

ANALISIS DINAMIKA STRUKTUR PADA SISTEM FLEKSIBEL DI ANTARIKSA

Harijono Djojodihardjo dan Setyamartana Parman
Institut Teknologi Bandung

Abstrak

Wahana antariksa atau satelit di antariksa merupakan suatu sistem yang fleksibel. Di sini dilakukan analisis ulang pada suatu sistem fleksibel di antariksa, yang selain dipengaruhi oleh medan gravitasi bumi dan gaya orbital, juga dipengaruhi oleh gaya elastik. Sebagai kelanjutan dari analisis yang dilakukan oleh peneliti sebelumnya, dalam analisis ini adanya pengaruh rotasi struktur pada sumbu sendiri terhadap vektor percepatan dalam koordinat lokal yang bertitik pusat di titik pusat massa benda tidak diabaikan.

Selanjutnya dalam analisis ini ditinjau interaksi antara gerak satelit dengan getaran elastik yang dialaminya, dengan meninjau stabilitasnya. Persamaan yang diperoleh kemudian dilinearkan dengan menganggap bahwa deformasi pada tiap titik generik jauh lebih kecil dari jari-jari. Persamaan inilah yang selanjutnya dianalisis. Ada dua persamaan yang dihasilkan, yaitu persamaan gerak rotasional struktur, dan persamaan modus generik dari dinamika struktur. Kemudian sistem dimodelkan sebagai suatu batang fleksibel yang merupakan penyederhanaan dari struktur satelit dengan panel surya yang secara geometrik cukup dominan terhadap badan satelit. Pertama-tama ditinjau gerak dalam bidang orbital, dengan menganggap panel surya memiliki sifat struktural yang seragam sepanjang sumbu panjangnya. Selanjutnya ditinjau gerak tiga dimensi secara umum. Simulasi numerik dilakukan untuk mempelajari kondisi ketidakstabilan sebagai fungsi frekuensi modus struktural dan kecepatan orbital. Hasil yang diperoleh dibandingkan dengan hasil serupa dalam pustaka.

1. PENDAHULUAN

Wahana antariksa atau satelit di antariksa adalah sistem fleksibel, yang selain dipengaruhi oleh medan gravitasi bumi, gaya orbital, gaya elastik, dan gangguan dinamik, baik yang berasal dari dalam maupun dari luar. Gangguan dapat berupa gaya pengendalian, pengaturan distribusi massa, tumbukan mikrometeorid, tekanan radiasi elektromagnetik dan partikel, torsi magnetik. Ditinjau dari gerak dan getaran struktur wahana antariksa yang dianalisis dengan mengabaikan rotasinya, pengaruh rotasi dapat dipandang pula sebagai gangguan. Gangguan-gangguan ini menghasilkan respons wahana yang bergantung pada konfigurasi, ukuran, kefleksibelan, dan pengaturan operasi.

Dalam makalah ini dikembangkan persamaan gerak struktur fleksibel di orbit. Struktur yang ditinjau dimodelkan sebagai benda kontinum (continuum). Persamaan-persamaan diferensial parsial yang terdapat dalam makalah ini diturunkan melalui peninjauan interaksi antara deformasi elastik wahana dan potensial gravitasi. Tinjauan khusus dilakukan pada batang silinder seragam yang panjang dalam orbit lingkaran yang dalam

hal ini merupakan penyederhanaan dari struktur satelit yang memiliki panel surya yang secara geometrik cukup dominan terhadap badan satelit, dan pada sistem wahana antariksa yang besar dan kompleks, struktur serupa batang merupakan elemen pembentuk utama.

Persamaan-persamaan gerak yang diturunkan terutama mengikuti analisis Bainum, [1].

Persamaan gerak dalam makalah ini diperoleh melalui integrasi Galerkin persamaan gerak titik generik (generic point) benda. Gerakan titik generik dilukiskan sebagai superposisi antara gerakan benda kaku dan kombinasi modus-modus struktural.

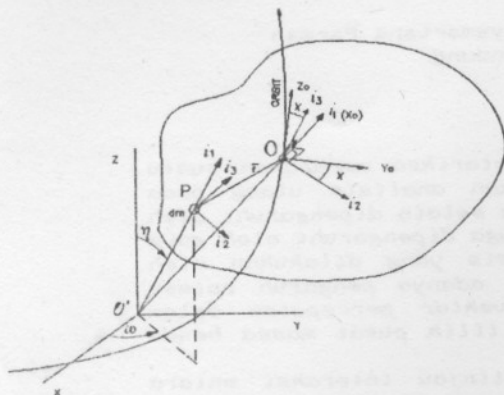
2. KERANGKA KOORDINAT

Sistem koordinat yang akan dipakai secara konsisten dalam mengembangkan persamaan gerak dalam makalah ini diuraikan hubungannya dengan memperhatikan Gambar 1.

Pada Gambar 1 terlihatlah bahwa kita kenal lima kerangka koordinat, yaitu:

- 1) Kerangka rujukan inersial [τ_0 : $O'XYZ$], dengan definisi sebagai berikut: $O'Z$ - sepanjang sumbu rotasi bumi,

- O'X - sepanjang garis yang menghubungkan pusat bumi dengan *ascending node*¹, dan
 O'Y - sepanjang garis yang tegak lurus O'X dan O'Z, sesuai aturan tangan kanan.



Gambar 1 : Kerangka koordinat

Keterangan gambar:

- O' - pusat bumi
 O - pusat massa benda
 P - sebarang titik yang ditinjau dalam benda

2) Kerangka intrinsik lokal pada titik yang ditinjau P [τ_{1P} : Pi_1, Pi_2, Pi_3], dengan definisi sebagai berikut:

- Pi_1 - sepanjang vektor jari-jari dari O' ke P,
 Pi_2 - sepanjang garis yang tegak lurus terhadap Pi_1 dalam bidang ZO'P, dan
 Pi_3 - sepanjang garis yang tegak lurus terhadap Pi_1 dan Pi_2 , sesuai aturan tangan kanan.

3) Kerangka intrinsik lokal pada O [τ_{1O} : Oi_1, Oi_2, Oi_3], dengan definisi analog dengan kerangka intrinsik lokal pada titik P.

4) Kerangka tetap orbit² [τ_2 : OX_0, YO_0, ZO_0], dengan definisi sebagai berikut:

- OX_0 - sepanjang garis vertikal lokal,
 OY_0 - sepanjang garis normal bidang orbit dan dalam arah negatif dari vektor momentum sudut orbit, dan
 OZ_0 - sepanjang garis yang tegak lurus terhadap OX_0 dan OY_0 , sesuai aturan tangan kanan.

¹ *Ascending node* adalah titik pertemuan lintasan naik orbit dengan bidang katulistiwa bumi.

² Kerangka tetap orbit yang dipakai di sini berbeda dengan kerangka yang lazim dipergunakan, di mana pada kerangka yang lazim dipergunakan mengambil OZ_0 sepanjang vertikal lokal menuju O'; OX_0 menyinggung lintasan orbit bila orbit lingkaran; dan OY_0 sesuai dengan aturan tangan kanan. Kerangka tetap orbit yang dipakai di sini mengikuti Bainum, Peter M. [Ref. 1].

aturan tangan kanan.

5) Sumbu-sumbu utama benda³ [τ_3 : OXZ].

Adapun hubungan antar kerangka rujukan di atas adalah berikut:

1. Transformasi dari τ_0 ke τ_1 , dinyatakan dengan persamaan

$$\begin{Bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{Bmatrix}_{\tau_{1P}} = T_1 \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}_{\tau_0} \quad (1)$$

di mana

$$T_1 = \begin{bmatrix} s\eta c\omega & s\eta s\omega & c\eta \\ c\eta c\omega & c\eta s\omega & -s\eta \\ -s\omega & c\omega & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

disini, simbol-simbol s dan c menyatakan fungsi sinus dan cosinus.

2. Transformasi dari kerangka intrinsik [τ_1] ke kerangka tetap orbit [τ_2], dinyatakan dengan persamaan

$$\begin{Bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{Bmatrix}_{\tau_2} = T_2 \begin{Bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{Bmatrix}_{\tau_{1O}} \quad (3)$$

di mana

$$T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\chi & s\chi \\ 0 & -s\chi & c\chi \end{bmatrix} \quad (4)$$

3. Transformasi dari kerangka tetap orbit [τ_2] ke sumbu-sumbu utama benda [τ_3], dinyatakan dengan persamaan

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}_{\tau_3} = T_3 \begin{Bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{Bmatrix}_{\tau_2} \quad (2.5)$$

di mana

$$T_3 = \begin{bmatrix} c\phi c\theta & s\phi c\psi + c\phi s\theta s\psi & s\phi s\psi - c\phi s\theta c\psi \\ -s\phi c\theta & c\phi c\psi - s\phi s\theta s\psi & c\phi s\psi + s\phi s\theta c\psi \\ s\theta & -c\theta s\psi & c\theta c\psi \end{bmatrix} \quad (6)$$

³ Sumbu-sumbu utama benda yang dipergunakan di sini berbeda dengan yang lazim dipergunakan. Sumbu-sumbu utama benda yang lazim dipergunakan berdasarkan pada OY_0 sebagai sumbu gerak tukik (*pitch*, angguk), OZ_0 sebagai sumbu gerak toleh (*yaw*, geleng), dan OX_0 sebagai sumbu gerak guling (*roll*). Sumbu-sumbu utama benda yang dipergunakan di sini mengikuti Bainum, Peter M. [Ref. 1].

Komponen-komponen kecepatan sudut benda ($\omega_x, \omega_y, \omega_z$) dan laju perubahan sudut Euler (ϕ, θ, ψ) dihubungkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\psi} \cos\theta \cos\phi + \dot{\theta} \sin\phi - \omega_c (s\phi\psi + c\phi s\theta s\psi) \\ \omega_y &= -\dot{\psi} \cos\theta \sin\phi + \dot{\theta} \cos\phi - \omega_c (c\phi\psi - s\phi s\theta s\psi) \\ \omega_z &= \dot{\psi} \sin\theta + \dot{\phi} + \omega_c c\theta s\psi\end{aligned}\quad (7)$$

di mana ω_c adalah kecepatan sudut orbital.

3. PERSAMAAN GERAK

Struktur yang mengorbit di antariksa mengalami berbagai macam gerakan. Sebagai suatu benda kaku, struktur mengalami gerak rotasi; sedangkan sebagai benda fleksibel, struktur mengalami perpindahan elastik titik-titik modulusnya.

