

ANALISIS MEDAN ELASTIS DI DALAM SETENGAH RUANG ISOTROPI MELINTANG AKIBAT BEBAN NORMAL DI PERMUKAANNYA

IGN Wiratmaja Puja
Laboratorium Perancangan Mesin
Jurusan Teknik Mesin ITB

Abstrak

Makalah ini mengevaluasi secara eksak tegangan dan perpindahan yang terjadi di dalam setengah ruang (*half space*) yang mendapat tekanan terdistribusi merata dalam daerah lingkaran di permukaannya. Material setengah ruang yang dibahas adalah isotropi melintang (*transversely isotropic*) dimana bidang isotropinya sejajar dengan permukaan setengah ruang. Dengan menggunakan metoda fungsi potensial, perpindahan dan tegangan yang terjadi di dalam setengah ruang dievaluasi dalam bentuk tiga fungsi harmonis. Fungsi Green's untuk beban terkonsentrasi digunakan untuk menurunkan fungsi potensial untuk beban merata dengan metoda integrasi. Komponen tegangan dan perpindahan yang terjadi di dalam setengah ruang dapat dipecahkan secara eksak dalam bentuk integral eliptis lengkap jenis pertama, kedua dan ketiga. Di dalam makalah ini solusi untuk setengah ruang isotropi diturunkan dengan mengambil limit isotropi dari solusi isotropi melintang. Hasilnya dapat dibandingkan secara eksak dengan solusi isotropi yang sudah dipublikasikan sebelumnya. Hanya saja hasil yang sekarang bisa ditulis dalam bentuk yang lebih kompak. Dengan mengambil limit ke permukaan, solusi di permukaan dapat dibandingkan dengan kondisi batas.

Abstract

This paper evaluate the elastic field that induced by a uniform pressure applied over a circular area on the surface of an elastic half space. The half space is transversely isotropic, where the planes of isotropy are parallel to the surface. A potential function method is adopted where the elastic field is written in terms of three harmonic functions. The known point force Green functions are used to find the solution for uniform normal load over the area by quadrature. The elastic displacement and stress field are evaluated in term of closed form expressions containing complete elliptic integrals of the first, second and third kinds. Following limiting procedure allows the isotropic solution to be obtained. It is shown that the present results agree with the previous published solutions but the new solutions could be put in a more convenient form. Special consideration is also given to derive the limiting form of the stress field on the surface.

1. Pendahuluan

Kontak antara dua permukaan benda elastis sangat umum terjadi dalam bidang teknik seperti misalnya pada komponen mesin atau pada peletakan suatu pondasi. Permukaan kontak umumnya meneruskan gaya dan momen dimana antara permukaan tersebut juga sering terjadi gerakan relatif, seperti misalnya kontak antara permukaan dua gigi rodagigi. Umumnya dimensi permukaan kontak jauh lebih kecil dibandingkan dengan jari-jari kurva benda yang berkontak sehingga sering diidealkan sebagai benda elastis *semi-infinite* atau *setengah ruang* elastis.

Benda setengah ruang isotropi yang mendapat beban merata di permukaannya mula-mula dipakai para ilmuwan untuk menghitung keamanan peletakan fondasi bangunan di dalam tanah. Dengan berkembangnya teknologi maka aplikasinya semakin luas dipakai seperti misalnya dalam teknologi

pembentukan logam, elemen tribologi, dan lain-lain. Analisis tegangan setengah ruang anisotropi seperti misalnya isotropi melintang (keramik, cadmium dll), orthotropi dan jenis anisotropi yang lain, diperlukan sehubungan dengan semakin luasnya penggunaan bahan keramik, komposit, atau pada daerah tertentu struktur tanah tidak dapat dimodelkan sebagai isotropi.

Salah satu metoda untuk mendapatkan solusi eksak dalam bidang elastisitas untuk benda yang berkontak adalah metoda fungsi potensial. Disini biasanya diperlukan untuk mendapat fungsi harmonis yang harganya diberikan pada daerah kontak. Dalam beberapa kasus teori potensial dapat memberikan solusi yang eksak untuk analisis setengah ruang jika pemilihan sistem koordinatnya tepat. Solusi eksak memberikan beberapa keuntungan dalam bidang perancangan karena bisa memberikan hasil langsung dan bisa dipakai sebagai dasar untuk memeriksa hasil metoda numerik dan data-data eksperimen.

2. Latar Belakang

Pembebanan pada permukaan setengah ruang elastis adalah masalah klasik dalam bidang elastisitas. Asal mula dari problem ini bisa ditelusuri dari investigasi oleh Boussinesq (1885) dimana dia memberikan solusi elastis dalam bentuk turunan fungsi potensial. Fungsi potensial yang didapat adalah dalam bentuk integral ganda yang diambil dari luas daerah kontak. Pada saat itu kesulitan utama adalah mengevaluasi integral ganda seperti yang di tulis Love (1929) sebagai "*The difficulty of evaluating the integral has been a serious obstacle to the development of the formal solution in special cases*".

