DASAR METODE DOMAIN WAKTU

UNTUK

ANALISIS GETARAN ACAK LINEAR

Bambang Sutjiatmo*

RINGKASAN

Kata Kunci : Persamaan diferensial acak, vektor keadaan, derau putih (white noise), persamaan Ljapunov, Kovariansi.

Sistem getaran acak linear telah banyak dipelajari dengan menggunakan metode spektrum frekuensi. Tetapi, metode tersebut memerlukaan waktu hitung yang panjang, terutama untuk sistem orde tinggi, karena analisis dilakukan melalui transformasi Fourier dan penghitungan integral tak hingga. Dalam makalah ini akan disajikan metode lain , yaitu metode domain waktu yang dapat dipakai untuk menghitung sifat statistik jawab secara langsung dalam domain waktu tanpa harus melalui transformasi ke domain frekuensi. Metode ini lebih sederhana dan memerlukan waktu hitung yang lebih pendek dibandingkan dengan metode analisis spektrum.

1. Pendahuluan

Sistem getaran linear yang mendapat gangguan acak berdistribusi Gauss akan mempunyai jawab acak berdistribusi Gauss pula. Jawab acak tersebut dicirikan dengan nilai rataan dan fungsi korelasinya. Sejauh ini, sifat jawab tersebut dihitung dengan metode analisis spektrum frekuensi, lihat misalnya Crandal [1], Fabian [2] dan Newland [3]. Tetapi metode tersebut memerlukan waktu hitung yang panjang, karena harus melalui transformasi Fourier dan penghitungan integral tak hingga. Waktu hitung akan meningkat dengan cepat dengan naiknya orde sistem getaran.

Dalam makalah ini akan disajikan cara lain untuk menghitung sifat statistik jawab getaran, yaitu metode domain waktu. Dalam metode ini akan ditunjukkan bahwa kovariansi jawab dapat dihitung secara langsung dalam domain waktu, tanpa harus melalui transformasi ke domain frekuensi. Metode ini akan banyak mempersingkat waktu hitung. Untuk memperjelas metode ini, akan diberikan contoh penerapan metode ini dalam analisis sistem getaran satu derajat kebebasan dengan gangguan derau putih.

* Jurusan Mesin ITB

2. Persamaan Gerak Sistem

Persamaan gerak sistem getaran linear kendaraan dapat dituliskan sebagai

$$M\,\ddot{y}(t) + C\,\dot{y}(t) + K\,y(t) = L\,u(t) \qquad (1)$$

di mana $y(t)$ adalah vektor simpangan, M matriks massa, C matriks redaman, K matriks kekakuan, L matriks masukan dan u matriks gangguan.

Dengan menggunakan vektor keadaan

$$z = \begin{Bmatrix} y \\ \dot{y} \end{Bmatrix} \qquad (2)$$

pers. 1 dapat dinyatakan dalam vektor keadaan tersebut, yaitu dengan menambahkan identitas $\dot{y} = \dot{y}$, menjadi

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}L \end{bmatrix} \qquad (3)$$

atau

$$\dot{z}(t) = A\,z(t) + B\,u(t) \qquad (4)$$

di mana

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}L \end{bmatrix} \qquad (5)$$

Kondisi awal z_o dapat merupakan vektor acak Gauss yang dicirikan dengan nilai rataan m dan kovariansi V_o, yaitu

$$m_{zo} = m_o$$
$$F_{zo}(t,t) = V_o \qquad (6)$$

di mana lambang F menyatakan lambang korelasi . Jika pers. 4 dikalikan di depannya dengan matriks fungsi eksponen e^{-At} akan diperoleh

$$e^{-At}\dot{z} - e^{-At}z = e^{-At} B u$$

atau

$$\frac{d}{dt}[e^{-At} z] = e^{-At} B u$$

Integrasi terhadap t menghasilkan

$$\int_{t_o}^{t} \frac{d}{d\tau}(e^{-A\tau}z)\, d\tau = \int_{t_o}^{t} e^{-A\tau} B u(\tau)\, d\tau$$

atau

$$e^{-At}z(t) - e^{-At_o}z(t_o) = \int_{t_o}^{t} e^{-A\tau} B u(\tau)\, d\tau$$

atau

$$z(t) = e^{-A(t-t_o)}z(t_o) + \int_{t_o}^{t} e^{-A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \qquad (7)$$

Dengan $t_o = 0$,

$$z(t) = e^{-At}z(0) + \int_{0}^{t} e^{-A(t-\tau)} B u(\tau)\, d\tau \qquad (8)$$

Pers. 8 menyatakan jawab umum pers. 4. Suku pertama ruas kanan menyatakan jawab pribadi, yaitu jawab sistem tanpa gangguan dan z (0) adalah vektor keadaan awal sistem.