Dengan menganggap bahwa $|\bar{r}|/\rho \ll 1$, di mana $\bar{r}$ adalah vektor posisi sebarang titik di dalam benda terhadap titik O dan ρ adalah jarak titik yang sama dari titik O', potensial gravitasi dalam bentuk umum ditulis sebagai :

$$V(\rho, \omega, \eta) = \frac{\nu a^2}{\rho} + \nu a \sum_{s=1}^{\infty} K_s \left(\frac{a}{\rho}\right)^{s+1} \Omega_s(\eta, \omega) \quad (8)$$

di mana,

$$K_s = K_{s0} \cos \phi_{s0} \quad (9)$$

$$\Omega_s(\eta, \omega) = \sum_{m=0}^s \left[\frac{P_s^{(m)}(\eta) \cos(m\omega + \phi_{sm})}{K_s} \right] \quad (10)$$

$P_s^{(m)}(\eta)$ adalah fungsi Legendre orde s yang ke- m

K_{s0} dan ϕ_{s0} adalah konstanta yang ditentukan secara percobaan melalui teknik-teknik satelit geodetik

ν - konstanta gravitasi (9.79 m/s^2 bagi bumi)

a - jari-jari ekuator bumi

Gaya gravitasi per satuan massa pada sumbu pusat benda, O, dalam kerangka τ_{10} adalah

$$\bar{F}_0 = -\nabla V|_0 \quad (11)$$

Untuk titik pada jarak $\bar{r}$ dari O, dengan mengabaikan besaran-besaran kecil orde dari $|\bar{r}|/\rho$, gaya gravitasi dalam sumbu utama benda, τ_3 , diberikan oleh

$$\bar{f} = \bar{f}_0 + M\bar{r} \quad (12)$$

dengan,

$\bar{f}_0$ - gaya gravitasi pada titik O dinyatakan dalam sumbu-sumbu utama benda (τ_3)

$$M = [M^{(0)} + \sum_{s=1}^{\infty} K_s \left(\frac{a}{\rho}\right)^s M^{(s)}] \quad (13)$$

$$M^{(0)} = \frac{\nu a^2}{\rho^3} \begin{bmatrix} 3c^2\phi^2\theta - 1 & -3s\phi c\phi^2\theta & 3c\phi s\theta c\theta \\ -3s\phi c\phi^2\theta & 3s^2\phi^2\theta - 1 & -3s\phi s\theta c\theta \\ 3c\phi s\theta c\theta & -3s\phi s\theta c\theta & 3s^2\theta - 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$M^{(s)} = \frac{\nu a^2}{\rho^3} T_1 T_2 B^{(s)} T_2^T T_1^T \quad (15)$$

Matriks $B^{(s)}$ dapat diturunkan, yaitu

$$\begin{bmatrix} (s+1)(s+2)\Omega_s & -(s+2)\Omega_s' & -(s+2)\frac{\hat{\Omega}}{s\eta} \\ -(s+2)\Omega_s' & [\Omega_s'' - (s+1)\Omega_s] & (\frac{\hat{\Omega}}{s\eta})' \\ -(s+2)\frac{\hat{\Omega}}{s\eta} & (\frac{\hat{\Omega}}{s\eta})' & \Omega_s' \cot\eta + \left(\frac{m^2}{s^2\eta} + s+1\right)\Omega_s \end{bmatrix} \quad (16)$$

Kemudian diambil anggapan bahwa benda mengalami perpindahan dengan amplitudo kecil q yang ditransformasikan menjadi gaya elastik oleh operator linear L.



Gambar 2 : Konfigurasi benda terdeformasi dan tak terdeformasi

Keterangan gambar :

- O - pusat massa benda
- $\bar{r}_0$ - vektor posisi titik P sebelum deformasi
- $\bar{r}$ - vektor posisi titik P sesudah deformasi
- q - perpindahan elastik

Berdasarkan hukum Newton II, persamaan gerak elemen massa dm yang vektor posisi sesaatnya $\bar{r}$ dari titik pusat massa benda (perhatikan Gambar 2) adalah:

$$\bar{a} \, dm = L(\bar{q}) + \bar{f} \, dm + \bar{E} \quad (17)$$

dengan

- $\bar{a}$ - percepatan inersial yang dialami elemen massa dm
- $L(\bar{q})$ - gaya elastik yang bekerja pada elemen massa dm

- $\vec{f}$ - gaya gravitasi per satuan massa
 $\vec{E}$ - gaya-gaya lain yang bekerja pada elemen massa dm

Vektor persamaan di atas dapat dituliskan dalam kerangka sumbu utama benda [τ_3] sebagai berikut :

$$\left\{ \ddot{\vec{a}}_{cm} + \ddot{\vec{r}} + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \right\} dm = LC(\vec{q}) + \vec{f} dm + \vec{E} \quad (18)$$

dengan

$\ddot{\vec{a}}_{cm}$ - percepatan pusat massa, atau berarti juga percepatan sumbu utama benda τ_3 terhadap kerangka inersial,

$\ddot{\vec{r}}$ - percepatan elemen massa dm dalam τ_3 ,

$2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}$ - percepatan Coriolis sehubungan gerak elemen massa dm dalam x, y , dan z ,

$\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$ - percepatan elemen massa dm akibat perubahan $\vec{\omega}$, dan

$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ percepatan sentrifugal sehubungan dengan sudut antara $\vec{\omega}$ dan $\vec{r}$.

Vektor posisi sesaat elemen massa dm dituliskan sebagai

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{q} \quad (19)$$

di mana

$\vec{r}_0$ - vektor posisi elemen massa dm terhadap O dalam keadaan tak terdeformasi, dan

$\vec{q}$ - perpindahan elastik elemen massa dm .

Kemudian turunan pertama dan kedua dari vektor posisi elemen massa dm terhadap waktu dituliskan sebagai

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{q}} + \vec{\Omega}_0 \times (\vec{r}_0 + \vec{q}), \quad \text{dan} \quad (20)$$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{q}} + \dot{\vec{\Omega}}_0 \times (\vec{r}_0 + \vec{q}) + \vec{\Omega}_0 \times \dot{\vec{q}} + \vec{\Omega}_0 \times \left\{ \vec{\Omega}_0 \times (\vec{r}_0 + \vec{q}) \right\} \quad (21)$$

di mana $\vec{\Omega}_0(t)$ adalah kecepatan sudut rotasi yang dilakukan kerangka sumbu utama benda τ_3 .

Untuk perpindahan elastik dengan amplituda kecil, $\vec{q}$ dapat dinyatakan sebagai superposisi kontribusi modus menurut persamaan

$$\vec{q} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \vec{\xi}^{(n)}(\vec{r}_0) \quad (22)$$

di mana

$A_n(t)$ - amplituda modus

$$\vec{\xi}^{(n)}(\vec{r}_0) = \xi_x^{(n)} \vec{i} + \xi_y^{(n)} \vec{j} + \xi_z^{(n)} \vec{k} \quad (23)$$

$\vec{\xi}^{(n)}(\vec{r}_0)$ adalah bentuk modus (*mode shape*) sehubungan dengan frekuensi pribadi ω_n dan menyatakan kondisi ortogonal sebagai berikut :

$$\int_{vol} \vec{\xi}^{(m)} \cdot \vec{\xi}^{(n)} dm = \delta_{mn} M_n \quad (24)$$

dan

$$LC(\vec{q}^{(n)}) = -\omega_n^2 \vec{q}^{(n)} dm \quad (25)$$

Selanjutnya, bila benda tak berkendala (*unconstrained*), modus-modus elastik haruslah ortogonal terhadap modus-modus benda kaku, yaitu

$$\int_{vol} \vec{\xi}^{(n)} dm = 0 \quad (26)$$

$$\int_{vol} \vec{r}_0 \times \vec{\xi}^{(n)} dm = 0 \quad (27)$$

Bila benda berkendala terhadap translasi dan rotasi pusat massa benda tak terdeformasi, modus yang berhubungan dengannya disebut modus tetap (*fixed modes*). Untuk modus-modus tetap kondisi ortogonal, persamaan (24) dan (25), tidak berlaku. Juga dalam hal ini kerangka benda asal O menjadi tidak tepat dengan pusat massa benda dalam keadaan tak terdeformasi. Bila bagi modus-modus bebas

$$\int_{vol} \vec{r} dm = 0,$$

tetapi untuk modus-modus tetap

$$\int_{vol} \vec{r} dm = \int_{vol} \vec{q} dm \neq 0$$

3.1 Persamaan Gerak Rotasi

Persamaan gerak rotasi benda diturunkan dari operasi $\int_{vol} \vec{r} \times \text{pers.}(18)$, yaitu

$$\int_{vol} \vec{r} \times \left\{ \ddot{\vec{a}}_{cm} + \ddot{\vec{r}} + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \right\} dm = \int_{vol} \vec{r} \times \left(\frac{LC(\vec{q})}{dm} + \vec{f} + \vec{e} \right) dm \quad (28)$$

di mana $\vec{e}$ adalah gaya luar per satuan massa.

Dengan anggapan $|\vec{q}| \ll |\vec{r}|$, dan hanya suku-suku orde pertama $\vec{q}$ yang disisakan dalam mengembangkan persamaan, dan dengan mendefinisikan

$$\int_{vol} \vec{q} dm \times \left(\ddot{\vec{a}}_{cm} - \ddot{\vec{r}}_0 \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 A_n \int_{vol} \vec{r}_0 \times \vec{\xi}^{(n)} dm \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \vec{D}^{(n)} \quad (29)$$

diperoleh:

$$\int_{vol} \vec{r}_0 \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_0 \right) dm - \int_{vol} \left(\vec{r}_0 \cdot \vec{\omega} \right) \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_0 \right) dm + \int_{vol} \vec{r}_0 \times \left(\dot{\vec{\Omega}}_0 \times \vec{r}_0 \right) dm + \int_{vol} \vec{r}_0 \times \left\{ \dot{\vec{\Omega}}_0 \right.$$

$$\times \left\{ \bar{\rho}_0 \times \bar{r}_0 \right\} \} dm + 2 \int_{vol} \bar{r}_0 \times \left\{ \bar{\omega} \times \left(\bar{\rho}_0 \times \bar{r}_0 \right) \right\} dm \\ \equiv \bar{R} \quad (30)$$

$$\int_{vol} \left\{ \bar{r}_0 \times \ddot{\bar{q}} + \bar{r}_0 \times \left(\bar{\rho}_0 \times \ddot{\bar{q}} \right) + \bar{r}_0 \times \left(\bar{\rho}_0 \times \dot{\bar{q}} \right) + \right. \\ \left. \bar{r}_0 \times \left(\bar{\rho}_0 \times \left(\bar{\rho}_0 \times \ddot{\bar{q}} \right) \right) + \ddot{\bar{q}} \times \left(\bar{\rho}_0 \times \bar{r}_0 \right) + \ddot{\bar{q}} \times \left(\bar{\rho}_0 \times \left(\bar{\rho}_0 \times \bar{r}_0 \right) \right) + 2\bar{r}_0 \times \left(\bar{\omega} \times \dot{\bar{q}} \right) + 2\bar{r}_0 \times \left(\bar{\omega} \times \left(\bar{\rho}_0 \times \ddot{\bar{q}} \right) \right) + 2\ddot{\bar{q}} \times \right. \\ \left. \left\{ \bar{\omega} \times \left(\bar{\rho}_0 \times \bar{r}_0 \right) \right\} + \bar{r}_0 \times \left(\bar{\omega} \times \ddot{\bar{q}} \right) + \ddot{\bar{q}} \times \left\{ \bar{\omega} \times \left(\bar{\rho}_0 \times \bar{r}_0 \right) \right\} - \left[\bar{r}_0 \cdot \bar{\omega} \right] \left(\bar{\omega} \times \ddot{\bar{q}} \right) - \left[\ddot{\bar{q}} \cdot \bar{\omega} \right] \left(\bar{\omega} \times \bar{r}_0 \right) \right\} dm \\ \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}^{(n)} \quad (31)$$

$$\int_{vol} \bar{r}_0 \times M \bar{r}_0 dm \equiv \bar{G}_R \quad (32)$$

$$\int_{vol} \left(\bar{r}_0 \times M \ddot{\bar{q}} + \ddot{\bar{q}} \times M \bar{r}_0 \right) dm \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \bar{G}^{(n)} \quad (33)$$

maka diperoleh persamaan gerak rotasi:

$$\bar{R} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}^{(n)} + \bar{C} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{D}^{(n)} = \bar{G}_R + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{G}^{(n)} \quad (34)$$

Berbagai suku dalam Pers.(34) di atas dapat dikenali sebagai berikut:

- $\bar{Q}^{(n)}$, mencerminkan torsi inersia sehubungan dengan deformasi elastik,
- $\bar{G}_R$, berhubungan dengan torsi gravitasional pada benda kaku,
- $\bar{G}^{(n)}$, berhubungan dengan torsi gravitasional akibat deformasi elastik, dan
- $\bar{D}^{(n)}$, memperhitungkan perbedaan posisi antara pusat massa sesungguhnya dan pusat massa benda tak terdeformasi. Untuk kasus modulus bebas, $\bar{D}^{(n)} = 0$.