Lamb (1902) dan Terazawa (1916) mengembangkan metoda alternatif dimana komponen tegangan dan perpindahan di ekspresikan dalam bentuk integral yang mengandung fungsi Bessel yang sekarang dikenal dengan nama *Transformasi Hankel*. Metoda ini hanya bisa mengevaluasi pembebanan dalam lingkaran khususnya beban yang *axisymmetri*.

Tampaknya Love (1929) yang pertama kali berhasil menggunakan metoda potensial yang diperkenalkan Boussinesq untuk menganalisis pembebanan merata diatas setengah ruang isotropi. Love memecahkan integral ganda dalam bentuk integral eliptis. Walaupun Love tidak mendapat solusi yang lengkap, hasil yang didapat merupakan kemajuan yang sangat berarti dalam perkembangan metoda potensial.

Metoda fungsi potensial yang sekarang juga dikenal dengan *metoda fungsi Green* untuk isotropi melintang pertama diperkenalkan oleh Elliot (1948) dan kemudian dikembangkan oleh Fabrikant (1989). Fabrikant mengembangkan metoda baru untuk menganalisis turunan fungsi potensial dimana dia memanfaatkan (*utilize*) representasi integral untuk seper jarak antara dua titik dalam ruang tiga dimensi. Metoda Fabrikant saat ini digunakan secara luas untuk memecahkan masalah mekanika kontak dan crack (Hanson and Puja, 1996,1998; Podil'chuck, 1996; Karapetian, 1994, dll).

3. Dasar Teori dan Parameter Geometri

Perpindahan dan tegangan didalam setengah ruang akan ditulis dalam koordinat polar (ρ, ϕ, z) , jari-jari pembebanan $\rho = a$ dan dua parameter $l_1(a)$, $l_2(a)$, yang didefinisikan sebagai berikut

$$l_1(a) = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{(\rho+a)^2 + z^2} - \sqrt{(\rho-a)^2 + z^2} \right\},$$

$$l_2(a) = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{(\rho+a)^2 + z^2} + \sqrt{(\rho-a)^2 + z^2} \right\} \quad (1)$$

Kedua parameter ini membuat jarak antara titik (ρ, ϕ, z) di dalam setengah ruang dengan titik di garis lingkaran pembebanan $(a, 0, 0)$ dapat diekspresikan dalam bentuk dua dimensi sebagai

$$R^2 = a^2 + \rho^2 + z^2 - 2ap \cos \phi$$

$$= l_1^2(a) + l_2^2(a) - 2l_1(a)l_2(a) \cos \phi, \quad (2)$$

dimana

$$l_1^2(a) + l_2^2(a) = a^2 + \rho^2 + z^2,$$

$$l_1(a)l_2(a) = ap. \quad (3)$$

Dari persamaan (1) dengan mudah dapat di ikuti bahwa $l_1(a) \leq l_2(a)$ dan $l_1(a) \leq \rho$. Solusi untuk tegangan dan perpindahan juga akan diekspresikan oleh paramater k dan n yang didefinisikan sebagai

$$k = \frac{l_1(a)}{l_2(a)}, \quad n = \frac{l_1^2(a)}{\rho^2} \quad (4)$$

Dengan menggunakan hubungan diferensial berikut (Fabrikant 1989)

$$\frac{\partial l_1(a)}{\partial z} = -\frac{zl_1(a)}{l_2^2(a) - l_1^2(a)}, \quad \frac{\partial l_2(a)}{\partial z} = \frac{zl_2(a)}{l_2^2(a) - l_1^2(a)},$$

$$\frac{\partial l_1(a)}{\partial \rho} = \frac{\rho(a^2 - l_1^2(a))}{l_1(a)(l_2^2(a) - l_1^2(a))},$$

$$\frac{\partial l_2(a)}{\partial \rho} = \frac{\rho(l_2^2(a) - a^2)}{l_2(a)(l_2^2(a) - l_1^2(a))}, \quad (5)$$

turunan pertama parameter k dan n didapat

$$\frac{\partial k}{\partial z} = -\frac{2zk}{l_2^2(a)(1-k^2)}, \quad \frac{\partial k}{\partial \rho} = \frac{a-2pk+ak^2}{l_2^2(a)(1-k^2)}, \quad (6)$$

Berhubung tegangan dan perpindahan akan di evaluasi dalam hal *integral eliptis lengkap*, maka dirasa perlu untuk mereview tentang integral tersebut. Integral eliptis lengkap jenis pertama, kedua dan ketiga yang diberi simbol $F(k)$, $E(k)$ and $\Pi(n, k)$ didefinisikan sebagai berikut (Gradshteyn and Ryzhik, 1980)

$$F(k) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{(1-k^2x^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{(1-k^2 \sin^2 \phi)}},$$

$$E(k) = \int_0^1 \frac{\sqrt{(1-k^2x^2)} dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1-k^2 \sin^2 \phi)} d\phi,$$

$$\Pi(n, k) = \int_0^1 \frac{dx}{(1-nx^2)\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{(1-k^2x^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{(1-n \sin^2 \phi)\sqrt{(1-k^2 \sin^2 \phi)}} \quad (7)$$

