ANALISIS DOMAIN WAKTU GETARAN ACAK LINEAR DENGAN GANGGUAN DERAU WARNA

BAMBANG SUTJIATMO *

Kata kunci : Getaran acak, derau putih, filter bentuk, derau warna, persamaan Ljapunov, kovariansi.

Gangguan sistem getaran kendaraan yang berasal dari ketidak-rataan jalan merupakan proses acak derau warna. Di sini akan dibahas analisis sistem dengan menggunakan metode domain waktu. Dalam Sutjiatmo [1], telah ditunjukkan analisis dasar metode domain waktu, yaitu analisis sistem getaran dengan gangguan derau putih. Tetapi, ketidakrataan jalan merupakan proses acak alami yang berupa derau warna. Karena itu, dalam makalah ini akan dibahas analisis getaran acak dengan gangguan derau warna.

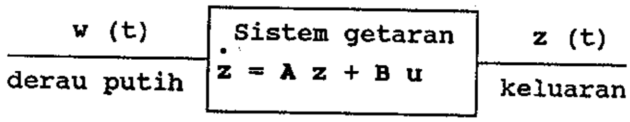
Dengan menggunakan suatu filter bentuk, derau putih dapat diubah menjadi derau warna yang sesuai dengan gangguan. Kemudian, gabungan filter bentuk dan sistem getaran kendaraan akan mendapat gangguan derau putih dan dapat dianalisis menurut bentuk dasar. Dalam analisis ini, sistem getaran kendaraan dianggap linear.

1. Pendahuluan

Dalam metode domain waktu (MDW), matriks kovariansi dihitung dari solusi fungsi waktu. Metode ini dikembangkan dari sistem getaran acak dengan gangguan derau putih (white noise). Dari solusi umum fungsi waktu dan sifat fungsi acak derau putih, matriks kovariansi dapat dihitung dari suatu persamaan linear, tanpa harus melalui penghitungan PSD solusi, Sutjiatmo [1].

Dibandingkan dengan metode domain frekuensi, metode analisis domain waktu ini lebih unggul, karena matriks kovariansi dapat dihitung dari persamaan linear, tanpa harus melalui transformasi ke domain frekuensi. MDW merupakan metode penghitungan kovariansi dari solusi fungsi waktu. Metode ini dikembangkan dari sistem getaran bergangguan derau putih. Bentuk dasar metode ini adalah sistem getaran yang mendapat gangguan derau putih seperti yang diperlihatkan pada gambar 1, di mana z adalah vektor keadaan, A dan B adalah matriks sistem.

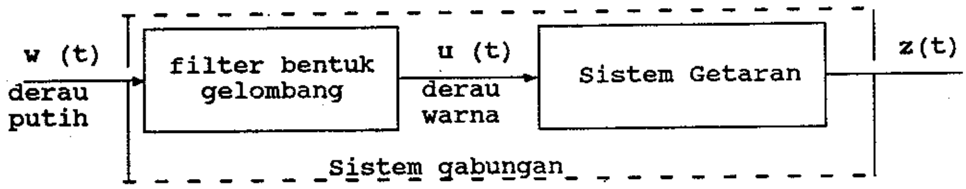
Tetapi, gangguan gelombang jalan merupakan suatu fungsi acak alami yang bukan derau putih, sehingga metode harus dikembangkan supaya dapat diterapkan



Gambar 1. Bentuk Dasar MDW

pada sistem getaran dengan gangguan derau warna. Metode domain waktu untuk sistem getaran dengan gangguan derau warna dilakukan dengan pertolongan suatu filter bentuk yang ditentukan sedemikian rupa sehingga dapat dipakai untuk mengubah derau putih menjadi derau warna yang dikehendaki, yaitu yang sesuai dengan fungsi acak gangguan kendaraan. Gambar 2. menunjukkan diagram blok sistem getaran dengan gangguan derau warna. Bersama dengan filter bentuk, terlihat bahwa sistem gabungan membentuk sistem dasar MDW, yaitu bahwa sistem gabungan mendapat gangguan derau putih.

* Lektor Kepala Madya
Jurusan Teknik Mesin ITB



Gambar 2. Sistem dengan gangguan derau warna

2. MDW untuk Gangguan Derau Warna

Pada kenyataannya, gangguan yang nyata seringkali bukan berupa derau putih, tetapi berupa derau warna. Seperti yang diterangkan dalam Sutjiatmo [1], bentuk dasar MDW adalah sistem dengan gangguan derau putih. Karena itu, untuk mempelajari sistem getaran dengan gangguan dengan derau warna, diperlukan suatu filter bentuk yang dapat menghasilkan derau warna tersebut dari derau putih. Dengan cara tersebut, sistem getaran dan filter bentuk bersama-sama membentuk suatu sistem persamaan diferensial dengan masukan derau warna, seperti yang terlihat dalam gambar 2, yang selanjutnya sifat keluarannya dapat dihitung dengan analisis domain waktu. Persamaan sistem getaran linear yang diganggu dengan derau warna dapat dituliskan sebagai, Sutjiatmo [1],

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(t) \qquad (1)$$

di mana **A** dan **B** adalah matriks sistem.

