_{22}^m \frac{Q_{22}^f}{R} & Q_{22}^m \frac{V^f(Q_{23}^f - Q_{23}^m)}{R} + Q_{23}^m \\ Q_{31}^m - Q_{32}^m \frac{V^f(Q_{21}^f - Q_{21}^m)}{R} & Q_{32}^m \frac{Q_{22}^f}{R} & Q_{32}^m \frac{V^f(Q_{23}^f - Q_{23}^m)}{R} + Q_{33}^m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\epsilon_1 \\ d\epsilon_2 \\ d\gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (30)$$

Dengan demikian, matriks konstanta elastik tingkat global (level lamina) dapat diperoleh melalui penggabungan matriks-matriks pada persamaan (29) dan (30) sebagai berikut:

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_1^m \\ d\sigma_1^f \\ d\sigma_2 \\ d\tau_{12}^m \\ d\tau_{12}^f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^m + Q_{12}^m \frac{V^f(Q_{21}^f - Q_{21}^m)}{R} & Q_{12}^m \frac{Q_{22}^f}{R} & Q_{13}^m \frac{V^f(Q_{23}^f - Q_{23}^m)}{R} + Q_{13}^m \\ Q_{11}^f + Q_{12}^f \frac{V^m(Q_{21}^f - Q_{21}^m)}{R} & Q_{12}^f \frac{Q_{22}^m}{R} & -Q_{12}^f \frac{V^m(Q_{23}^f - Q_{23}^m)}{R} + Q_{13}^f \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \\ Q_{31}^m + Q_{32}^m \frac{V^f(Q_{21}^f - Q_{21}^m)}{R} & Q_{32}^m \frac{Q_{22}^f}{R} & Q_{33}^m \frac{V^f(Q_{23}^f - Q_{23}^m)}{R} + Q_{33}^m \\ Q_{31}^f + Q_{32}^f \frac{V^m(Q_{21}^f - Q_{21}^m)}{R} & Q_{32}^f \frac{Q_{22}^m}{R} & -Q_{32}^f \frac{V^m(Q_{23}^f - Q_{23}^m)}{R} + Q_{33}^f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\epsilon_1 \\ d\epsilon_2 \\ d\gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (31)$$

dengan,

$$D_{31} = Q_{21}^f - Q_{22}^m \frac{V^m(Q_{21}^f - Q_{21}^m)}{R} = Q_{21}^m + Q_{22}^m \frac{V^f(Q_{21}^f - Q_{21}^m)}{R} \quad (32)$$

$$D_{32} = Q_{22}^f \frac{Q_{22}^m}{R} = Q_{22}^m \frac{Q_{22}^f}{R} \quad (33)$$

$$D_{33} = -Q_{22}^m \frac{V^m(Q_{23}^f - Q_{23}^m)}{R} + Q_{23}^f = Q_{22}^m \frac{V^f(Q_{23}^f - Q_{23}^m)}{R} + Q_{23}^m \quad (34)$$

Persamaan (31) dapat disederhanakan penulisannya menjadi:

$$\{d\sigma\} = [D]\{d\epsilon\}_{1,2} \quad (35)$$

Dengan meninjau kembali persamaan (16) dan (17), hubungan tegangan lokal-regangan global pada persamaan (35) dapat diubah menjadi persamaan hubungan tegangan global-regangan global sebagai berikut:

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} V^m & V^f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V^m & V^f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\sigma_1^m \\ d\sigma_1^f \\ d\sigma_2 \\ d\tau_{12}^m \\ d\tau_{12}^f \end{Bmatrix} \quad (36)$$

Substitusi persamaan (35) pada persamaan (36), menghasilkan:

$$\{d\sigma\}_{1,2} = [\bar{D}]\{d\epsilon\}_{1,2} \quad (37)$$

Pada umumnya arah sumbu utama atau sumbu material (1,2) dari lamina tidak selalu sama dengan arah pembebanan yang terjadi pada sumbu referensi (x,y). Karena itu, komponen tegangan dan regangan harus ditransformasi dengan persamaan [10]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (38)$$

dan

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \frac{1}{2}\gamma_{12} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (39)$$

dengan [T] adalah matriks transformasi yaitu:

$$[T] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad (40)$$

dimana $m = \cos \theta$ dan $n = \sin \theta$.