Turunan integral eliptis jenis pertama dan kedua yang diperlukan untuk mengevaluasi beberapa komponen tegangan adalah

$$\frac{dE(k)}{dk} = \frac{1}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-k^2 \sin^2 \phi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}} d\phi = \frac{E(k) - F(k)}{k},$$

$$\frac{dF(k)}{dk} = \frac{1}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k^2 \sin^2 \varphi}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} d\varphi = -\frac{F(k)}{k} + \frac{E(k)}{k(1 - k^2)}. \quad (8)$$

Formula untuk mentransformasi integral eliptis jenis pertama dan kedua juga diperlukan yaitu (Gradshteyn and Ryzhik, 1980)

$$\begin{aligned} F\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right) &= (1+k)F(k), \\ E\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right) &= \frac{2E(k) - (1-k^2)F(k)}{1+k}. \end{aligned} \quad (9)$$

Untuk mendapat representasi daerah elastis dalam bentuk yang kompak, diperlukan formula untuk transformasi integral eliptis jenis ketiga (Hanson and Puja, 1996)

$$\begin{aligned} \Pi\left(p, \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right) &= \frac{\pi l_2(a)(1+k)(a+p)}{4zp^2(a-p)} \left\{ 2\rho^2 - |a^2 - \rho^2| \right. \\ &\quad \left. + \frac{a^4 - \rho^4}{|a^2 - \rho^2|} \right\} + \frac{(1+k)(a+p)}{(a-p)} \{ F(k) - 2\Pi(n, k) \}, \quad (10) \\ \text{dimana } p &= \frac{4ap}{(a+p)^2}. \end{aligned}$$

4. Fungsi Potensial Untuk Isotropi Melintang

Hubungan antara tegangan dan regangan untuk benda elastis terdiri dari sembilan persamaan yang menghubungkan sembilan komponen tegangan σ_{ij} dan sembilan komponen regangan ε_{ij} adalah

$$\sigma_{ij} = A_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3, \quad (11)$$

dimana A_{ijkl} adalah konstanta elastis material.

Untuk setengah ruang isotropi melintang dengan daerah $z \geq 0$ (lihat Gambar 1) yang memiliki bidang isotropi sejajar dengan permukaan, persamaan tegangan-regangan dapat diturunkan sebagai (Daniel, 1994)

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & (A_{11}-2A_{66}) & A_{13} & 0 & 0 & 0 \\ (A_{11}-2A_{66}) & A_{11} & A_{13} & 0 & 0 & 0 \\ A_{13} & A_{13} & A_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Dalam hal perpindahan, persamaan diatas menjadi

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= A_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + (A_{11} - 2A_{66}) \frac{\partial v}{\partial y} + A_{13} \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \sigma_{yy} &= (A_{11} - 2A_{66}) \frac{\partial u}{\partial x} + A_{11} \frac{\partial v}{\partial y} + A_{13} \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \sigma_{zz} &= A_{13} \frac{\partial u}{\partial x} + A_{13} \frac{\partial v}{\partial y} + A_{33} \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \tau_{yz} = A_{66} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \end{aligned}$$

$$\tau_{zx} = A_{44} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad \tau_{yz} = A_{44} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad (13)$$

dimana u , v dan w adalah perpindahan dalam arah x , y dan z .

Substitusi persamaan tegangan-perpindahan diatas ke persamaan keseimbangan (Urgural, 1975) didapat

$$\begin{aligned} A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_{44} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (A_{11} - A_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ + (A_{13} + A_{44}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} &= 0, \\ A_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + A_{11} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + A_{44} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + (A_{11} - A_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ + (A_{13} + A_{44}) \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} &= 0, \\ A_{44} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} + A_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (A_{13} + A_{44}) \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} \right\} &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Solusi persamaan keseimbangan di atas dalam bentuk tiga fungsi potensial F_1, F_2 dan F_3 adalah (Fabrikant, 1989)

$$u^e = \Lambda(F_1 + F_2 + iF_3); \quad w = m_1 \frac{\partial F_1}{\partial z} + m_2 \frac{\partial F_2}{\partial z}, \quad (15)$$

dimana i adalah bilangan kompleks, m_1, m_2 adalah konstanta, dan u^e adalah perpindahan kompleks $u^e = u + iv$. Ketiga fungsi F_k memenuhi hubungan

$$\Delta F_k + \gamma_k^2 \frac{\partial^2 F_k}{\partial z^2} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \quad (16)$$

dimana $m_1, m_2, \gamma_1, \gamma_2$ and γ_3 adalah konstanta. Konstanta γ_3 di berikan oleh persamaan

$$\gamma_3^2 = \frac{A_{44}}{A_{66}}, \quad (17)$$

sementara $\gamma_k^2 = n_k, k = 1, 2$, dimana n_k adalah akar-akar (bilangan riil atau kompleks konjugasi) dari persamaan kuadrat

$$A_{11}A_{44}n^2 + \{A_{13}(A_{13} + 2A_{44}) - A_{11}A_{33}\}n + A_{33}A_{44} = 0. \quad (18)$$