3.2 Persamaan Modus Generik

Persamaan modus generik dihasilkan dengan melakukan operasi

$$\int_{vol} \bar{\xi}^{(n)} \cdot [\text{pers.}(18)] ,$$

yang menghasilkan

$$\int_{vol} \bar{\xi}^{(n)} \cdot \left[\ddot{\bar{a}}_{cm} + \ddot{\bar{r}} + 2\bar{\omega} \times \dot{\bar{r}} + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \left(\bar{\omega} \times \bar{r} \right) \right] dm = \int_{vol} \bar{\xi}^{(n)} \cdot \left[\frac{L(\ddot{\bar{q}})}{dm} + \ddot{\bar{r}} + \ddot{\bar{e}} \right] dm \quad (35)$$

Dengan definisi

$$D_n' = \int_{vol} \bar{\xi}^{(n)} dm \cdot \left(\ddot{\bar{a}}_{cm} - \ddot{\bar{r}}_0 \right) \quad (36)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \varphi_{mn} = \int_{vol} \bar{\xi}^{(n)} \cdot \left(\bar{\rho}_0 \times \ddot{\bar{q}} \right) dm + \int_{vol} \bar{\xi}^{(n)} \cdot \left(\bar{\rho}_0 \times \dot{\bar{q}} \right) dm + \int_{vol} \bar{\xi}^{(n)} \cdot \left\{ \bar{\rho}_0 \times \left(\bar{\rho}_0 \times \ddot{\bar{q}} \right) \right\} dm + \\ 2 \int_{vol} \bar{\xi}^{(n)} \cdot \left(\bar{\omega} \times \dot{\bar{q}} \right) dm + 2 \int_{vol} \bar{\xi}^{(n)} \cdot \left\{ \bar{\omega} \times \left(\bar{\rho}_0 \times \ddot{\bar{q}} \right) \right\} dm + \int_{vol} \bar{\xi}^{(n)} \cdot \left\{ \bar{\omega} \times \left(\bar{\omega} \times \ddot{\bar{q}} \right) \right\} dm + \\ \int_{vol} \bar{\xi}^{(n)} \cdot \left(\bar{\omega} \times \ddot{\bar{q}} \right) dm \quad (37)$$

$$\varphi_n = \int_{vol} \bar{\xi}^{(n)} \cdot \left(\bar{\rho}_0 \times \bar{r}_0 \right) dm + \int_{vol} \bar{\xi}^{(n)} \cdot \left\{ \bar{\rho}_0 \times \left(\bar{\rho}_0 \times \bar{r}_0 \right) \right\} dm + 2 \int_{vol} \bar{\xi}^{(n)} \cdot \left\{ \bar{\omega} \times \left(\bar{\rho}_0 \times \bar{r}_0 \right) \right\} dm + \\ \int_{vol} \bar{\xi}^{(n)} \cdot \left(\bar{\omega} \times \bar{r}_0 \right) dm + \int_{vol} \bar{\xi}^{(n)} \cdot \left\{ \bar{\omega} \times \left(\bar{\omega} \times \bar{r}_0 \right) \right\} dm \quad (38)$$

$$g_n = \int_{vol} \bar{\xi}^{(n)} \cdot M \bar{r}_0 dm \quad (39)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} g_{mn} = \int_{vol} \bar{\xi}^{(n)} \cdot M \ddot{\bar{q}} dm \quad (40)$$

pers.(35) dapat dituliskan dalam bentuk

$$\ddot{A}_n + \omega_n^2 A_n + \frac{\varphi_n}{M_n} + \frac{1}{M_n} \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_{mn} = \frac{1}{M_n} \left\{ g_n + \sum_{m=1}^{\infty} g_{mn} + E_n - D_n' \right\} \quad (41)$$

di mana

- suku φ_n , berhubungan dengan suku gaya pada benda kaku;
- suku φ_{mn} , adalah suku gaya hubungan gerak elastik dalam modus ke-m;
- suku g_n , menyatakan gaya gravitasi yang bekerja pada modus ke-n gerakan benda kaku.
- suku g_{mn} , berhubungan dengan gaya gravitasi yang bekerja pada modus ke-n akibat gerakan elastik dalam modus ke-m;
- E_n , adalah komponen gaya luar yang bekerja pada modus ke-n; dan
- D_n' , adalah suku yang berhubungan dengan gerak perpindahan pusat massa dari titik O.

4. PENINJAUAN KASUS

Dalam bab ini akan digunakan persamaan-persamaan gerak yang disajikan pada Bab 3 dengan meninjau batang silinder panjang yang seragam dalam orbit lingkaran. Sub-bab 4.1 meninjau gerakan dua dimensi batang hanya dalam bidang orbit, sedang sub-bab 4.2

meninjau gerakan tiga dimensi batang. Batasan yang digunakan dalam meninjau gerak batang di orbit ini adalah bahwa kerangka sumbu-sumbu utama batang r_s tidak melakukan rotasi, jadi

$$\ddot{\Omega}_0(t) = \dot{\Omega}_0(t) = 0$$

Asumsi bahwa medan gravitasi sferik simetrik dan orbit yang ditinjau berbentuk lingkaran menghasilkan penyederhanaan

$$\frac{v_a^2}{g} = \omega_c^2$$

dan

$$M_{ij}^{(s)} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

4.1 Gerakan Dua Dimensi Batang Silinder Panjang yang Seragam dalam Orbit Lingkaran

Karena gerakan batang dianggap hanya dalam bidang orbit, maka sudut toleh (yaw, geleng) dan guling (roll) tidak ada, artinya

$$\begin{aligned} \psi(t) &= 0, \text{ dan} & (a) \\ \phi(t) &= 0 & (b) \end{aligned} \quad (42)$$

juga, tidak terjadi deformasi elastik keluar bidang orbit, atau

$$\ddot{\xi}_y^{(n)} = 0 \quad (c)$$

Untuk struktur-struktur bebas, dan titik pusat massa benda tak berpindah,

$$\begin{aligned} \ddot{D}^{(n)} &= 0 & (a) \\ D_n' &= 0 & (b) \end{aligned} \quad (43)$$

$$H_{\alpha\beta}^{(n)} = H_{\beta\alpha}^{(n)} \quad (c)$$

di mana

$$\begin{aligned} H_{\alpha\beta}^{(n)} &\equiv \int_{vol} \xi_{\alpha} \ddot{\xi}_{\beta}^{(n)} dm \\ &= \int_{vol} \mu \xi_{\alpha} \ddot{\xi}_{\beta}^{(n)} d\xi_x d\xi_y d\xi_z \end{aligned}$$

($\alpha, \beta = x, y, z$) dengan μ adalah kerapatan material batang; dan (ξ_x, ξ_y, ξ_z) adalah koordinat-koordinat elemen massa dm dalam keadaan tidak berdeformasi dinyatakan dalam kerangka benda.

Dengan tidak adanya deformasi keluar bidang orbit, atau $\ddot{\xi}_y^{(n)} = 0$, maka dapat dituliskan

$$H_{y\alpha}^{(n)} = H_{\alpha y}^{(n)} = 0 \quad (\alpha = x, y, z) \quad (44)$$

Yang perlu dicatat adalah bahwa batang (Gambar 3) dengan penampang melintang seragam,

$$\iint \xi_x d\xi_y d\xi_z = \iint \xi_y d\xi_x d\xi_z = 0 \quad (45)$$

Lebih jauh lagi dapat kita deduksi bahwa

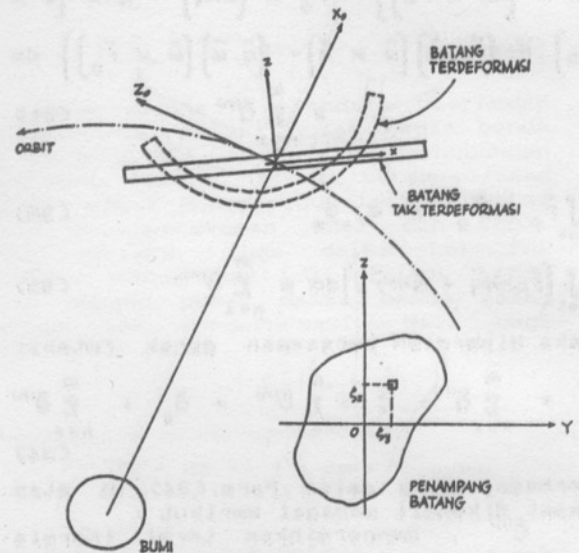
$$H_{xx}^{(n)} = H_{xz}^{(n)} = H_{zz}^{(n)} = 0 \quad (46)$$

Dengan definisi

$$L_{\alpha\beta}^{(mn)} \equiv \int_{vol} \xi_{\alpha}^{(m)} \ddot{\xi}_{\beta}^{(n)} dm \quad (\alpha, \beta = x, y, z)$$

dan dengan tidak adanya deformasi elastik keluar bidang orbit, atau $\ddot{\xi}_y^{(n)} = 0$, dapat diperlihatkan dengan mudah bahwa

$$L_{xy}^{(mn)} = L_{yx}^{(mn)} = 0 \quad (\alpha = x, y, z) \quad (47)$$



Gambar 3 : Batang di orbit dengan penampang tak beraturan

Dengan menggunakan hasil-hasil di atas, persamaan tukur (pitch, angguk) dan persamaan modulus generik untuk kasus gerakan dalam bidang orbit dari batang silinder panjang yang seragam disajikan sebagai berikut :

Persamaan tukur,

$$J_y \ddot{\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} Q_y^{(n)} + C_y = G_y + \sum_{n=1}^{\infty} G_y^{(n)} \quad (48)$$

di mana,

$$\ddot{\theta}_y = \ddot{\theta}$$

$$Q_y^{(n)} = 2 \left\{ A_n \left[\ddot{\theta} - \omega_c \right] + A_n \ddot{\theta} \right\} H_{xx}^{(n)}$$

$$G_y = 3\omega_c^2 \left[J_x - J_z \right] s\theta c\theta \approx -3\omega_c^2 J_z s\theta c\theta$$