Dengan menggunakan matriks fundamental ϕ (t) yang didefinisikan sebagai

$$\phi(t) = e^{-At} \qquad (9)$$

pers. 8 dapat ditulis sebagai

$$z(t) = \phi(t)\, z(0) + \int_{0}^{t} \phi(t-\tau)\, B\, u(\tau)\, d\tau \qquad (10)$$

Jika sistem getaran mendapat gangguan acak, maka jawabnya akan berupa fungsi acak pula. Gangguan acak tidak dapat dinyatakan dengan fungsi tertentu, tetapi harus dinyatakan dengan suatu proses acak. Besaran yang merupakan ciri penting dalam proses acak z(t) dengan orde n adalah vektor rataan

$$m_z(t) = E\{z(t)\} \qquad (11a)$$

dan matriks korelasi sentral n x n

$$F_z(t_1,t_2) =$$
$$= E\left\{[z(t_1)-m_x(t_1)][z(t_2)-m_x(t_2)]^T\right\} \qquad (11b)$$

di mana E adalah operator ekspektasi. Dari matriks korelasi sentral, pers. 11b, untuk $t_1 = t_2 = t$, diperoleh matriks kovariansi n x n

$$V_z(t) = F_z(t,t) \qquad (12)$$

Matriks kovariansi menyatakan variansi proses acak di sekitar nilai rataannya. Elemen diagonal $V_z(t)$ yang ke i, yaitu $V_{zii}(t)$ menyatakan variansi ke i dari proses acak skalar $z_i(t)$. Di samping itu,

$$\sigma_{zi}(t)=\sqrt{V_{zii}(t)} \quad ; \; i=1,.,n \qquad (13)$$

merupakan simpangan baku (Root Mean Square) dari proses skalar $z_i(t)$.

Dalam makalah ini, matriks kovariansi akan dihitung dari jawab domain waktu dan cara ini akan disebut dengan Metode Domain Waktu (MDW). MDW ini merupakan metode baru yang mempunyai banyak keunggulan dibandingkan dengan metode yang telah banyak digunakan orang, yaitu penghitungan matriks kovariansi melalui transformasi ke domain frekuensi. Keunggulan MDW tersebut akan ditunjukkan dalam pasal selanjutnya.

3. Gangguan Derau Putih

Sistem dasar Metode Domain Waktu adalah sistem yang mendapat gangguan derau putih seperti terlihat pada gambar 1. Sistem getaran linear yang mempunyai gangguan derau putih akan mempunyai persamaan gerak seperti pers. 4, yaitu apabila u (t) diganti oleh fungsi acak derau putih w (t),yaitu

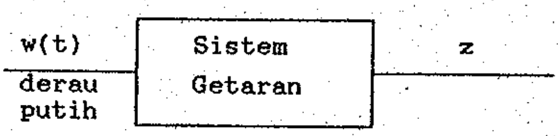
$$\dot{z}(t) = A\,z(t) + B\,w(t) \qquad (14)$$

Derau putih w (t) mempunyai sifat

$$m_w(t) = E\{w(t)\} = 0$$

$$F_v(t_1,t_2) = W_v(t)\,\delta\,(t_1 - t_2) \qquad (15)$$

di mana $W_v(t)$ adalah matriks intensitas derau putih dan $\delta(t_1-t_2)$ adalah fungsi delta dirac.