Hubungan antara konstanta m_k dan γ_k diberikan oleh

$$m_k = \frac{A_{11}\gamma_k^2 - A_{44}}{A_{13} + A_{44}} = \frac{(A_{13} + A_{44})\gamma_k^2}{A_{33} - \gamma_k^2 A_{44}}, \quad k = 1, 2, \quad (19)$$

dengan catatan bahwa m_k memiliki sifat $m_1 m_2 = 1$.

Dengan mengkombinasikan tegangan dalam bidang sebagai

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \sigma_{rr} + \sigma_{\phi\phi}, \\ \sigma_2 &= \sigma_{xx} - \sigma_{yy} + 2i\tau_{xy} = e^{2i\phi} (\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\phi\phi} + 2i\tau_{\rho\phi}), \\ \tau_z &= \tau_{zx} + i\tau_{yz} = e^{2i\phi} (\sigma_{\rho\phi} + \sigma_{\phi\rho}), \end{aligned} \quad (20)$$

Ekspresi untuk tegangan di dalam setengah ruang dapat disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= (A_{11} - A_{66})(\bar{\Delta}u + \bar{\Lambda}u) + 2A_{13} \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \sigma_2 &= 2A_{66}\bar{\Delta}u, \\ \sigma_z &= \frac{1}{2}A_{13}(\bar{\Delta}u + \bar{\Lambda}u) + A_{33} \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \tau_z &= A_{44} \left\{ \frac{\partial u}{\partial z} + \bar{\Lambda}w \right\},\end{aligned}\quad (21)$$

dimana operator Δ dan Λ adalah

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \Lambda = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}, \quad (22)$$

dan tanda bar menandakan bahwa variabel adalah kompleks konjugasi.

Akhirnya komponen tegangan dalam hal fungsi potensial bisa didapat dengan mensubstitusi komponen perpindahan (15) ke persamaan (21). Hasilnya adalah

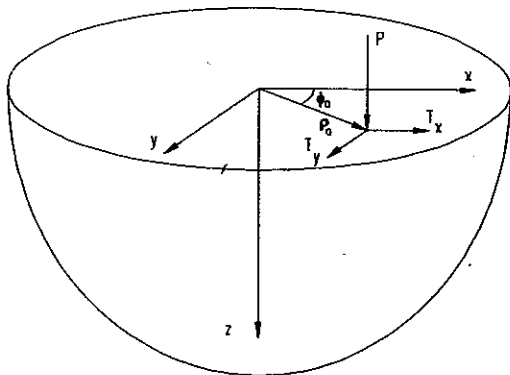
$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 2A_{66} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left\{ [\gamma_1^2 - (1+m_1)\gamma_3^2]F_1 + [\gamma_2^2 - (1+m_2)\gamma_3^2]F_2 \right\}, \\ \sigma_2 &= 2A_{66}\bar{\Lambda}^2(F_1 + F_2 + iF_3), \\ \sigma_z &= A_{44} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[(1+m_1)\gamma_1^2 F_1 + (1+m_2)\gamma_2^2 F_2 \right], \\ \tau_z &= A_{44}\bar{\Lambda} \frac{\partial}{\partial z} \left[(1+m_1)F_1 + (1+m_2)F_2 + iF_3 \right].\end{aligned}\quad (23)$$

5. Fungsi Green untuk Beban Terkonsentrasi di Permukaan Setengah Ruang Isotropi Melintang

Untuk setengah ruang elastis isotropi melintang $z \geq 0$ dengan bidang isotropi sejajar permukaan, penggunaan sistem koordinat polar (ρ, ϕ, z) dimana

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad (24)$$

adalah merupakan sistem koordinat yang paling tepat untuk mengevaluasi perpindahan dan tegangan. Geometri sistem koordinat tersebut ditunjukkan dalam Gambar 1.



Gambar 1. Beban Terkonsentrasi di Permukaan Setengah Ruang

Solusi umum untuk gaya terkonsentrasi di permukaan setengah ruang dengan koordinat $(\rho_0, \phi_0, 0)$ seperti di tunjukkan pada Gambar 1, dalam bentuk tiga fungsi potensial pertama kali di perkenalkan oleh Fabrikant (1989) sebagai

$$\begin{aligned}F_1 &= \frac{H\gamma_1}{m_1 - 1} \left[\frac{1}{2}\gamma_2(\bar{\Lambda}T + \bar{\Lambda}\bar{T})\chi_1 + P \ln(R_1 + z_1) \right], \\ F_2 &= \frac{H\gamma_2}{m_2 - 1} \left[\frac{1}{2}\gamma_1(\bar{\Lambda}T + \bar{\Lambda}\bar{T})\chi_2 + P \ln(R_2 + z_2) \right], \\ F_3 &= i \frac{\gamma_3}{4\pi A_{44}} (\bar{\Lambda}T - \bar{\Lambda}\bar{T})\chi_3.\end{aligned}\quad (25)$$