Besaran vektor keluaran yang dikehendaki dapat dituliskan sebagai

$$p_b\,(t) = a_b^T\,z\,(t) \qquad (2)$$

di mana a_b^T merupakan matriks keluaran. Besaran $p_b(t)$ tersebut misalnya adalah solusi percepatan dari salah satu koordinat $y_i(t)$ atau solusi gaya tekan roda pada jalan. Matriks keluaran a_b^T dapat ditentukan dari persamaan gerak sistem. Seperti yang telah dikemukakan dalam Sutjiatmo [1], keluaran persamaan 1 akan berupa proses acak Gauss yang dapat dicirikan dengan vektor rataan $m_z(t)$ dan matriks kovariansi $V_z(t)$.

Supaya sistem menjadi sistem bentuk dasar MDW, yaitu sistem dengan gangguan derau putih , diusahakan agar derau warna u(t) dapat diperoleh dari derau putih w(t). Untuk itu, direncanakan suatu filter bentuk gelombang yang mempunyai bentuk,

$$\begin{aligned} u(t) &= R_g \cdot g(t) \\ \dot{g}(t) &= P_g\; g(t) + Q_g\; w(t) \end{aligned} \qquad (3)$$

di mana R_g, P_g, Q_g adalah matriks filter bentuk gelombang dan w(t) adalah derau putih yang berdistribusi normal dengan rataan

$$m_w(t) = 0 \qquad (4)$$

dan matriks korelasi

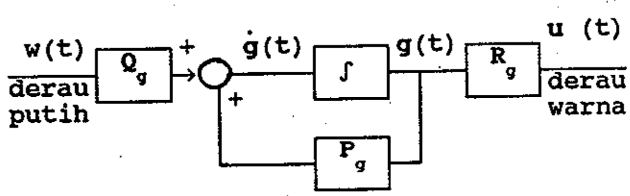
$$\begin{aligned} F_w(t,\tau) &= E\,\{\, w(t)\; w^T(t) \,\} \\ &= W_w\; \delta(t-\tau) \end{aligned} \qquad (5)$$

di mana

$$W_w = W_w^T \geq 0$$

merupakan intensitas derau putih.

Diagram blok filter bentuk persamaan 3 diperlihatkan dalam gambar 3.



Gambar 3. Filter bentuk gelombang jalan

Dari persamaan 1 dan 3 dapat disusun persamaan gabungan .

$$\begin{bmatrix} z \\ g \end{bmatrix}^{\cdot} = \begin{bmatrix} A & B\,R_g \\ 0 & P_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ Q_g \end{bmatrix} w \qquad (6a)$$

atau

$$\dot{x} = A_x x + B_x w \qquad (6b)$$

Terlihat bahwa persamaan 6b mempunyai bentuk seperti persamaan 1, yaitu bentuk dasar sistem untuk penerapan MDW. Dengan demikian, solusi persamaan 6b akan berbentuk seperti, Sutjiatmo [1],

$$x(t) = \phi(t)\ x(0) + \int_0^t \phi\ (t-\tau)\ B\ w\ (\tau)\ d\tau \qquad (7)$$

Solusi $x(t)$ akan berupa proses acak Gauss dengan rataan

$$m_x = 0 \qquad (8)$$

sehingga $x(t)$ dapat dicirikan secara lengkap dengan kovariansinya.

Matriks kovariansi dari $x(t)$ dapat dituliskan sebagai

$$V_x(t) = E\ \{\ x\ (t)\ x^T(t)\ \} = V_x^T(t) \qquad (9)$$

Turunan V_x (t) terhadap t menjadi

$$\dot{V}_x(t) = E\left\{\dot{x}(t)\ x^T(t) + x(t)\ \dot{x}^T(t)\right\} \qquad (10)$$

Jika persamaan 6b dimasukkan ke dalam persamaan 10 diperoleh

$$\dot{V}_x(t) = E\Big\{A_x(t)x(t)x^T(t) + x(t)x^T(t)A_x^T(t) + B_x(t)\ w(t)\ x^T(t) + x(t)\ w^T(t)\ B_x^T(t)\Big\}$$

atau dengan persamaan 9

$$\dot{V}_x(t) = A_x V_x(t) + V_x(t)A^T + S(t) \qquad (11)$$

di mana

$$S(t) = E\Big\{B_x(t)w(t)x^T(t) + x(t)w^T(t)B_x^T(t)\Big\} \qquad (12)$$

Dengan menggunakan persamaan 7 dan berdasarkan kenyataan bahwa vektor keadaan awal tidak berkorelasi dengan derau putih, yaitu

$$E\ \{\ w(t)\ x^T(0)\ \} = 0$$

persamaan 12 dapat dituliskan sebagai

$$S(t) = B_x(t) \int_0^t E\{w(t)w^T(t)B_x^T(\tau)\phi^T(t-\tau)d\tau + \int_0^t \phi(t-\tau)B^T(\tau)E\{w(t)w^T(t)\}B_x^T(t)\ d\tau \qquad (13)$$