Sudut θ positif diukur dari sumbu-x pada koordinat Cartesian ke sumbu-1 berlawanan arah jarum jam (lihat gambar 1).

Apabila matriks $[\bar{R}]$ dinyatakan sebagai,

$$[\bar{R}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (41)$$

maka governing equations hubungan tegangan-regangan dapat diturunkan menjadi

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} [\bar{D}] [\bar{R}] [T] [\bar{R}]^{-1} \begin{Bmatrix} d\epsilon_x \\ d\epsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (42)$$

atau,

$$\{d\sigma\}_{x,y} = [\bar{D}]\{d\epsilon\}_{x,y} \quad (43)$$

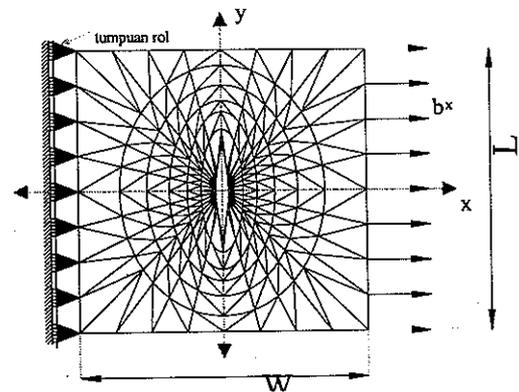
Faktor intensitas tegangan K_I untuk modulus pembukaan retak dinyatakan dengan [14]:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \quad (44)$$

dengan a adalah setengah panjang retak.

4. Penurunan Matrik Kekakuan Elemen Segitiga

Solusi eksak persamaan tegangan-regangan yang dinyatakan dalam persamaan (42) sangat sulit didapat. Dalam makalah ini persamaan tersebut diturunkan solusinya dengan menggunakan metoda elemen hingga. Di sini dipilih tipe elemen segitiga karena fungsi bentuknya yang sederhana disamping pemodelan elemen segitiga cukup baik untuk mengikuti bentuk kondisi batas. Dengan menggunakan prinsip simetri, analisis terhadap pelat lamina orthotropik yang mengandung center crack dapat disederhanakan menjadi seperempat pelat saja. Pada bidang-bidang simetri diberikan tumpuan-rol dengan maksud mencegah agar perpindahan tidak melintasi bidang simetri tersebut. Pemodelan elemen hingga ditunjukkan pada gambar 5 dan 6.

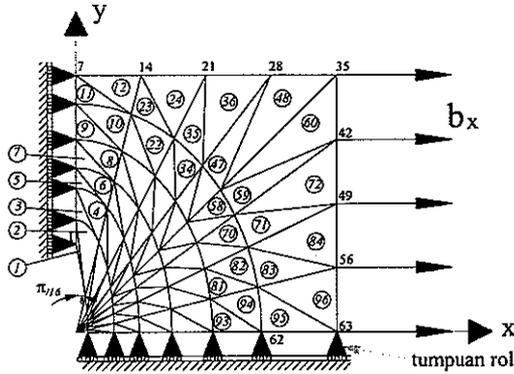


Gambar 5 Model elemen hingga untuk pelat lamina dengan center crack

Perpindahan pada setiap titik dapat diperoleh dengan mengetahui u dan v , yaitu perpindahan dalam arah x dan y . Pada kasus elastisitas dua dimensi, pola perpindahan

u dan v dapat dinyatakan dalam suatu polinomial dengan bentuk yang paling sederhana yaitu:

$$\begin{aligned} u &= a_1 + a_2x + a_3y \\ v &= a_4 + a_5x + a_6y \end{aligned} \quad (45)$$



Gambar 6 Model Elemen Hingga untuk seperempat Pelat Lamina dengan center crack

Berdasarkan persamaan polinomial tersebut perpindahan pada masing-masing nodal elemen segitiga dapat dinyatakan dengan

$$u(x, y) = N_1u_1 + N_2u_2 + N_3u_3 \quad (46)$$

$$v(x, y) = N_1v_1 + N_2v_2 + N_3v_3 \quad (47)$$

dengan N_i adalah fungsi bentuk (*shape function*).