dimana P , T_x dan T_y adalah gaya terkonsentrasi dalam arah z , x , dan y . Persamaan di atas menggunakan notasi

$$\begin{aligned}T &= T_x + iT_y, \\ R_0(z) &= [\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0) + z^2]^{1/2}, \\ \chi(z) &= z \ln(R_0 + z) - R_0, \\ \chi_j &= \chi(z_j); \quad R_j = R_0(z_j), \quad j=1,2,3\end{aligned}\quad (26)$$

dan konstanta H didefinisikan sebagai

$$H = \frac{(\gamma_1 + \gamma_2)A_{11}}{2\pi(A_{11}A_{33} - A_{13}^2)} \quad (27)$$

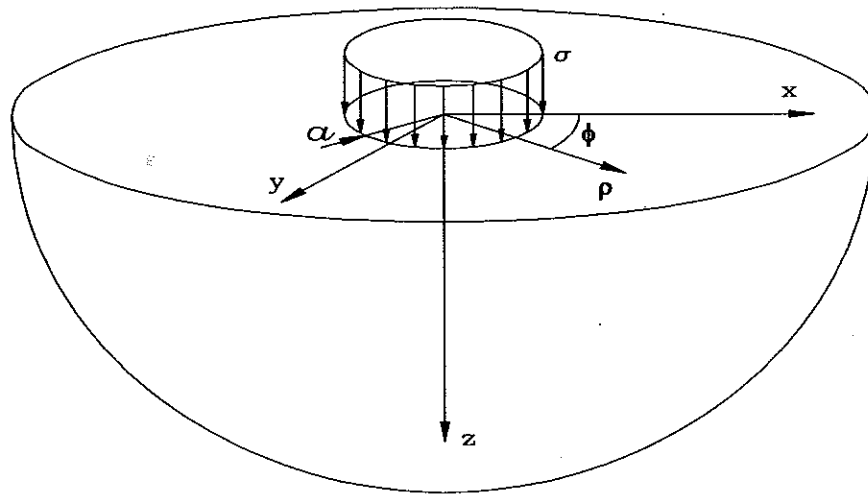
6. Beban Terdistribusi Merata Dalam Lingkaran

Perpindahan dan tegangan yang terjadi di dalam setengah ruang isotropi melintang yang mendapat tekanan merata σ dalam daerah lingkaran $\rho \leq a$, dapat diturunkan dengan mengganti gaya P pada persamaan (25) dengan $\sigma\rho_0 d\rho_0 d\phi_0$ dan kemudian mengintegrasikan hasilnya untuk daerah $0 \leq \rho_0 \leq a$ dan $0 \leq \phi_0 \leq 2\pi$. Notasi dan geometri pembebanan ditunjukkan pada gambar 2. Fungsi potensial sekarang menjadi

$$\begin{aligned}F_1(\rho, \phi, z) &= \frac{H\gamma_1\sigma}{(m_1 - 1)} \int_0^{2\pi} \int_0^a \ln(R_1 + z_1) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0, \\ F_2(\rho, \phi, z) &= \frac{H\gamma_2\sigma}{(m_2 - 1)} \int_0^{2\pi} \int_0^a \ln(R_2 + z_2) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0, \\ F_3(\rho, \phi, z) &= 0.\end{aligned}\quad (28)$$

Dengan menggunakan notasi

$$\begin{aligned}\Psi(\rho, z) &= \int_0^{2\pi} \int_0^a \ln(R + z) \rho_0 d\rho_0 d\phi_0, \\ R^2 &= \rho^2 + \rho_0^2 + z^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0),\end{aligned}\quad (29)$$



Gambar 2. Tekanan Terdistribusi Merata Dalam Lingkaran

fungsi potensial (28) dapat ditulis dalam bentuk umum

$$F_j(\rho, \phi, z) = \frac{H\gamma_j \sigma}{(m_j - 1)} \Psi(\rho, z_j), \quad j = 1, 2 \quad (30)$$

Disini perlu dicatat bahwa integral ganda diatas tidak tergantung pada sudut ϕ , jadi Ψ hanya merupakan fungsi dari ρ dan z . Pada setiap titik di dalam ruang $z \geq 0$, fungsi Ψ adalah kontinu dan juga mempunyai turunan yang kontinu terhadap ρ dan z . Semua penurunan dapat dilakukan di dalam tanda integral.