(untuk $J_x \ll J_z$)

$$G_y^{(n)} = -3\omega_c^2 H_{xx}^{(n)} s\theta c\theta$$

dengan pengertian

C_y - resultan torsi gangguan luar yang bekerja pada benda dalam sumbu y

J_α - Momen inersia dasar benda dalam keadaan tak terdeformasi terhadap sumbu α , ($\alpha = x, y, z$)

$$J_\alpha = \int_{\text{vol}} (\beta^2 + \gamma^2) dm$$

($\alpha, \beta, \text{ dan } \gamma = x, y, z$; serta $\alpha \neq \beta \neq \gamma$)

$Q_y^{(n)}$ - torsi inersia akibat deformasi elastik modulus ke-n dalam komponen y

G_{xy} - torsi gravitasional pada benda kaku dalam komponen y

$G_y^{(n)}$ - torsi gravitasional akibat deformasi elastik modulus ke-n dalam komponen y

Persamaan modulus generik,

$$\ddot{A}_n + \omega_n^2 \dot{A}_n + \frac{p_n}{M_n} + \frac{1}{M_n} \sum_{m=1}^{\infty} p_{mn} = \frac{1}{M_n} \left(g_n + \sum_{m=1}^{\infty} g_{mn} + E_n \right) \quad (40)$$

di mana

$$p_n = -(\dot{\theta} - \omega_c)^2 H_{xx}^{(n)} \quad (a)$$

$$p_{mn} = \left[2\dot{A}_m (\dot{\theta} - \omega_c) + A_m \dot{\theta} \right] L_{xz}^{(mn)} - L_{zx}^{(mn)} - A_m (\dot{\theta} - \omega_c)^2 \left(L_{xx}^{(mn)} + L_{zz}^{(mn)} \right) \quad (b)$$

$$g_n = \omega_c^2 H_{xx}^{(n)} \left(3c^2 \theta - 1 \right) \quad (c)$$

$$g_{mn} = \omega_c^2 A_m \left[\left(3c^2 \theta - 1 \right) L_{xx}^{(mn)} + 3s\theta c \left(L_{xz}^{(mn)} + L_{zx}^{(mn)} \right) + \left(3s^2 \theta - 1 \right) L_{zz}^{(mn)} \right] \quad (d)$$

dengan arti fisik

ω_n - frekuensi pribadi batang dalam modulus ke-n

M_n - massa rampat dalam modulus ke-n

Berikut ini akan dibahas beberapa kasus batang silinder panjang yang berotasi dan berdeformasi hanya dalam bidang orbit.

4.1.1 Kasus tanpa getaran memanjang, atau $\dot{z}^{(n)} = 0$

Dalam kasus ini berarti

$$H_{xx}^{(n)} = L_{xz}^{(mn)} = L_{zx}^{(mn)} = L_{xx}^{(nn)} = 0 \quad (50)$$

Dengan pemilihan $\dot{z}_z^{(n)}$ untuk menanamkan modulus karakteristik dari getaran-getaran lentur batang yang kedua ujungnya bebas, diperoleh,

$$L_{zz}^{(mn)} = \delta_{mn} M_n \quad (51)$$

di mana, δ_{mn} adalah kronecker delta.

Dengan memasukkan hasil-hasil di atas ke persamaan (48), dan karena batang

berbentuk silinder homogen memanjang dalam arah sumbu x, atau $J_z = J_y$, sehingga persamaan gerak tukik dan modulus generik batang silinder panjang yang seragam, bergerak dua dimensi dalam orbit lingkaran tanpa getaran memanjang dengan medan gravitasi simetrik sferik menjadi

$$\ddot{\theta} + \frac{3}{2} \omega_c^2 \sin 2\theta + \frac{C}{J} y = 0 \quad (52)$$

$$\ddot{A}_n + \left\{ \omega_n^2 - (\dot{\theta} - \omega_c)^2 - \omega_c^2 (3s^2 \theta - 1) \right\} A_n = \frac{E_n}{M_n} \quad (53)$$

Persamaan (52) hanya menyatakan persamaan tukik benda kaku tanpa ada gerakan elastik. Bila tidak ada gangguan luar dan osilasi-osilasi tukik benda kaku kecil, $\theta \ll 1$, solusi dapat dinyatakan sebagai

$$\theta = C \sin \left[\sqrt{3} \omega_c t + \gamma \right] \quad (54)$$

dan penggunaan variabel-variabel tak berdimensi

$$\tau = \frac{1}{2} \left(\omega_c t \sqrt{3} + \gamma \right) \quad \text{dan}$$

$$Z_n = A_n / l$$

menghasilkan persamaan modulus generik dalam bentuk tak berdimensi sebagai

$$\frac{d^2 Z_n}{d\tau^2} + \frac{4}{3} \left[\left(\frac{\omega_n}{\omega_c} \right)^2 - \frac{3C^2}{2} \right] + 2\sqrt{3} C \cos 2\tau - \frac{3C^2}{2} \cos 4\tau \Big] Z_n = 0 \quad (55)$$

Persamaan (55) adalah persamaan 3 suku Hill atau persamaan Whittaker. Untuk amplituda tukik kecil, atau $C \ll 1$, persamaan di atas dapat didekati lebih lanjut dengan persamaan Mathiew,

$$\frac{d^2 Z_n}{d\tau^2} + (\delta + \epsilon \cos 2\tau) Z_n = 0 \quad (56)$$

di mana

$$\delta = \frac{4}{3} \left\{ \left(\frac{\omega_n}{\omega_c} \right)^2 - \frac{3}{2} C^2 \right\}, \quad \text{dan}$$

$$\epsilon = \frac{8\sqrt{3}}{3} C = 4.62 C$$

Bila $(\omega_n/\omega_c)^2 \gg 1$, atau daerah frekuensi tinggi, modulus elastik dapat dinyatakan dengan persamaan sederhana,

$$\frac{d^2 Z_n}{d\tau^2} + \frac{4}{3} \left(\frac{\omega_n}{\omega_c} \right)^2 Z_n \cong 0$$

Hal ini berarti, dapat disimpulkan bahwa batang dengan $(\omega_n/\omega_c)^2 \gg 1$ ($n = 1, 2, \dots, \infty$), gerak elastik dan gerak tukik

benda kaku saling berdekopel (*decoupled*) sepenuhnya. Sedang bila $(\omega_n/\omega_c)^2 \cong 0(1)$, (batang sangat fleksibel) maka persamaan (55) harus digunakan untuk mempelajari gerak elastik, dan paduan gerak elastik dengan gerak benda kaku. Solusi numerik dari persamaan (55) untuk beberapa harga (ω_n/ω_c) diadakan pada Bab 5.

4.1.2 Kasus tanpa getaran lentur, atau $\ddot{\xi}_z^{(n)} = 0$

Pada sub-bab ini perhatian akan dikhususkan pada persamaan (48) dan (49) dengan membatasi bahwa batang tanpa lentur atau getaran lentur, namun mengijinkan kemungkinan getaran memanjang. Dengan asumsi di atas dan asumsi bahwa orbit lingkaran dalam medan gravitasi simetrik sferik, penyederhanaan tersebut menghasilkan,

$$L_{zz}^{(mn)} = L_{xz}^{(mn)} = L_{zx}^{(mn)} = 0 \quad (57)$$

Sedang pemilihan $\ddot{\xi}_x^{(n)}$ untuk menampilkan modus karakteristik dari getaran-getaran memanjang batang yang kedua ujungnya bebas, diperoleh,

$$L_{xx}^{(mn)} = \delta_{mn} M_n \quad (58)$$

Substitusi hasil-hasil ini ke persamaan (54), (tidak ada gangguan luar, $C_y = 0$)

$$J_y \ddot{\omega}_y + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \left\{ \dot{A}_n \left[\dot{\theta} - \omega_c \right] + A_n \ddot{\theta} \right\} H_{xx}^{(n)} + \left\{ J_y + \sum_{n=1}^{\infty} 2 H_{xx}^{(n)} \right\} \frac{3}{2} \omega_c^2 s 2\theta = 0 \quad (59)$$

dan substitusi ke persamaan (49), menghasilkan

$$\ddot{A}_n + \omega_n^2 A_n - \left\{ \left[\dot{\theta} - \omega_c \right]^2 + \omega_c^2 \left[3c^2 \theta - 1 \right] \right\} \left[\frac{H_{xx}^{(n)}}{M_n} + A_n \right] = \frac{E_n}{M_n} \quad (60)$$

Persamaan (59) dan (60) konsisten dengan persamaan (A.8) dan (A.9) Ashley dalam Ref.[2], yang diturunkan dari pendekatan energi.

Bila $\theta(t) = \text{konstan}$, atau secara fisik batang diberi gaya untuk mempertahankan orientasinya terhadap vertikal lokal, dapat diperlihatkan bahwa persamaan (60) mereduksi pengisolasi harmonik dengan frekuensi fisik $\{\omega_n^2 - \omega_c^2 + \omega_c^2(1 - 3c^2\theta)\}^{1/2}$. Suku ketiga dalam pernyataan frekuensi ini berhubungan dengan efek gradien gravitasi. Sumbangan gradien gravitasi terhadap perubahan frekuensi berubah tanda ketika $c^2\theta = \frac{1}{3}$.

4.2 Gerakan Tiga Dimensi Batang Silinder Panjang yang Seragam dalam Orbit Lingkaran

Pada bagian ini diperlihatkan

persamaan gerak tiga dimensi batang dalam orbit lingkaran. Seperti telah dikemukakan di depan, batang yang ditinjau berbentuk silinder panjang yang seragam. Beberapa hasil yang diperoleh dari sub-bab 5.1 yang dipergunakan di sini adalah

$$\bar{D}^{(n)} = 0 \quad (a)$$

$$D_n' = 0 \quad (b) \quad (61)$$

$$H_{\alpha\beta}^{(n)} = H_{\beta\alpha}^{(n)} \quad (c)$$

kemudian

$$H_{y\alpha}^{(n)} = H_{\alpha y}^{(n)} = H_{z\alpha}^{(n)} = H_{\alpha z}^{(n)} = 0 \quad (62)$$

($\alpha = x, y, z$)

Juga, $J_y = J_z$ dan $J_y - J_x \cong J_y$ untuk batang panjang berpenampang lingkaran dan seragam.