Hubungan regangan-perpindahan pada kasus elemen dua dimensi dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (48)$$

Persamaan matriks yang menyatakan hubungan tegangan-perpindahan dapat dinyatakan dengan meninjau kembali persamaan (35) dan persamaan (48) sehingga dapat ditulis:

$$\{\sigma\}_{x,y} = [\overline{D}][B]\{d\} \quad (49)$$

dimana $\{d\}$ merupakan matriks perpindahan dan,

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (50)$$

Persamaan (50) ini berlaku apabila sumbu-sumbu utama material (1,2) dari lamina sama dengan arah pembebanan yang terjadi atau sumbu referensi (x, y).

Matriks kekakuan elemen segitiga yang menyatakan hubungan antara gaya dan perpindahan diperoleh melalui penghitungan dengan metoda pendekatan langsung

(*direct approach*). Penggunaan metoda pendekatan langsung (*direct approach*) dalam mencari hubungan antara gaya dan perpindahan akan menghasilkan suatu persamaan matriks yaitu:

$$\{F^e\} = [B_1][\overline{D}][B]\{d\} \quad (51)$$

Dengan demikian, matriks kekakuan elemen dapat ditulis sebagai berikut:

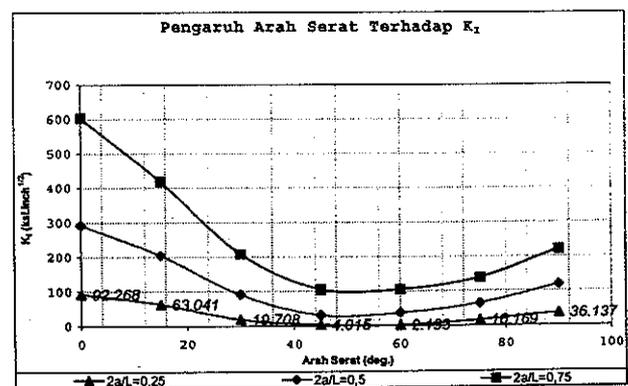
$$\{K^e\} = [B_1][\overline{D}][B] \quad (52)$$

Elemen matrik kekakuan persamaan (52) di atas dicantumkan pada Lampiran A. Selanjutnya dari persamaan-persamaan yang telah turunkan di atas digunakan menjadi dasar untuk pengembangan perangkat lunak analisis Stress Intensification Factor (SIF) pada laminate serat matrik yang mengandung center crack.

5. Hasil Numerik

Dalam makalah ini analisis numerik mengambil studi kasus material lamina *carbon-epoxy* dengan sifat-sifat mekanis fiber dan matrik sebagai berikut^[2]: $E^m = 10 \times 10^6$ psi, $E^f = 100 \times 10^6$ psi, $\nu^m = 0,35$, $\nu^f = 0,25$, $V^f = 0,65$, dan $V^m = 0,35$. Hasil analisis ditampilkan dalam bentuk grafik-grafik SIF sebagai fungsi dari beberapa variabel seperti arah serat, lebar crack, dan dimensi pelat.

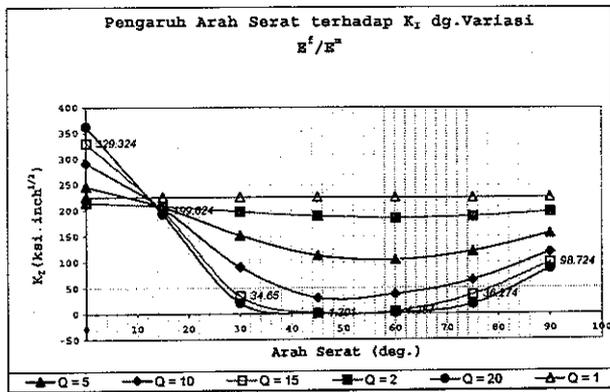
Gambar 7 menunjukkan pengaruh arah serat, θ , terhadap harga faktor intensitas tegangan untuk beberapa dimensi retak yang berbeda. Dalam satu grafik terdapat tiga kurva yang menunjukkan variasi harga parameter dimensi retak, $2a/L$, yang merupakan perbandingan antara panjang retak dengan lebar pelat. Terlihat bahwa harga faktor intensitas tegangan, K_I , semakin tinggi untuk $2a/L$ yang semakin besar. Dari grafik, dapat disimpulkan bahwa untuk $2a/L$ yang sama, K_I mencapai harga minimum pada arah serat, θ , sekitar 45° sampai dengan 60° .