Gambar 1 Bentuk Dasar MDW

Dengan gangguan derau putih tersebut, jawab/ persamaan gerak sistem akan seperti pers. 10 dengan mengganti u (t) dengan w (t), yaitu

$$z(t) = \phi(t).z(0)+\int_0^t \phi(t-\tau)Bw(\tau)\,d\tau \qquad (16)$$

Jawab z (t) tersebut merupakan proses acak yang dapat dicirikan dengan vektor rataan $m_z(t)$ dan matriks korelasinya $F_z(t_1,t_2)$. Untuk menghitung kedua besaran tersebut dipakai dua sifat integral acak, yaitu

$$E\left\{\int_0^t m(t-\tau)\,w(\tau)\,d\tau\right\} = 0 \qquad (17)$$

dan

$$E\left\{\left[\int_{t_0}^{t_1}\phi\,(t_1-\tau_1)\,w\,(\tau_1)\,d\,\tau_1\right]\left[\int_{t_0}^{t_2}\phi(t_2-\tau_2)\,w(\tau_2)\,d\tau_2\right]^T\right\}$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_2}\phi(t_1-\tau_1)W_v\delta(\tau_1-\tau_2)\phi^T(t_1-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2$$

$$=\int_{t_0}^{\min(t_1,t_2)}\phi\,(t-\tau)\,W_v\,\phi^T(t-\tau)\,d\tau \qquad (18)$$

Dengan pers. 11, 16, 17 dan 18 nilai vektor rataan $m_z(t)$ dan matriks korelasi $F_z(t_1,t_2)$ berturut-turut menjadi

$$m_z(t) = \phi(t)\,m_o \qquad (19)$$

dan

$$F_z(t_1,t_2) = \phi(t_1)\,V_o\,\phi(t_2) + \int_{t_0}^{\min(t_1,t_2)}\phi(t_1-\tau)\,S\,\phi^T(t_2-\tau)\,d\tau$$

di mana

$$S = B\;W_v\;B^T \qquad (20)$$

Untuk $t_o = 0$ dan $t_1 = t_2 = t$, diperoleh matriks kovariansi yang simetri, yaitu

$$V_z(t) = F_z(t,t)$$

$$= \phi(t)V_o\phi^T(t) + \int_o^t \phi(t-\tau)S\phi^T(t-\tau)d\tau \qquad (21)$$

Jika persamaan matriks fundamental, pers. 9, dimasukkan ke dalam pers. 21, suku integral dalam pers. 21 menjadi

$$\int_o^t e^{A(t-\tau)}\, S\, e^{A^T(t-\tau)}\, d\tau$$

$$= e^{At}\int_o^t e^{-A\tau}\, S\, e^{-A^T\tau} d\tau \, .\, e^{A^T t} \qquad (22)$$

Untuk menghitung integral ruas kanan pers. 22 terlebih dahulu akan dicari suatu matriks V yang memenuhi

$$\int_o^t e^{-A\tau}\, S\, e^{-A^T\tau}\, d\tau$$

$$= \int_o^t \frac{d}{dt}\left(e^{-A\tau}\, V\, e^{-A^T\tau} \right) \qquad (23a)$$

$$= \int_o^t \left\{ e^{-A\tau}(-AV)e^{-A^T\tau} + e^{-A\tau}(-VA^T)e^{-A^T\tau} \right\} d\tau$$

$$= \int_o^t e^{-A\tau}(-A\,V - V\,A^T)e^{-A^T\tau}\, d\tau \qquad (23b)$$

Dari pers. 23b dapat diambil kesimpulan bahwa matriks V harus memenuhi

$$A\,V + V\,A^T + S = 0 \qquad (24)$$

Terlihat bahwa pers. 24 berbentuk persamaan Ljapunov yang dikenal dalam analisis stabilitas sistem.

Dari pers. 23a terlihat bahwa

$$\int_o^t e^{-A\tau}Se^{-A^T\tau}d\tau = e^{-A\tau}Ve^{-A^T\tau} - V \qquad (25)$$

di mana matriks V memenuhi pers. 24. Ruas kanan pers. 25 selalu ada jika sistem stabil.

Jika pers. 25 dimasukkan ke dalam pers. 22 dan kemudian dimasukkan ke dalam pers. 21 dan dengan mengingat pers. 19, maka jawab z dicirikan dengan rataan dan kovariansi berikut.

$$m_z(t) = \phi\,(t)\, m$$

$$V_z(t) = \phi(t)(V_o - V)\,\phi\,(t)^T + V \qquad (26)$$

Pada sistem yang stabil, dari pers. 26 terlihat bahwa sifat jawab sistem getaran acak stasioner menjadi

$$m_z\,(t \to \infty) = 0$$

$$V_z\,(t \to \infty) = V = \text{konstan} \qquad (27)$$

Terlihat bahwa dengan cara analisis domain waktu, jawab stasioner sistem getaran stabil dengan gangguan derau putih mempunyai rataan dan kovariansi seperti yang dinyatakan dalam pers. 27 dan matriks V memenuhi pers. 24.