Asumsi medan gravitasi sferik simetrik menghasilkan

$$M_{ij}^{(e)} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

Persamaan tukik, diturunkan dari persamaan (34) dengan hanya memperhatikan gerak tukik; adalah

$$J_y \dot{\omega}_y - J_y \omega_z \omega_x + \sum_{n=1}^{\infty} Q_y^{(n)} + C_y \cong G_{R_y} + \sum_{n=1}^{\infty} G_y^{(n)} \quad (63)$$

di mana ω_x , ω_y , dan ω_z dinyatakan oleh persamaan (4), yang dengan memasukkan persyaratan tukik (tanpa geleng, $\psi = \psi = 0$) didapat

$$\omega_x = \left[\dot{\theta} - \omega_c \right] s\phi \quad (a)$$

$$\omega_y = \left[\dot{\theta} - \omega_c \right] c\phi \quad (b)$$

$$\omega_z = \dot{\phi} \quad (c)$$

dan

$$Q_y^{(n)} = 2 \left\{ \dot{A}_n \omega_y + A_n \left[\dot{\omega}_y - \omega_z \omega_x \right] \right\} H_{xx}^{(n)} \quad (d)$$

$$G_{R_y} \cong -3\omega_c^2 J_z c\phi c\theta s\theta \\ = -3\omega_c^2 J_z c\phi c\theta s\theta \quad (e)$$

$$G_y^{(n)} = -6\omega_c^2 c\phi c\theta s\theta A_n H_{xx}^{(n)} \quad (f)$$

Persamaan guling (roll), diturunkan dari persamaan (60) dengan hanya memperhatikan gerak guling, adalah

$$J_z \dot{\omega}_z + J_z \omega_x \omega_y + \sum_{n=1}^{\infty} Q_z^{(n)} + C_z \cong G_{R_z} + \sum_{n=1}^{\infty} G_z^{(n)} \quad (64)$$

di mana

$$Q_z^{(n)} = 2 \left\{ \dot{A}_n \omega_z + A_n \left[\dot{\omega}_z + \right. \right.$$

$$\left. \begin{matrix} \omega_x \omega_y \end{matrix} \right\} H_{xx}^{(n)} \quad (a)$$

$$G_{Rz} \cong -3\omega_c^2 J_z' c\phi s\phi c^2\theta \quad (b)$$

$$G_z^{(n)} = -6\omega_c^2 A_n H_{xx}^{(n)} c\phi s\phi c^2\theta \quad (c)$$

Persamaan modulus generik diturunkan dari persamaan (41), diperoleh

$$A_n + \omega_n^2 A_n + \frac{p_n}{M_n} + \frac{1}{M_n} \sum_{m=1}^{\infty} p_{mn} = \frac{1}{M_n} \left\{ g_n + \sum_{m=1}^{\infty} g_{mn} + E_n \right\} \quad (65)$$

di mana

$$p_n = -(\omega_y^2 + \omega_z^2) H_{xx}^{(n)} \quad (a)$$

$$p_{mn} = 2A_m \left\{ (\omega_y - \omega_z) [L_{zx}^{(mn)} - L_{xz}^{(mn)}] \right. \\ \left. + A_m \left\{ [L_{zx}^{(mn)} - L_{xz}^{(mn)}] (\omega_y - \omega_z) + \omega_x (\omega_y + \omega_z) [L_{zx}^{(mn)} + L_{xz}^{(mn)}] + (2\omega_y \omega_z - 2\omega_x^2 - \omega_y^2 - \omega_z^2) L_{zz}^{(mn)} - [\omega_y^2 + \omega_z^2] L_{xx}^{(mn)} \right\} \right\} \quad (b)$$

$$g_n = \omega_c^2 (3c^2\phi c^2\theta - 1) \quad (c)$$

$$g_{mn} = \omega_c^2 A_m \left\{ (3c^2\phi c^2\theta - 1) L_{xx}^{(mn)} + [(3s^2\phi c^2\theta - 1) + 3(s^2\theta - 1) - 6s\phi s\theta c\theta] L_{zz}^{(mn)} + 3[-s\phi c\phi c^2\theta + c\phi c\theta s\theta] [L_{zx}^{(mn)} + L_{xz}^{(mn)}] \right\} \quad (d)$$

Persamaan (65) adalah persamaan umum modulus generik batang silinder panjang yang seragam bergerak tiga dimensi di orbit.

4.2.1 Kasus tanpa getaran memanjang, atau $\xi_x^{(n)} = 0$

Dalam hal ini,

$$H_{xx}^{(n)} = L_{xx}^{(mn)} = L_{xz}^{(mn)} = L_{zx}^{(mn)} = 0 \quad (66)$$

Lebih jauh lagi, bila dipilih modulus karakteristik (*eigen modes*) getaran lentur batang bebas-bebas bagi $\xi_z^{(n)}$, maka

$$L_{zz}^{(mn)} = \delta_{mn} M_n \quad (67)$$

Hasil-hasil di atas disubstitusikan ke persamaan (62), (63), dan (64), menghasilkan

persamaan tukik :

$$\omega_y - \omega_z \omega_x + 3\omega_c^2 c\phi c\theta s\theta + \frac{C}{J_y} \cong 0 \quad (68)$$

persamaan guling :

$$\omega_z + \omega_x \omega_y + 3\omega_c^2 s\phi c\phi c^2\theta + \frac{C}{J_z} \cong 0 \quad (69)$$

persamaan modulus generik :

$$A_n + \left[\omega_n^2 + 2\omega_y \omega_z - 2\omega_x^2 - \omega_y^2 - \omega_z^2 - \omega_c^2 (3s^2\phi c^2\theta - 1) - 3\omega_c^2 (s^2\theta - 1) + 6\omega_c^2 s\phi s\theta c\theta \right] A_n = \frac{E_n}{M_n} \quad (70)$$

di mana ω_x , ω_y , dan ω_z dinyatakan oleh persamaan (63) (a) sampai (c).

Dengan asumsi amplituda tukik dan guling kecil, atau $\theta \ll 1$ dan $\phi \ll 1$, dihasilkan persamaan terlinearkan bagi tukik dan guling sesudah mengabaikan suku-suku yang mengandung perkalian dan pemangkatan ϕ , ϕ , θ , dan θ .

Persamaan tukik terlinearkan,

$$\ddot{\theta} + 3\omega_c^2 \theta + \frac{C}{J_y} \cong 0 \quad (71)$$

Persamaan guling terlinearkan,

$$\ddot{\phi} + 4\omega_c^2 \phi + \frac{C}{J_z} \cong 0 \quad (72)$$

Persamaan modulus generik terlinearkan,

$$A_n + \left[\omega_n^2 + 2(\dot{\theta} - \omega_c)\dot{\phi} - (\dot{\theta} - \omega_c)^2 - \dot{\phi}^2 + 2\omega_c^2 \right] A_n = \frac{E_n}{M_n} \quad (73)$$

4.2.2 Kasus tanpa getaran lentur, atau

$$\xi_y^{(n)} = \xi_z^{(n)} = 0$$

Dalam kasus ini, asumsi tidak adanya getaran lentur menyebabkan

$$L_{zz}^{(mn)} = L_{zx}^{(mn)} = L_{xz}^{(mn)} = 0 \quad (74)$$

Karena yang ditinjau adalah getaran memanjang batang, maka $\xi_x^{(n)}$ adalah modulus karakteristiknya, sehingga dinyatakan

$$L_{xx}^{(mn)} = \delta_{mn} M_n \quad (75)$$

($m = 1, 2, \dots, \infty$)

Bagi kasus ini, persamaan tukik dan guling sama dengan persamaan (63) dan (64). Persamaan modulus generik tanpa getaran lentur batang silinder panjang yang seragam bergerak tiga dimensi dalam orbit lingkaran, persamaan (65), dengan medan gravitasi simetrik sferik dan tanpa getaran lentur menjadi sebagai berikut :

$$A_n + \omega_n^2 A_n + \frac{p_n}{M_n} + \frac{1}{M_n} \sum_{m=1}^{\infty} p_{mn} = \frac{1}{M_n} \left\{ g_n + \sum_{m=1}^{\infty} g_{mn} + E_n \right\} \quad (76)$$

di mana

$$\phi_n = - (\omega_y^2 + \omega_z^2) H_{xx}^{(mn)} \quad (a)$$

$$\phi_{mn} = -A_m (\omega_y^2 + \omega_z^2) \delta_{mn} M_n \quad (b)$$

$$g_n = \omega_c^2 (3c^2 \phi_c^2 \theta - 1) H_{xx}^{(n)} \quad (c)$$

$$g_{mn} = \omega_c^2 A_m (3c^2 \phi_c^2 \theta - 1) \delta_{mn} M_n \quad (d)$$

5. PEMECAHAN DAN HASIL NUMERIK

Dalam bab ini, persamaan modulus generik dalam bentuk tak berdimensi, persamaan (55),

$$\frac{d^2 Z_n}{d\tau^2} + \frac{4}{3} \left[\left(\frac{\omega_n}{\omega_c} \right)^2 - \frac{3C^2}{2} \right] + 2C\sqrt{3} \cos 2\tau - \frac{3}{2} C^2 \cos 4\tau \Big] Z_n = 0$$

dicari solusinya secara numerik. Dalam memecahkan persamaan diferensial tersebut digunakan metoda Runge-Kutta orde-4. Penyelesaian persamaan dilakukan dengan memisalkan

$$\frac{dZ_n}{d\tau} = y_n$$

sehingga

$$\frac{dy_n}{d\tau} = \frac{d^2 Z_n}{d\tau^2}$$

dan persamaan (55) ditulis dalam bentuk

$$\frac{dy_n}{d\tau} = -f(\tau) Z_n$$

di mana

$$f(\tau) = \frac{4}{3} \left[\left(\frac{\omega_n}{\omega_c} \right)^2 - \frac{3C^2}{2} \right] + 2C\sqrt{3} \cos 2\tau - \frac{3}{2} C^2 \cos 4\tau$$

Kondisi awal dipakai

$$Z_n(0) = 0.00005 \text{ dan}$$

$$y_n(0) = \frac{dZ_n(0)}{d\tau} = 0$$

untuk membandingkan pengaruh $(\omega_n/\omega_c)^2$ dan amplituda tukik C terhadap kestabilan batang pada enam buah kasus yang data-datanya ditabelkan dalam Tabel 1. Kasus 6 sesuai dengan batang yang frekuensi pribadi dasarnya 1/100 cps dan bergerak dalam orbit lingkaran pada ketinggian 250 n.miles.

Hasil-hasil numerik kemudian ditampilkan dalam bentuk plot grafik Z_n terhadap τ dan bidang fasa $dZ_n/d\tau$ terhadap Z_n .

Dari gambar plot hasil simulasi numerik, terlihat bahwa untuk kasus 1, 2, dan 3, yakni kasus-kasus dengan frekuensi pribadi struktur yang sama $(\omega_n/\omega_c^2 = 1)$ tetapi amplituda tukik struktur C berbeda, respons amplituda

Tabel 1. : Kasus yang diperbandingkan untuk simulasi numerik Pers.(60)

Kasus	$(\omega_n/\omega_c)^2$	C	$Z_n(0)$	$\frac{dZ_n(0)}{d\tau}$	$d\tau$
1	1	0.2	0.00005	0	0.1
2	1	0.1	0.00005	0	0.1
3	1	0.05	0.00005	0	0.1
4	2	0.2	0.00005	0	0.1
5	4	0.2	0.00005	0	0.1
6	3200	0.2	0.00005	0	0.01

modus semakin membesar. Dengan perkataan lain, ketiga kasus tersebut menghasilkan respons dinamik struktur tidak stabil. Kasus 1 lebih tidak stabil dari kasus 2, dan kasus 2 lebih tidak stabil dari kasus 3. Jadi semakin besar amplituda tukik struktur, semakin tidak stabil pula respons dinamik struktur sebagai benda fleksibel.

Untuk kasus 1, 4, dan 5, yakni kasus-kasus dengan amplituda tukik struktur sama (C = 0.2) tetapi frekuensi pribadi struktur berbeda, respons amplituda modus struktur membesar untuk kasus 1, sedang kasus 4 dan 5 relatif tidak teredam. Jadi semakin kecil frekuensi pribadi struktur, semakin tidak stabil pula respons dinamiknya sebagai benda fleksibel.