Gambar 7 Harga K_I sebagai Fungsi Arah Serat, θ , untuk Beberapa Parameter Dimensi Retak, $2a/L$ ($E^f/E^m = 10$, $\nu^f = 0,65$, $t = 0,1$ inch)

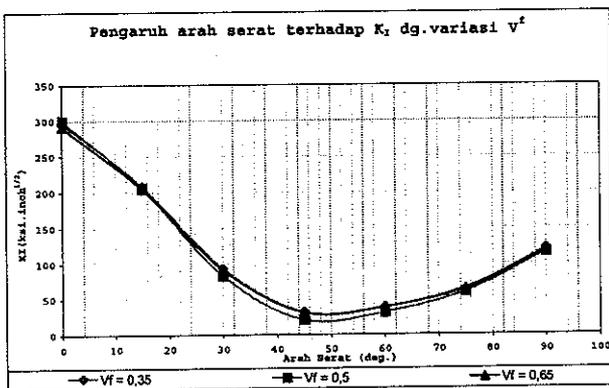
Gambar 8 merepresentasikan hubungan antara faktor intensitas tegangan terhadap perbandingan modulus elastisitas serat dan matrik, E^f/E^m . Untuk keperluan analisis, E^f/E^m diambil pada harga-harga 2, 5, 10 dan 15 pada pelat lamina dengan $2a/L = 0,5$. Berdasarkan

grafik-grafik tersebut, dapat disimpulkan bahwa untuk arah serat melebihi 14° , harga K_I menurun dengan semakin besarnya perbandingan E^f/E^m . Pada sudut arah serat kurang dari 14° , terlihat bahwa harga K_I meningkat dengan membesarnya rasio E^f/E^m .



Gambar 8 Harga K_I sebagai Fungsi Arah Serat, θ , untuk Beberapa Perbandingan E^f/E^m ($2a/L = 0,5$, $t = 0,1$ inch, $V^f = 0,65$)

Kondisi ini dibandingkan untuk setiap sudut arah serat yang sama. Terlihat bahwa untuk harga E^f/E^m yang sama, K_I dan K_t mencapai harga minimum untuk sudut arah serat antara 45° sampai dengan 60° . Namun demikian, untuk E^f/E^m pada harga 2, 5, 10 dan 15 K_I dan K_t mempunyai harga yang sama (berpotongan) untuk sudut arah serat $\pm 14^\circ$.



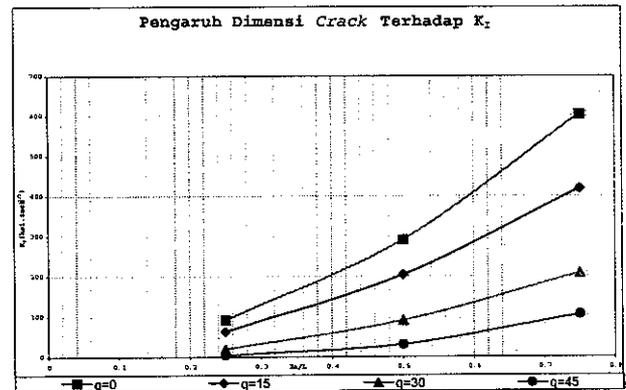
Gambar 9 Harga K_I sebagai Fungsi Arah Serat, θ , untuk Beberapa variasi V^f ($2a/L = 0,5$, $E^f/E^m = 10$, $t = 0,1$ inch)

Gambar 9 adalah grafik yang menunjukkan pengaruh arah serat, θ , terhadap harga K_I untuk beberapa harga fraksi volume serat, V^f . Di sini harga V^f divariasikan pada harga 0,35, 0,5 dan 0,65 pada pelat lamina dengan $2a/L = 0,5$. Dalam hal ini, memvariasikan komposisi serat lebih sering dilakukan daripada memvariasikan komposisi *matrix* dalam suatu proses pembuatan sistem komposit. Komposisi serat relatif lebih mudah divariasikan dibandingkan dengan komposisi *matrix*.