Untuk menyelesaikan pers. 24, matriks V dipecah dalam submatriks sesuai dengan pemecahan matriks A pada pers. 5, yaitu

$$V = \left[\begin{array}{c|c} V_{11} & V_{12} \\ \hline V_{12}^T & V_{22} \end{array}\right] \qquad (28)$$

dan matriks S dipecah pula menjadi, lihat pers. 20 dan pers. 5,

$$S = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & M^{-1}W\,M^{-1} \end{array}\right] \qquad (29)$$

Jika pers. 5, pers. 28 dan pers. 29 dimasukkan ke dalam pers. 24 diperoleh

$$V_{12} + V_{12}^T = 0$$

$$KV_{12}M + CV_{22}M + MV_{12}^TK + MV_{22}C - W = 0 \qquad (30)$$

$$K\,V_{11} + C\,V_{12}^T - M\,V_{22} = 0$$

Pers. 30 tidak lain merupakan pula persamaan Ljapunov. Elemen matriks V dapat diperoleh dengan menyelesaikan pers. 30 secara berurutan. Dari pers. 30 terlihat bahwa matriks V_z merupakan matriks antimetri, sehingga elemen yang perlu dicari hanya n(n/2 + 1) buah saja. Dengan demikian, elemen matriks pada persamaan Ljapunov yang perlu dicari hanya tinggal $n(3n/2+1)/4$ buah saja. Karena sifat tersebut, penghitungan elemen V menjadi sangat lebih sederhana. Algoritma penyelesaian persamaan Ljapunov dapat dilihat antara lain dalam Smith [5] atau Bartels [6].

Besaran skalar keluaran yang diinginkan dapat dihitung dari jawab $z(t)$ melalui hubungan

$$b(t) = a^T z(t) \tag{31}$$

di mana a^T adalah matriks keluaran yang dapat ditentukan dari persamaan gerak sistem. Dalam hal ini besaran skalar $b(t)$ dapat dianggap ergodik, stasioner dan terdistribusi normal yang ditandai dengan nilai rataan dan nilai variansinya. Nilai rataan $b(t)$ dapat dinyatakan sebagai

$$m_b = a^T m_z = 0 \tag{32}$$

di mana m_z adalah nilai rataan jawab vektor keadaan $z(t)$ yang akan bernilai nol. Dengan menggunakan pers. 31, variansi dari $b(t)$ dapat dituliskan sebagai

$$\sigma_b^2 = E\{b.b^T\} = E\{a^T z.z^T a\}$$

$$= a^T V_z a \tag{33}$$

Setelah semua elemen matriks V diperoleh, nilai rataan dan variansi dari keluaran $b(t)$ dapat dihitung dengan pers. 32 dan 33.

Dengan MDW ini terlihat bahwa penghitungan matriks kovariansi dapat dilakukan langsung dari domain waktu, tanpa harus melalui analisis frekuensi. Metode ini menjadi lebih sederhana dan dapat menghemat waktu hitung . Dalam metode ini, yang perlu diingat adalah bahwa fungsi gangguan sistem harus berupa derau putih. Kalau fungsi gangguannya berupa derau warna, seperti pada kenyataannya, maka analisis dilakukan dengan bantuan filter bentuk yang bertugas membentuk derau warna tersebut dari derau putih.

4. Contoh Penerapan

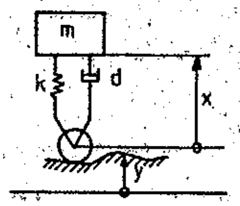
Penerapan metode MDW ini akan ditunjukkan dalam contoh analisis sistem getaran sederhana yang dapat dihitung dengan tangan supaya prosedur dapat diikuti dengan mudah. Gambar 2 menunjukkan model sistem getaran kendaraan yang mendapat gangguan acak gelombang jalan. Gangguan acak tersebut adalah bahwa percepatan gelombang jalan berupa derau putih dengan intensitas W.

Persamaan gerak sistem dapat dituliskan sebagai

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = -m\ddot{y}$$

$$\ddot{y} = w \sim (0, W)$$

dimana w adalah derau putih dengan rataan nol dan intensitas W.