Dengan mensubstitusi ketiga fungsi potensial (28) kedalam persamaan (15), maka akan didapatkan perpindahan di dalam ruang $z \geq 0$. Perpindahan dalam bidang x-y didapat

$$u^e = \Lambda(F_1 + F_2) = H\sigma e^{\phi} \sum_{j=1}^2 \frac{\gamma_j}{(m_j - 1)} \frac{\partial}{\partial \rho} \Psi(\rho, z_j), \quad (31)$$

sedangkan perpindahan dalam arah z adalah

$$w = m_1 \frac{\partial F_1}{\partial z} + m_2 \frac{\partial F_2}{\partial z} = H\sigma \sum_{j=1}^2 \frac{m_j}{(m_j - 1)} \frac{\partial}{\partial z_j} \Psi(\rho, z_j), \quad (32)$$

$$\text{dimana } z_j = \frac{z}{\gamma_j} \text{ dan turunannya } \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{\gamma_j} \frac{\partial}{\partial z_j}.$$

Dengan cara yang sama, tegangan di dalam ruang $z \geq 0$ didapat dengan memasukkan fungsi potensial ke dalam persamaan (23) dan hasilnya adalah

$$\sigma_1 = 2A_{66}H\sigma \sum_{j=1}^2 \frac{[\gamma_j^2 - (1+m_j)\gamma_j^2]}{(m_j - 1)\gamma_j} \frac{\partial^2}{\partial z_j^2} \Psi(\rho, z_j). \quad (33)$$

Karena $\Psi(\rho, z)$ tidak tergantung pada sudut ϕ , operator $\Lambda^2 \Psi$ dapat ditulis sebagai

$$\Lambda^2 \Psi(\rho, z_j) = \Lambda \Lambda \Psi(\rho, z_j) = e^{2\phi} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \Psi(\rho, z_j), \quad (34)$$

sehingga σ_2 menjadi

$$\sigma_2 = 2A_{66}H\sigma e^{2\phi} \sum_{j=1}^2 \frac{\gamma_j}{(m_j - 1)} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \Psi(\rho, z_j). \quad (35)$$

Dengan menggunakan persamaan (Fabrikant 1989)

$$\frac{(1+m_j)}{(m_j - 1)} = \frac{(-1)^{j+1}}{2\pi A_{44}H(\gamma_1 - \gamma_2)}, \quad (36)$$

komponen tegangan dalam arah z didapat

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{\sigma}{2\pi(\gamma_1 - \gamma_2)} \sum_{j=1}^2 \gamma_j (-1)^{j+1} \frac{\partial^2}{\partial z_j^2} \Psi(\rho, z_j), \\ \tau_z &= \frac{\sigma e^{\phi}}{2\pi(\gamma_1 - \gamma_2)} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial z_j} \Psi(\rho, z_j). \end{aligned} \quad (37)$$

Dari persamaan-persamaan (31-33), (35) dan (37) diatas, jelas bahwa untuk mendapat perpindahan dan tegangan didalam setengah ruang kita perlu mengevaluasi turunan pertama dan kedua fungsi potensial terhadap ρ dan z .

Untuk mendapat turunan pertama fungsi potensial terhadap ρ , kita perhatikan bahwa $\partial \Psi / \partial \rho$ adalah sama dengan nilai $\partial \Psi / \partial x$ pada bidang $\phi = 0$. Evaluasi

$$\frac{\partial \Psi(\rho, z)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \iint_A \ln(R+z) dx_o dy_o \right\}, \quad (38)$$

dimana A adalah luas daerah tertekan. Mengingat bahwa turunan dapat dilakukan di dalam integral dan

$$\text{bahwa } \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{1}{R}(x - x_o) = -\frac{\partial R}{\partial x_o} \text{ persamaan diatas}$$

dapat ditulis menjadi

$$\frac{\partial \Psi(\rho, z)}{\partial x} = - \iint_A \frac{\partial}{\partial x_o} \ln(R+z) dx_o dy_o. \quad (39)$$

Dengan menggunakan teorema Green's (Amazigo, 1985), integral ganda diatas dapat ditransformasi

menjadi integral garis yang mengelilingi luas daerah yang ditekan. Hasilnya adalah

$$\frac{\partial \Psi(\rho, z)}{\partial x} = - \int \ln(\bar{R} + z) dy_0 = - \int_0^{2\pi} \ln(\bar{R} + z) a \cos \phi_0 d\phi_0 \quad (40)$$

dimana $\bar{R} = \{\rho^2 + a^2 + z^2 - 2\rho a \cos(\phi - \phi_0)\}^{1/2}$.