Sedang kasus 6, yang bersesuaian dengan batang di orbit lingkaran pada ketinggian 250 n.miles dengan frekuensi pribadi 1/100 cps, dengan amplituda tukik C = 0.2 respons dinamik struktur teredam dengan perlahan.

6. KESIMPULAN DAN SARAN

Di dalam makalah ini, telah dilakukan analisis ulang pada dinamika wahana antariksa sebagai benda fleksibel, mengikuti analisis yang dilakukan oleh Ashley^[2], dan Bainum et al^{[1],[4]}, khususnya untuk memahami interaksi antara gerak wahana sebagai benda kokoh (dinamika benda kokoh) dan getaran wahana sebagai benda fleksibel. Interaksi ini menyebabkan timbulnya masalah stabilitas dinamik. Sebagai kelanjutan karya Bainum^[1], dalam makalah ini telah dimasukkan gerak rotasi benda, yang secara umum tidak dapat diabaikan. Berdasarkan analisis ini, diperoleh rumusan tentang pengaruh rotasi pada persamaan gerak yang mengatur dinamika wahana sebagai benda fleksibel di dalam orbitnya. Dengan dimasukkannya rotasi benda maka dibandingkan dengan Ref.[1], persamaan (30) makalah ini berbeda dengan persamaan (28) Ref. [1] dengan adanya tambahan suku

$$\int_{vol} \bar{r}_0 \times \left(\bar{\Omega}_0 \times \bar{r}_0 \right) dm + \int_{vol} \bar{r}_0 \times \left\{ \bar{\Omega}_0 \times \left(\bar{\Omega}_0 \times \bar{r}_0 \right) \right\} dm + 2 \int_{vol} \bar{r}_0 \times \left\{ \bar{\omega} \times \left(\bar{\Omega}_0 \times \bar{r}_0 \right) \right\} dm$$

untuk $\bar{R}$, dan persamaan (31) berbeda dari persamaan (28) Ref.[1] dengan munculnya suku

$$\int_{vol} \left[\bar{r}_0 \times (\dot{\bar{r}}_0 \times \bar{q}) + \bar{r}_0 \times (\dot{\bar{r}}_0 \times \dot{\bar{q}}) + \bar{r}_0 \times \left\{ \dot{\bar{r}}_0 \times (\dot{\bar{r}}_0 \times \bar{q}) \right\} + \bar{q} \times (\dot{\bar{r}}_0 \times \bar{r}_0) + \bar{q} \times \left\{ \dot{\bar{r}}_0 \times (\dot{\bar{r}}_0 \times \bar{r}_0) \right\} + 2\bar{r}_0 \times \left\{ \dot{\bar{q}} \times (\dot{\bar{r}}_0 \times \bar{q}) \right\} + 2\bar{q} \times \left\{ \dot{\bar{q}} \times (\dot{\bar{r}}_0 \times \bar{r}_0) \right\} \right] dm$$

untuk $\sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}^{(n)}$,

torsi inersia akibat deformasi elastik, dalam gerak tukik ; sedang dalam persamaan modus generik persamaan (37) berbeda dari persamaan (44) Ref.[1] dengan adanya suku tambahan

$$\int_{vol} \bar{Q}^{(n)} \cdot (\dot{\bar{r}}_0 \times \bar{q}) dm + \int_{vol} \bar{Q}^{(n)} \cdot (\dot{\bar{r}}_0 \times \dot{\bar{q}}) dm + \int_{vol} \bar{Q}^{(n)} \cdot \left\{ \dot{\bar{r}}_0 \times (\dot{\bar{r}}_0 \times \bar{q}) \right\} dm + 2 \int_{vol} \bar{Q}^{(n)} \cdot \left\{ \dot{\bar{q}} \times (\dot{\bar{r}}_0 \times \bar{q}) \right\} dm$$

untuk gaya sehubungan gerak elastik batang

$$\sum_{m=1}^{\infty} \varphi_{mn}$$

dan persamaan (38) berbeda dengan persamaan (43) Ref.[1] dengan munculnya suku

$$\int_{vol} \bar{Q}^{(n)} \cdot (\dot{\bar{r}}_0 \times \bar{r}_0) dm + \int_{vol} \bar{Q}^{(n)} \cdot \left\{ \dot{\bar{r}}_0 \times (\dot{\bar{r}}_0 \times \bar{r}_0) \right\} dm + 2 \int_{vol} \bar{Q}^{(n)} \cdot \left\{ \dot{\bar{q}} \times (\dot{\bar{r}}_0 \times \bar{r}_0) \right\} dm$$

untuk gaya pada benda sebagai benda kaku φ_n .

Penjabaran persamaan gerak tukik dan modus generik untuk keperluan simulasi numerik dalam makalah ini dilakukan dengan meninjau kasus batang silinder panjang yang seragam dengan mengabaikan rotasi batang, seperti halnya yang dilakukan Bainum^[1].

Dari hasil simulasi numerik yang kemudian ditampilkan dalam bentuk gambar terlihat bahwa

- untuk kasus 1, 2, dan 3; dengan harga-harga $(\omega_n/\omega_c)^2$ yang sama terlihat bahwa semakin besar amplituda tukik, respons modus generik batang semakin membesar, dan

- untuk kasus 1, 4, dan 5; dengan harga-harga amplituda tukik yang sama terlihat bahwa semakin kecil $(\omega_n/\omega_c)^2$, respons modus generik batang semakin membesar.

Dengan demikian dalam kasus gerakan bidang batang silinder panjang yang seragam karena osilasi kecil tukik dan getaran lentur, gerakan tukik terdekopel

sepenuhnya dari gerakan elastik, serta dari Bab 5 terlihat bahwa gerak elastik dinyatakan dengan persamaan suku-3 Hill. Untuk harga-harga $(\omega_n/\omega_c)^2$ besar gerakan elastik terdekopel dari gerakan tukik, sedang untuk harga-harga $(\omega_n/\omega_c)^2$ rendah hasil numerik menunjukkan kecenderungan tidak stabil.

Terdekopelnya gerak tukik dan elastik makin besar bila amplituda osilasi tukik makin kecil.

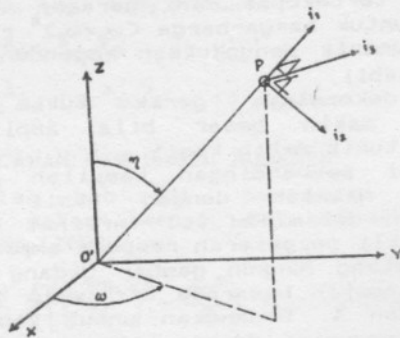
Dari perbandingan tampilan hasil numerik makalah dengan hasil yang diperoleh dalam Ref.[1] terlihat bahwa ada sedikit pergeseran respons amplituda modus batang maupun gambar bidang fasa dengan semakin besarnya t/τ untuk kasus 1, 3, dan 4. Sedangkan untuk kasus 6 yang bersesuaian dengan batang di orbit pada ketinggian 250 n.mi dengan $(\omega_n/\omega_c)^2 = 3200$ dan amplituda tukik $C = 0.2$, hasil numerik amat berbeda dengan hasil Ref.[1]. Respons amplituda modus batang yang dihasilkan dalam makalah ini menunjukkan bahwa batang seolah-olah mengalami *Coulomb damping*, sedang pada hasil Ref.[1] tidak menunjukkan hal tersebut. Peninjauan masalah ini, apakah hanya akibat beda ketelitian serta bahasa program yang digunakan -Ref.[1] menggunakan bahasa FORTRAN-ataukah karena perbedaan alur program dan metoda yang dipakai untuk memecahkan persamaan diferensial, akan dilakukan sebagai kelanjutan makalah ini.

Penggunaan persamaan gerak untuk meninjau dinamika batang silinder seragam di orbit yang dilakukan dalam makalah ini mengabaikan rotasi benda pada sumbunya sendiri. Namun anggapan demikian belum tentu berlaku dalam hal sebenarnya. Sebagai contoh, satelit buatan yang diorbitkan dirancang untuk selalu mempertahankan orientasi tertentu, misalkan panel surya selalu menghadap matahari. Dengan demikian dalam menjalani orbitnya, benda dapat melakukan rotasi pada sumbunya sendiri. Masalah ini akan ditinjau lebih lanjut pada karya selanjutnya, sebagai pengembangan tinjauan dinamika benda fleksibel pada orbitnya di antariksa, dengan memperhitungkan dan menganalisis berbagai kasus yang menyangkut rotasi benda pada sumbunya sendiri.

7. APENDIKS

Berikut ini akan diturunkan hubungan antara kerangka-kerangka rujukan yang digunakan. Hal ini dapat dilakukan dengan memperhatikan gambar-gambar berikut:

1. Transformasi dari τ_0 ke τ_1



Gambar 4 : Kerangka intrinsik dan inersial

Dari gambar terlihat bahwa

$$i_1 = X \cos \omega \sin \eta + Y \sin \omega \sin \eta + Z \cos \eta$$

$$i_2 = X \cos \omega \cos \eta + Y \sin \omega \cos \eta - Z \sin \eta$$

$$i_3 = -X \sin \omega + Y \cos \omega$$

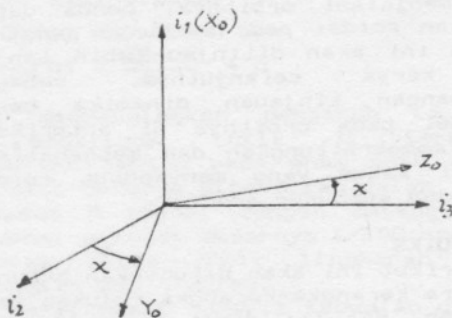
Atau dituliskan dalam bentuk matriks

$$\begin{Bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{Bmatrix}_{\tau_{1P}} = T_1 \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}_{\tau_0} \quad (A-1)$$

di mana

$$T_1 = \begin{bmatrix} \sin \omega \cos \eta & \sin \omega \sin \eta & \cos \eta \\ \cos \omega \cos \eta & \cos \omega \sin \eta & -\sin \eta \\ -\sin \omega & \cos \omega & 0 \end{bmatrix} \quad (A-2)$$

2. Transformasi dari kerangka intrinsik [τ_1] ke kerangka tetap orbit [τ_2]



Gambar 5 : Kerangka intrinsik dan kerangka tetap orbit

Dengan melihat Gambar 5 didapat hubungan-hubungan sebagai berikut:

$$X_0 = i_1$$

$$Y_0 = i_2 \cos \chi + i_3 \sin \chi$$

$$Z_0 = -i_2 \sin \chi + i_3 \cos \chi$$

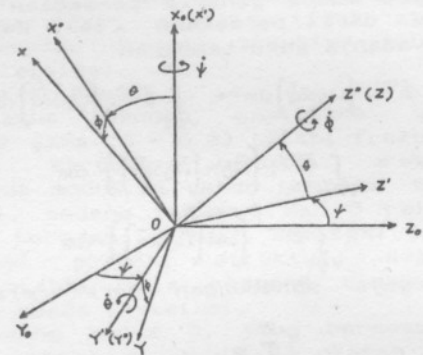
Atau secara matriks dapat dituliskan

$$\begin{Bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{Bmatrix}_{\tau_2} = T_2 \begin{Bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{Bmatrix}_{\tau_{10}} \quad (A-3)$$

di mana

$$T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \chi & \sin \chi \\ 0 & -\sin \chi & \cos \chi \end{bmatrix} \quad (A-4)$$

3. Transformasi dari kerangka tetap orbit [τ_2] ke sumbu-sumbu utama benda [τ_3]



Gambar 6 : Putaran-putaran sudut Euler

Dalam hal ini perubahan kedudukan dari kerangka orbit ke sumbu-sumbu utama benda dapat ditelusur dengan urutan-urutan sebagai berikut:

- dengan sumbu putar X_0 , kerangka orbit [$\tau_2 : OX_0Y_0Z_0$] dipindah ke $OX'Y'Z'$ oleh putaran sudut toleh ψ , di mana X_0 berimpit dengan X' ,
- kemudian dengan sumbu putar Y' kerangka $OX'Y'Z'$ dipindah ke kerangka $OX''Y''Z''$ oleh putaran sudut tukik θ , di mana Y' berimpit dengan Y'' , dan akhirnya
- dengan sumbu putar Z'' kerangka $OX''Y''Z''$ dipindah ke sumbu-sumbu utama benda [$\tau_3 : OXYZ$] oleh putaran sudut guling ϕ , di mana Z'' berimpit dengan Z .