Gambar 2 Model sistem getaran kendaraan

Persamaan gerak dapat dituliskan dalam vektor keadaan berikut.

$$\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}^{\cdot} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -d/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} w$$

atau

$$\dot{z} = A\,z + B\,w$$

Dari pers. 20 dan 29,

$$S = B\,W\,B^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & W \end{bmatrix} \quad ; \quad L = m^2 W$$

Dari pers.4,

$$M = m \quad , \quad K = k \quad , \quad D = d$$

Dari pers. 13 dan 28,

$$V_1 = \sigma_x^2 \quad , \quad V_2 = \sigma_{x\dot{x}} \quad , \quad V_3 = \sigma_{\dot{x}}^2$$

Kemudian dari pers 30 diperoleh

$$2\sigma_{x\dot{x}} = 0$$

$$k\sigma_x^2 + d\sigma_{x\dot{x}} - m\sigma_{\dot{x}}^2 = 0$$

$$2k\sigma_{x\dot{x}} - 2dm\sigma_{\dot{x}}^2 - m^2W = 0$$

atau

$$\sigma_x^2 = \frac{m^2W}{2dk} \quad ; \quad \sigma_{\dot{x}}^2 = \frac{mW}{2d} \quad ; \quad \sigma_{x\dot{x}} = 0$$

σ tidak lain merupakan nilai RMS dari jawab x dan dapat dihitung dengan mudah. Jawab percepatan absolut massa dapat dinyatakan sebagai

$$\dddot{x}_a = \dddot{x} + \dddot{y} = -1/m\,[\,k\,x + d\,\dot{x}\,]$$

$$= [\,-k/m \quad -d/m\,] \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = a_1^T z$$

Kovariansi dari z adalah

$$V_z = E\left\{ \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} [\,x \quad \dot{x}\,] \right\}$$

$$= E\left\{ \begin{bmatrix} xx & x\dot{x} \\ \dot{x}x^T & \dot{x}\dot{x} \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{\dot{x}}^2 \end{bmatrix}$$

Dengan pers. 33,

$$\sigma_{\dddot{x}_a} = a_1^T V_z a_1$$

$$= (k/m)^2 \sigma_x^2 + (d/m)^2 \sigma_{\dot{x}}^2$$

$$= 1/2\,W\,(k/d + d/m)$$

Jawab gaya tekan roda terhadap jalan dapat dinyatakan sebagai

$$f = -k\,x - d\,\dot{x}$$

$$= [\,-k \quad -d\,] \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$

$$= a_2^T z$$

Dengan cara yang sama seperti di atas dapat diperoleh

$$\sigma_f^2 = a_2^T V_z a_2 = m^2 \sigma_{\dddot{x}}^2$$

Nilai redaman optimum diperoleh dari

$$\frac{\partial \sigma_f^2}{\partial d} = 0$$

atau

$$d_{opt} = \sqrt{m\,k}$$

dan koefisien redaman optimumnya

$$D_{opt} = \frac{d_{opt}}{d_{krit}} = \frac{\sqrt{m\,k}}{2\sqrt{m\,k}} = 1/2$$

6. Kesimpulan

Dalam makalah ini telah ditunjukkan dasar metode domain waktu untuk analisis sistem getaran acak linear. Metode ini lebih unggul dibandingkan dengan metode domain frekuensi, karena jawab RMS yang dikehendaki dapat dihitung langsung dalam domain waktu tanpa melalui trasformasi ke domain frekuensi. Metode ini dapat dikembangkan untuk analisis sistem getaran acak dengan gangguan derau warna (colored noise).

Literatur

1. Crandal, S.H., Random Vibration in Mechanical Systems, Academic Press, New York, 1963.
2. Fabian, L., Zufallschwingungen und Ihre Behandlung, Springer Verlag, erlin, 1973.
3. Newland, D.E., Random Vibration and Spectral Analysis, Longman, New York, 1984.
4. Smith, R.A., Matrix Equation X A + B X = C, Siam J. Appl. Math., Vol. 16, No. 1, 1968.
5. Bartels, .H., Stewart, G.W., Solution of the Matrix Eq. A X + X B = C, Communication of the ACM, Vol. 15, No. 9, 1972.