Kemudian dengan *integration by parts* integral diatas bisa dipecah menjadi

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi(\rho, z)}{\partial x} &= -a \left\{ \left[\ln(\bar{R} + z) \sin \phi_0 \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin \phi_0 \frac{1}{(\bar{R} + z)} \frac{\partial \bar{R}}{\partial \phi_0} d\phi_0 \right\} \\ &= -a^2 \rho \int_0^{2\pi} \frac{\sin \phi_0 \sin(\phi - \phi_0)}{\bar{R}(\bar{R} + z)} d\phi_0 \quad (41) \end{aligned}$$

Sekarang set $\phi = 0$ dan dengan menggunakan identitas

$$\frac{1}{\bar{R}(\bar{R} + z)} = \frac{1}{(\bar{R}^2 - z^2)} \left(1 - \frac{z}{\bar{R}} \right), \quad (42)$$

kita akan mendapat

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} &= \frac{\partial \Psi}{\partial x} \bigg|_{x=0} = -a^2 \rho \int_0^{2\pi} \sin \phi_0 \sin(-\phi_0) \left[\frac{1}{\bar{R}^2 - z^2} \left(1 - \frac{z}{\bar{R}} \right) \right] d\phi_0 \\ &= a^2 \rho \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \phi_0}{(\rho^2 + a^2 - 2\rho a \cos \phi_0)} \left(1 - \frac{z}{\bar{R}} \right) d\phi_0 \quad (43) \end{aligned}$$

Dengan menggunakan identitas

$$\begin{aligned} \sin^2 \phi_0 &= - \frac{(a^2 + \rho^2 - 2\rho a \cos \phi_0)^2}{4a^2 \rho^2} \\ &+ \frac{(a^2 + \rho^2)(a^2 + \rho^2 - 2\rho a \cos \phi_0)}{2a^2 \rho^2} - \frac{(a^2 - \rho^2)^2}{4a^2 \rho^2}, \quad (44) \end{aligned}$$

akan didapat

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi(\rho, z)}{\partial \rho} &= -a^2 \rho \int_0^{2\pi} \frac{(a^2 + \rho^2 - 2\rho a \cos \phi_0)}{4a^2 \rho^2} d\phi_0 \\ &+ a^2 \rho \int_0^{2\pi} \frac{(a^2 + \rho^2)}{2a^2 \rho^2} d\phi_0 - a^2 \rho \int_0^{2\pi} \frac{(a^2 - \rho^2)^2}{4a^2 \rho^2 (a^2 + \rho^2 - 2\rho a \cos \phi_0)} d\phi_0 \\ &- a^2 \rho z \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \phi_0 d\phi_0}{(a^2 + \rho^2 - 2\rho a \cos \phi_0) \bar{R}} \quad (45) \end{aligned}$$

Dengan mudah dapat turunkan bahwa

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\phi_0}{(a^2 + \rho^2 - 2\rho a \cos \phi_0)} = \frac{2\pi}{|a^2 - \rho^2|}, \quad (46)$$

sehingga persamaan (45) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi(\rho, z)}{\partial \rho} &= \frac{\pi}{2\rho} \left\{ (a^2 + \rho^2) - |a^2 - \rho^2| \right\} \\ &- a^2 \rho z \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \phi_0 d\phi_0}{(a^2 + \rho^2 - 2\rho a \cos \phi_0) \bar{R}} \quad (47) \end{aligned}$$

Substitusi sekali lagi identitas (44) akhirnya persamaan diatas menjadi

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi(\rho, z)}{\partial \rho} &= \frac{\pi}{2\rho} \left\{ (a^2 + \rho^2) - |a^2 - \rho^2| \right\} + \frac{z}{4\rho} I_{13} \\ &- \frac{z(a^2 + \rho^2)}{2\rho} I_2 + \frac{z(a^2 - \rho^2)^2}{4\rho} I, \quad (48) \end{aligned}$$

dimana integral I_1 , I_2 dan I_3 didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{2\pi} \frac{(a^2 + \rho^2 - 2\rho a \cos \phi_0) d\phi_0}{\bar{R}}, \quad I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi_0}{\bar{R}}, \\ I_3 &= \int_0^{2\pi} \frac{d\phi_0}{(a^2 + \rho^2 - 2\rho a \cos \phi_0) \bar{R}} \quad (49) \end{aligned}$$

Evaluasi integral I_2 dengan mengubah variabel integrasi $\phi_0 = \pi - 2\phi_1$ menghasilkan

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{l_2(a)} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{-2d\phi_1}{\sqrt{k_1^2 + 1 + 2k(1 - 2\sin^2 \phi_1)}} \\ &= \frac{4}{l_2(a)(1+k)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi_1}{\sqrt{1 - \frac{4k}{(1+k)^2} \sin^2 \phi_1}} \quad (50) \end{aligned}$$

Observasi bahwa integral diatas adalah integral eliptis lengkap jenis pertama. Dengan menggunakan persamaan (9) kita mendapat

$$I_2 = \frac{4}{l_2(a)(1+k)} \mathbf{F} \left(\frac{2\sqrt{k}}{(1+k)} \right) = \frac{4}{l_2(a)} \mathbf{F}(k) \quad (51)$$