Dengan melihat Gambar 6 dapat dituliskan hubungan-hubungan sebagai berikut:

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}_{\tau_3} = T_3^* \begin{Bmatrix} X'' \\ Y'' \\ Z'' \end{Bmatrix} \quad (A-5)$$

di mana

$$T_3^* = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (A-6)$$

Sedangkan

$$\begin{Bmatrix} X'' \\ Y'' \\ Z'' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & -s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{Bmatrix} \quad (A-7)$$

dan

$$\begin{Bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\psi & s\psi \\ 0 & -s\psi & c\psi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_o \\ Y_o \\ Z_o \end{Bmatrix}_{T_2} \quad (A-8)$$

Substitusi persamaan (A-7) ke persamaan (A-5) menghasilkan hubungan

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}_{T_3} = \begin{bmatrix} c\phi & s\phi & 0 \\ -s\phi & c\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta & 0 & -s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c\phi c\theta & s\phi & -c\phi s\theta \\ -s\phi c\theta & c\phi & s\phi s\theta \\ s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{Bmatrix} \quad (A-9)$$

$$= T_3^{**} \begin{Bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{Bmatrix} \quad (A-10)$$

di mana

$$T_3^{**} = \begin{bmatrix} c\phi c\theta & s\phi & -c\phi s\theta \\ -s\phi c\theta & c\phi & s\phi s\theta \\ s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \quad (A-11)$$

Sehingga

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}_{T_3} = T_3 \begin{Bmatrix} X_o \\ Y_o \\ Z_o \end{Bmatrix}_{T_2} \quad (A-12)$$

di mana

$$T_3 = \begin{bmatrix} c\phi c\theta & s\phi c\psi + c\phi s\theta s\psi & s\phi s\psi - c\phi s\theta c\psi \\ -s\phi c\theta & c\phi c\psi - s\phi s\theta s\psi & c\phi s\psi + s\phi s\theta c\psi \\ s\theta & -c\theta s\psi & c\theta c\psi \end{bmatrix} \quad (A-13)$$

disini, simbol-simbol s dan c menyatakan fungsi sinus dan cosinus.

Komponen-komponen kecepatan sudut benda ($\omega_x, \omega_y, \omega_z$) dan laju perubahan sudut Euler ($\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$) dihubungkan dengan persamaan-persamaan sebagai berikut:

$$\begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} = T_3 \begin{Bmatrix} \dot{\psi} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + T_3^{**} \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$+ T_3^* \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} + T_3 \begin{Bmatrix} 0 \\ -\omega_c \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} \dot{\psi} c\phi c\theta + \dot{\theta} s\phi - \omega_c (s\phi c\psi + c\phi s\theta s\psi) \\ -\dot{\psi} s\phi c\theta + \dot{\theta} c\phi - \omega_c (c\phi c\psi - s\phi s\theta s\psi) \\ \dot{\psi} s\theta + \dot{\phi} + \omega_c c\theta s\psi \end{Bmatrix}$$

atau,

$$\omega_x = \dot{\psi} c\phi c\theta + \dot{\theta} s\phi - \omega_c (s\phi c\psi + c\phi s\theta s\psi)$$

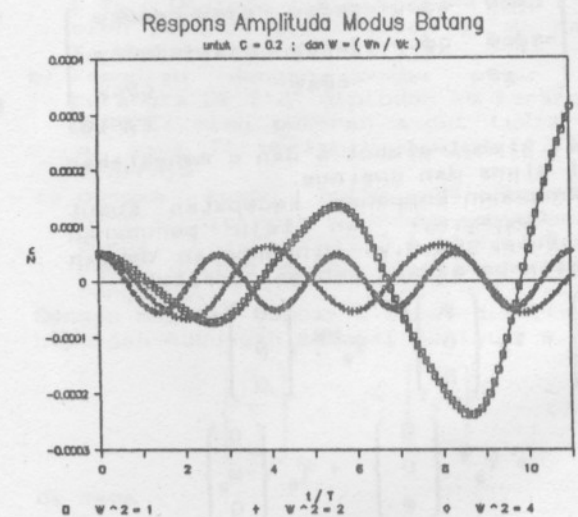
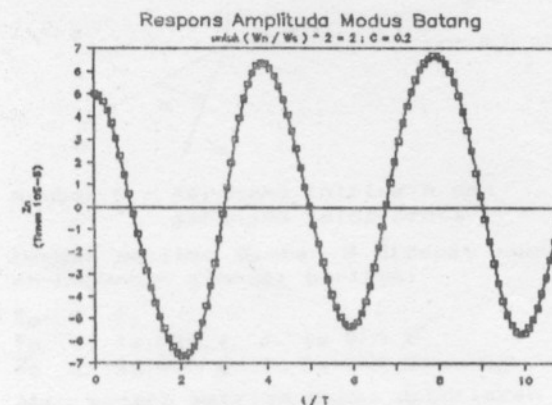
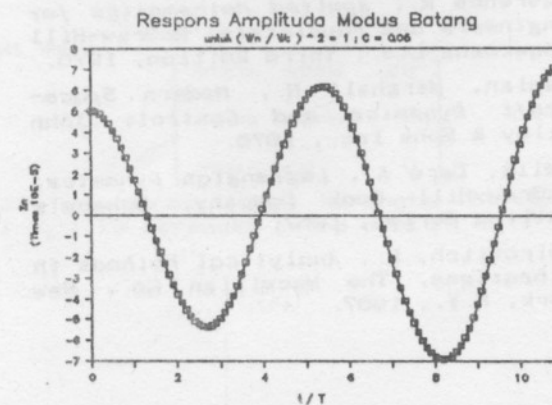
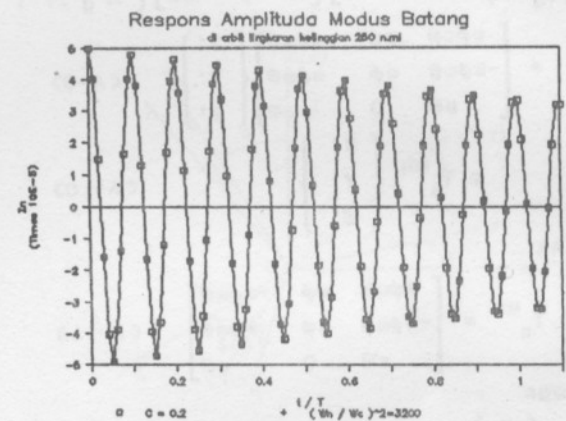
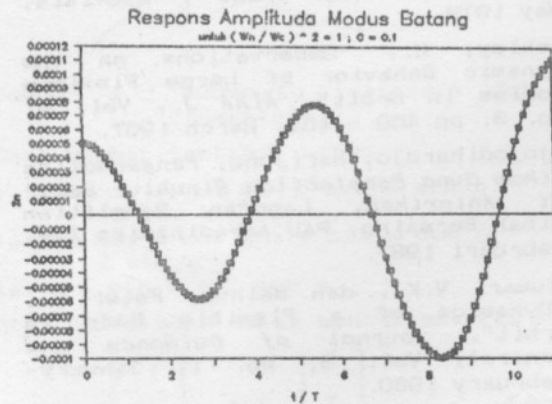
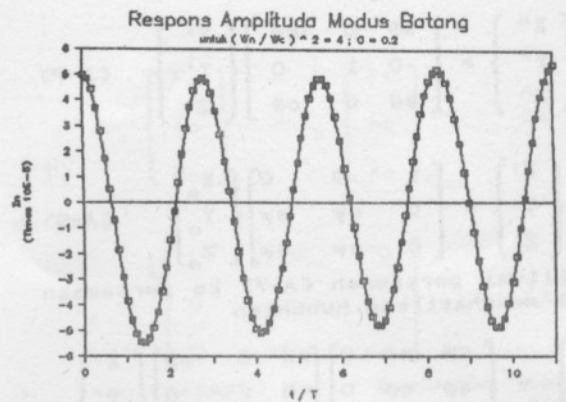
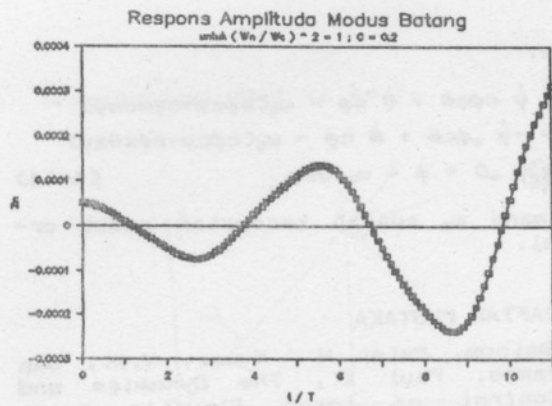
$$\omega_y = -\dot{\psi} s\phi c\theta + \dot{\theta} c\phi - \omega_c (c\phi c\psi - s\phi s\theta s\psi)$$

$$\omega_z = \dot{\psi} s\theta + \dot{\phi} + \omega_c c\theta s\psi \quad (A-14)$$

di mana ω_c adalah kecepatan sudut orbital.