Terlihat K_I mencapai harga minimum ketika sudut arah serat berada pada kisaran 45° sampai dengan 60° . Dengan mengkaji grafik, dapat pula disimpulkan bahwa harga K_I tidak terlalu jauh berbeda (untuk sudut arah serat yang sama) ketika volume serat dan *matrix*

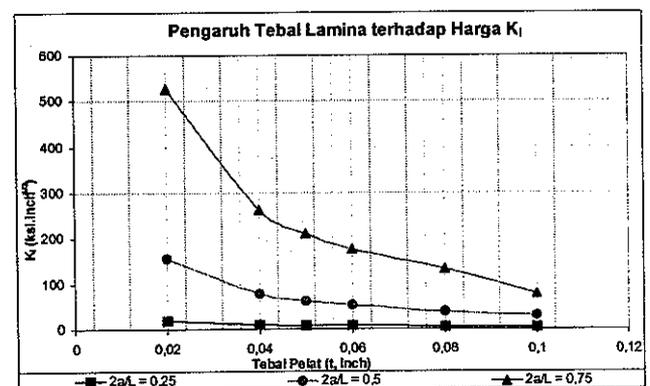
divariasikan sepanjang material serat dan *matrix* tetap. Perbedaan yang sedikit mencolok terlihat ketika komposisi serat adalah 0,5 bagian volume dari total volume komposit. Pada komposisi ini, kurva cenderung menunjukkan harga-harga K_I yang lebih rendah daripada serat dalam komposisi lain terhadap volume total komposit.

Pengaruh dimensi crack terhadap K_I untuk beberapa arah serat ditampilkan pada gambar 10. Terlihat bahwa untuk parameter dimensi retak, $2a/L$, yang berharga 0,5 dan 0,75, K_I berharga minimum ketika sudut arah serat 45° . Sedangkan ketika parameter dimensi retak, $2a/L$, berharga 0,25, K_I mencapai harga minimum untuk sudut arah serat 60° .



Gambar 10 Harga K_I sebagai Fungsi Parameter Dimensi Retak, $2a/L$, dengan Arah Serat, $\theta \leq 45^\circ$ ($t = 0,1$ inch; $E^f/E^m = 10$; $V^f = 0,65$)

Karakteristik K_I terhadap tebal pelat lamina dengan memvariasikan parameter dimensi retakan, $2a/L$ ditunjukkan pada gambar 11. Absis merupakan tebal pelat, (dalam hal ini bersatuan inch) dan ordinat adalah K_I . Berdasarkan grafik terlihat bahwa untuk lebar retak yang sama, semakin tipis pelat lamina, semakin tinggi harga K_I . Dapat pula disimpulkan bahwa untuk tebal pelat yang sama, semakin besar retak yang terjadi, semakin tinggi pula harga K_I .



Gambar 11 Harga K_I sebagai Fungsi dari Tebal Pelat, t , dengan Variasi Dimensi Retak, $2a/L$ ($E^f/E^m = 10$; $\theta = 45^\circ$; $V^f = 0,65$)

6. Kesimpulan dan Saran

Berdasarkan hasil analisis yang disajikan dalam makalah ini, dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut:

- Pelat lamina komposit dengan retak terpusat, pada umumnya mempunyai harga faktor intensitas tegangan, K_I yang berharga minimum pada kisaran sudut arah serat 45° sampai dengan 60° dan berharga maksimum pada sudut arah serat 0° .
- Berdasarkan perbandingan parameter dimensi retak, $2a/L$, pada 0,25, 0,5 dan 0,75 diperoleh bahwa semakin besar harga parameter dimensi retak, $2a/L$, semakin tinggi pula harga K_I .
- Pelat lamina orthotropik dengan variasi harga fraksi volume serat, V^f , pada 0,35, 0,5 dan 0,65, K_I mempunyai harga minimum pada pada $V^f = 0,5$ dengan arah serat 45° sampai dengan 60° .
- Rasio E^f/E^m yang semakin besar pada lamina serat dan matrix dengan retak pusat akan mengakibatkan terjadinya penurunan harga K_I . Hal ini terjadi pada sudut arah serat lebih dari 14° .
- Untuk sudut arah serat kurang dari 14° , semakin kaku serat yang digunakan (semakin besar rasio E^f/E^m), semakin tinggi harga K_I yang terjadi.