Dengan sifat fungsi delta dirac, persamaan 13 menjadi

$$S\ (t) = B_x(t)\ W_w(t)\ B_x^T\ (t) \qquad (14)$$

Persamaan 11 berlaku pula untuk sistem getaran linear varian waktu, yaitu sistem getaran dengan matriks $A_x(t)$ dan $B_x(t)$ yang berupa fungsi waktu. Untuk sistem getaran linear invarian waktu berlaku

$$\begin{aligned} A_x(t) &= A_x = \text{konstan} \\ B_x(t) &= B_x = \text{konstan} \\ S\ (t) &= S = \text{konstan} \end{aligned} \qquad (15)$$

Pada sistem getaran stabil, dalam keadaan stasioner, t ∞, berlaku

$$\begin{aligned} V_x(\ t \to \infty\ ) &= V_x = \text{konstan} \\ \dot{V}_x(\ t \to \infty\ ) &= 0 \end{aligned} \qquad (16)$$

Dengan memasukkan persamaan 14 ke dalam persamaan 11, untuk sistem getaran linear invarian waktu dalam keadaan stasioner, yaitu persamaan 16, kovariansi solusi x harus memenuhi persamaan Ljapunov

$$A_x V_x + V_x A_x^T + S = 0 \qquad (17)$$

dan vektor rataannya

$$m_x = 0 \qquad (18)$$

Untuk menyelesaikan persamaan 17, matriks V_x dipecah dalam submatriks, sesuai dengan pemecahan matriks A_x dan B_x, menjadi

$$V_x = \begin{bmatrix} V_z & V_{zg} \\ V_{zg}^T & V_{gg} \end{bmatrix} \qquad (19)$$

Matriks S dihitung dengan memasukkan matriks B_x yang diambil dari persamaan 6 ke dalam persamaan 14 yang menghasilkan

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q\,W_w\,Q^T \end{bmatrix} \qquad (20)$$

Dengan memasukkan matriks A_x dari persamaan 6 ke dalam persamaan 17 serta dengan menggunakan persamaan 19 dan persamaan 20 diperoleh hubungan

$$P_g V_g + V_g P_g^T + Q_g W_w Q_g^T = 0 \qquad (21a)$$

$$A\,V_{zg} + V_{zg} P^T + B\,R_g\,V_g = 0 \qquad (21b)$$

$$A\,V_z + V_z A^T + V_{zg}^T B\,R_g + V_{zg} R_g^T B^T = 0 \qquad (21c)$$

Persamaan 21 tidak lain merupakan pula persamaan Ljapunov yang tidak terkopel dan dapat diselesaikan secara berurutan. Untuk sistem getaran orde rendah, persamaan tersebut dapat diselesaikan dengan tangan. Tetapi, untuk sistem getaran dengan orde tinggi, penyelesaian persamaan tersebut memerlukan algoritma komputasi. Untuk itu tersedia banyak metode, misalnya Bartels [3]. Dengan menyelesaikan persamaan 21 dapat diperoleh V_g, V_{zg} dan V_z, sehingga dapat diperoleh matriks kovariansi V_x.

Dari matriks V_z yang telah dihitung, simpangan baku dari koordinat $z_i(t)$, yaitu σ_{zi}, dapat dihitung dengan

$$\sigma_{zi} = \sqrt{V_{zii}} \qquad (22)$$

Nilai simpangan baku tersebut tidak lain merupakan nilai RMS (root mean square) dari solusi z_i (t). Selanjutnya, RMS besaran keluaran yang diinginkan dapat dihitung dengan

$$\sigma_{pb} = \sqrt{a_b^T\,V_z\,a_b} \qquad (23)$$

3. Kesimpulan

Dengan bantuan filter bentuk, gangguan derau warna dapat dihasilkan dari derau putih. Persamaan sistem getaran dan filter bentuk dapat digabung menjadi persamaan diferensial yang mempunyai gangguan derau putih. Selanjutnya, deviasi standar atau RMS respons sistem dapat dihitung dengan matriks kovariansi solusi getaran.

P u s t a k a

1. Sutjiatmo, Dasar Metode Domain Waktu untuk Analisis Sisten Getaran Acak Linear, *Majalah Mesin Vol. VI, No. 3 dan 4,* 1988
2. Chen, C.T., *Introduction to Linear System Theory,* Hold Rinehart and Winston Inc., New York, 1970
3. Bartels, R.H., Stewart, G.W., Solution of the Matrix Equation AX + XB = C, *Communication of the ACM, Vol. 15, No. 19,* 1972.