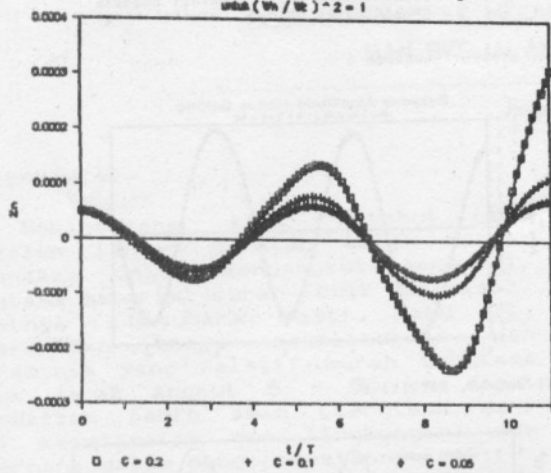
8. DAFTAR PUSTAKA

1. Bainum, Peter M., Kumar, V.K., dan James, Paul K., *The Dynamics and Control of Large Flexible Space Structures*, NASA Grant : NSG-1414, May 1978.
2. Ashley, H., "Observations on the Dynamic Behavior of Large Flexible Bodies in Orbit", *AIAA J.*, Vol. 5, No. 3, pp.460 - 469, March 1967.
3. Djojodihardjo, Harijono, *Pengendalian Sikap Guna Penstabilan Struktur Besar di Antariksa*, Laporan Penelitian Hibah Bersaing, PAU Aerodinamika ITB, Februari 1987.
4. Kumar, V.K., dan Bainum, Peter M., "Dynamics of a Flexible Body in Orbit", *Journal of Guidance and Control*, Vol. 3, No. 1, January-February 1980.
5. Pipes, Louis A., dan Harvill, Lawrence R., *Applied Mathematics for Engineers and Physicists*, McGraw-Hill Kogakosha Ltd., Third Edition, 1970.
6. Kaplan, Marshall H., *Modern Spacecraft Dynamics and Control*, John Wiley & Sons Inc., 1976.
7. Wells, Dare A., *Lagrangian Dynamics*, McGraw-Hill Book Company, Schaum's Outline Series, 1967.
8. Meirovitch, L., *Analytical Methods in Vibrations*, The Macmillan Co., New York, N.Y., 1967.



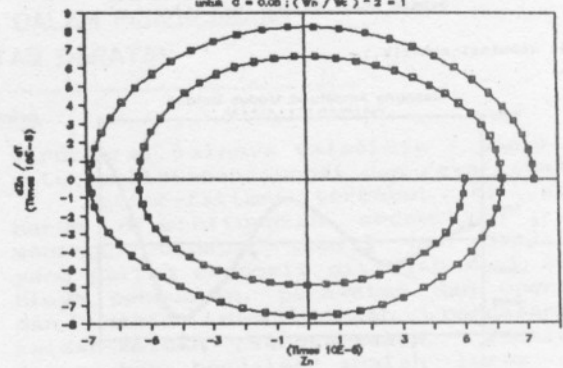
Respons Amplituda Modus Batang

untuk $(W_h / W_c)^{-2} = 1$



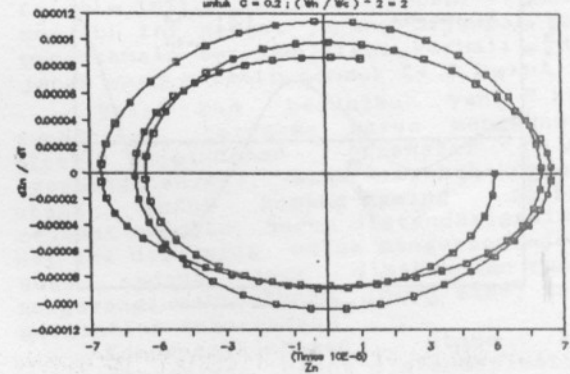
Gambar Bidang Fasa

untuk $C = 0.05 ; (W_h / W_c)^{-2} = 1$



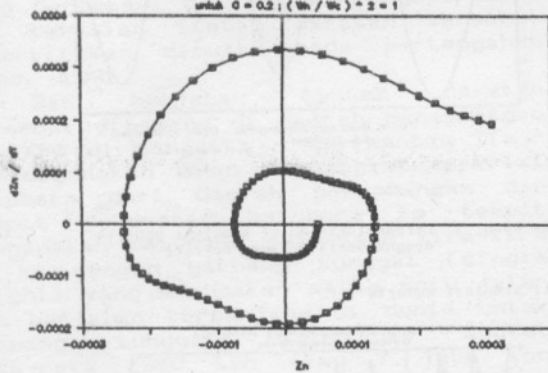
Gambar Bidang Fasa

untuk $C = 0.2 ; (W_h / W_c)^{-2} = 2$



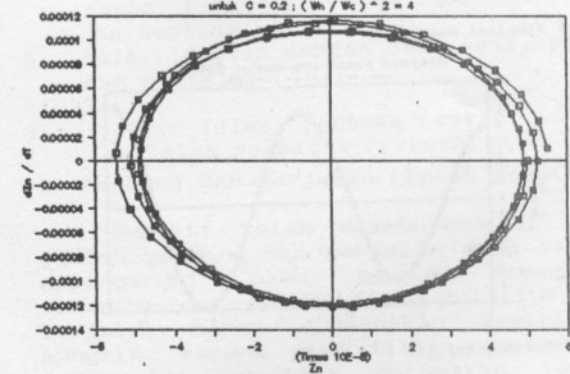
Gambar Bidang Fasa

untuk $C = 0.2 ; (W_h / W_c)^{-2} = 1$



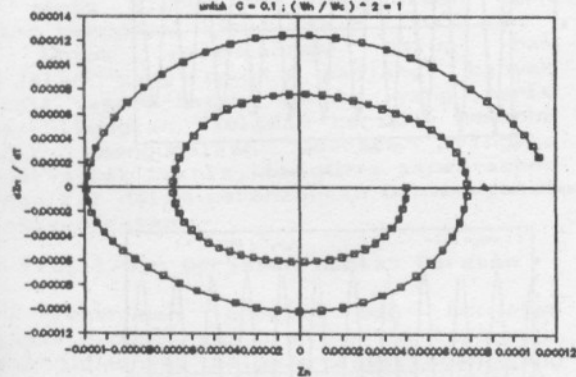
Gambar Bidang Fasa

untuk $C = 0.2 ; (W_h / W_c)^{-2} = 4$



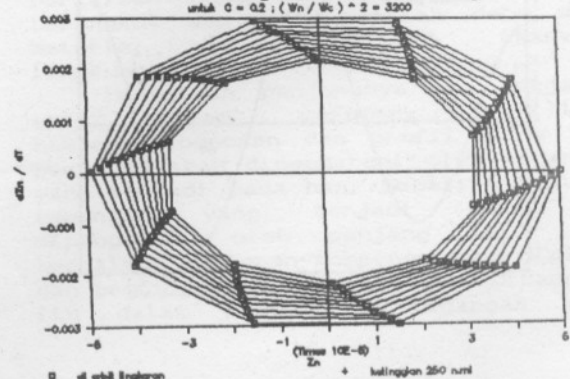
Gambar Bidang Fasa

untuk $C = 0.1 ; (W_h / W_c)^{-2} = 1$



Gambar Bidang Fasa Modus Batang

untuk $C = 0.2 ; (W_h / W_c)^{-2} = 3300$

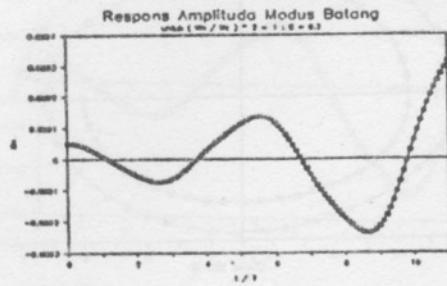


□ di awal Engkran

+ kelilingan 350 mm

Kasus ke-1 : Perbandingan hasil simulasi numerik dengan hasil Baimum, Ref.(1)

Hasil simulasi numerik :



Hasil Baimum, Ref.(1) :

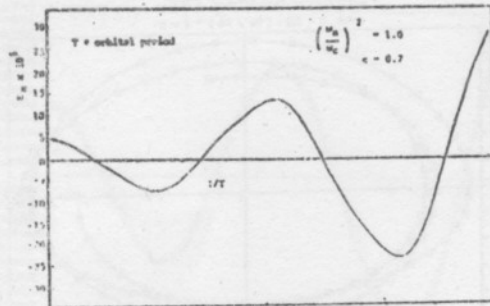
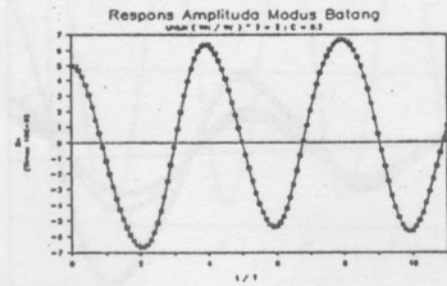


Fig. 5: Baidal Amplitude Response - Very Flexible Beam

Kasus ke-3 : Perbandingan hasil simulasi numerik dengan hasil Baimum, Ref.(1)

Hasil simulasi numerik :



Hasil Baimum, Ref.(1) :

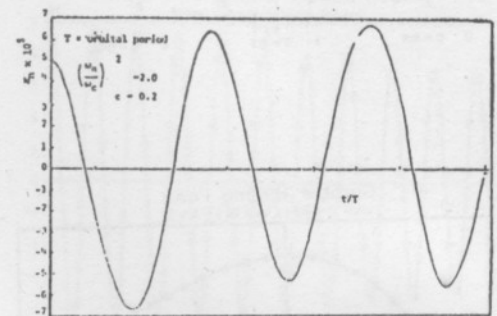
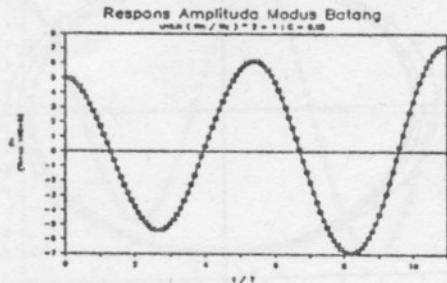


Fig. 7: Baidal Amplitude Response - Effect of Increased Beam Stiffness

Kasus ke-4 : Perbandingan hasil simulasi numerik dengan hasil Baimum, Ref.(1)

Hasil simulasi numerik :



Hasil Baimum, Ref.(1) :

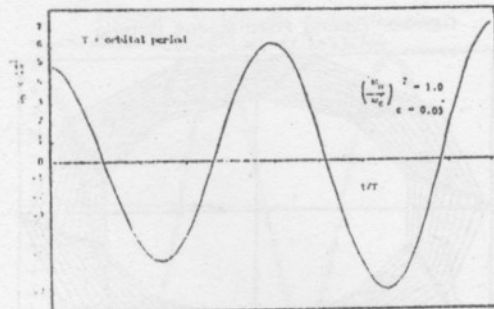
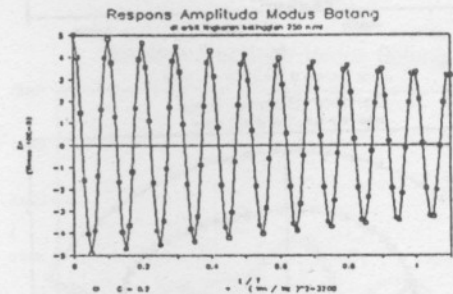


Fig. 6: Baidal Amplitude Response - Very Flexible beam

Kasus ke-6 : Perbandingan hasil simulasi numerik dengan hasil Baimum, Ref.(1)

Hasil simulasi numerik :



Hasil Baimum, Ref.(1) :

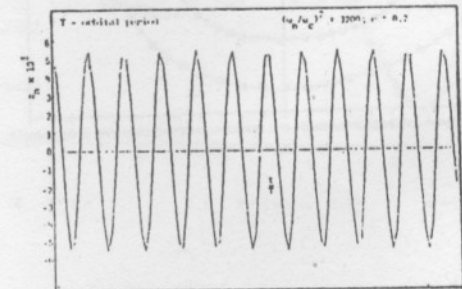


Fig. 8: Baidal Amplitude Response - Effect of Increased Beam Stiffness