Kajian tentang intensitas tegangan pada lamina serat-matrix yang mengandung retak pusat ini masih memerlukan beberapa pengembangan dan penelitian lebih lanjut. Adapun pengembangan yang dapat dilakukan diantaranya adalah:

- memvariasikan orientasi retakan terhadap arah pembebanan,
- dengan metoda yang telah dikembangkan ini, dapat pula dilakukan penelitian untuk mempelajari pengaruh retakan terhadap harga K_I pada laminate atau susunan dari beberapa jenis lamina.
- menggunakan jenis pembebanan yang lain untuk memperoleh harga intensitas tegangan pada pelat lamina seperti beban tekan uniaksial, beban biaksial, ataupun beban momen lentur.

Sumber dana :

Dana Penelitian yang didasari artikel ini adalah melalui dana "Kaji Teoritis dan Eksperimental Tentang Medan Elastis-Plastis Di Sekitar Crack Pada Struktur Komposit Laminate", Grant No. 63/P2IPT/DPPM/98/PHBVII/1/1998, yang dikelola oleh Dit Binlitabmas Ditjen Dikti, Depdiknas.

7. Pustaka

1. Adams, D.F., 1974, "Elastoplastic Crack Propagation in a Transversely Loaded Unidirectional Composite", *Journal of Composite Material*, Vol.8, pp. 38-54.
2. ASTM *Standard for Composite Materials, Vol.1*
3. Daniel, Isaac M., and Ishai, Ori, 1994, *Engineering Mechanics of Composite Materials*, Oxford University Press.
4. Gibson, Ronald F., 1994, *Principles of Composite Material Mechanics*, McGraw-Hill .
5. Goree, J.G., and Gross, R.S., 1979, "Analysis of a Unidirectional Composite Containing Broken Fibers and Matrix Damage", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.13, pp. 563-578.
6. Griffith, A.A., 1920, "The Phenomena of Rupture and Flow in Solids", *Philosophical Transactions of the Royal Society*, Vol 221A, pp. 163-198,
7. Hermann, K.P., 1987, "Thermal Crack Growth in Self-Stressed Glassy Compounds", *Fracture of Non-Metallic Materials*, eds, K.P. Herrmann and L.H. Larsson, Brussels and Luxemburg, 1987, pp. 181-205.
8. Irwin, G.R., 1949, *Fracturing of Metals*, American Society of Metals, Ohio
9. Kwon, Y.W., 1992, "Analysis of Composite Plates Containing Cracks", *Journal of Pressure Vessel Technology*, Vol. 114, pp.358-363.
10. Logan, Daryl L., 1986, *A First Course in The Finite Element Method*, PWS Engineering, Boston.
11. Peterson, R.E., 1974, *Stress Concentration Factors*, John Wiley & Sons, 1974.
12. Puja, I.W., Soemantri, S. Riyanto, B. 1998, "Pengaruh Arah Serat dan Susunan Lapisan terhadap Faktor Konsentrasi Tegangan pada Komposit Laminate Carbon/Epoxy AS4/3501-6 Berlubang Lingkaran dan Ellips", *Jurnal Mesin*, Vol.XII No.2, pp.39-47.
13. Reedy, E.D., Jr., 1980, "Analysis of Center-Notched Monolayers With Application to Boron/Aluminium Composite", *Journal of the Mechanics of Physics and Solids*, Vol. 28, pp. 265-286.
14. Sih, G.C., 1973, *Mechanics of Fracture 1: Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems*, Noordhoff International Publishing, Leyden, The Netherlands.