Dengan cara yang sama evaluasi integral I_1 dan I_3 dalam hal integral eliptis lengkap akan menghasilkan

$$\begin{aligned} I_1 &= 4l_2(a)(1+k) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k} \right)^2 \sin^2 \phi_1} d\phi_1 - z^2 I_2 \\ &= 8l_2(a) \mathbf{E}(k) - \frac{4}{l_2(a)} \{ l_2^2(a) - l_1^2(a) + z^2 \} \mathbf{F}(k), \quad (52) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{4}{l_2(a)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi_1}{\{(a+\rho)^2 - 4\rho a \sin^2 \phi_1\} \sqrt{(1+k)^2 - 4k \sin^2 \phi_1}} \\ &= \frac{4}{l_2(a)(a+\rho)^2 (1+k)} \Pi \left(p, \frac{2\sqrt{k}}{1+k} \right), \quad (53) \end{aligned}$$

Sekarang kita bisa mendapat solusi turunan pertama fungsi potensial dalam bentuk integral eliptis lengkap dengan memasukkan nilai integral I_1 , I_2 dan I_3 kedalam persamaan (48), dan hasilnya adalah

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi(\rho, z)}{\partial \rho} &= \frac{\pi}{2\rho} \left\{ (a^2 + \rho^2) - |a^2 - \rho^2| \right\} + \frac{2zl_2(a)}{\rho} \mathbf{E}(k) \\ &- \frac{z}{\rho l_2(a)} \{ 2l_2^2(a) + a^2 + \rho^2 \} \mathbf{F}(k) \\ &+ \frac{z(a^2 - \rho^2)^2}{\rho l_2(a)(1+k)(a+\rho)^2} \Pi \left(p, \frac{2\sqrt{k}}{1+k} \right), \quad (54) \end{aligned}$$

atau dapat disederhanakan dengan memakai persamaan (10) menjadi

$$\frac{\partial \Psi(\rho, z)}{\partial \rho} = \frac{\pi a^2}{\rho} + \frac{2z l_2(a)}{\rho} E(k) - \frac{2z}{\rho l_2(a)} \{l_2^2(a) + \rho^2\} F(k) - \frac{2z(a^2 - \rho^2)}{\rho l_2(a)} \Pi(n, k). \quad (55)$$

Dengan menggunakan metoda yang sama, turunan kedua fungsi potensial terhadap x didapat

$$\frac{\partial^2 \Psi(\rho, z)}{\partial x^2} = \iint_A \frac{\partial}{\partial x^2} \{\ln(R+z)\} dx_0 dy_0 = - \iint_A \frac{\partial}{\partial x_0} \left\{ \frac{x-x_0}{R(R+z)} \right\} dx_0 dy_0. \quad (56)$$

Transformasi integral ganda diatas menjadi integral garis yang mengelilingi luas daerah yang ditekan, dan kemudian hasilnya ditulis dalam koordinat polar didapat

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi(\rho, z)}{\partial x^2} &= - \oint_C \frac{x-x_0}{R(R+z)} dy_0 \\ &= -a\rho \int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi \cos \phi_0}{R(R+z)} d\phi_0 + a^2 \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \phi_0}{R(R+z)} d\phi_0. \end{aligned} \quad (57)$$

Dalam bidang $\phi = 0$ menjadi

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi(\rho, z)}{\partial \rho^2} &= \frac{\partial^2 \Psi(\rho, z)}{\partial x^2} \bigg|_{\phi=0} \\ &= -a\rho \int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi_0}{R(R+z)} d\phi_0 + a^2 \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \phi_0}{R(R+z)} d\phi_0. \end{aligned} \quad (58)$$

Akhirnya dengan menggunakan identitas (44) integral di atas dapat diuraikan menjadi

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi(\rho, z)}{\partial \rho^2} &= - \int_0^{2\pi} \frac{a\rho \cos \phi_0 d\phi_0}{(\rho^2 + a^2 - 2a\rho \cos \phi_0)} \\ &+ \int_0^{2\pi} \frac{zap \cos \phi_0 d\phi_0}{(\rho^2 + a^2 - 2a\rho \cos \phi_0)R} + \int_0^{2\pi} \frac{a^2 \cos^2 \phi_0 d\phi_0}{(\rho^2 + a^2 - 2a\rho \cos \phi_0)} \\ &- \int_0^{2\pi} \frac{za^2 \cos^2 \phi_0 d\phi_0}{(\rho^2 + a^2 - 2a\rho \cos \phi_0)R} \end{aligned} \quad (59)$$

Kita dapat mengevaluasi masing-masing integral di atas sebagai berikut

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{a\rho \cos \phi_0 d\phi_0}{(\rho^2 + a^2 - 2a\rho \cos \phi_0)} &= -\pi + \pi \frac{a^2 + \rho^2}{|a^2 - \rho^2|}, \\ \int_0^{2\pi} \frac{zap \cos \phi_0 d\phi_0}{(\rho^2 + a^2 - 2a\rho \cos \phi_0)R} &= \frac{1}{2} \left\{ -zI_2 + z(\rho^2 + a^2)I_3 \right\}, \\ \int_0^{2\pi} \frac{a^2 \cos^2 \phi_0 d\phi_0}{(\rho^2 + a^2 - 2a\rho \cos \phi_0)} &= \frac{2\pi a^2}{|a^2 - \rho^2|} - \frac{\pi(\rho^2 + a^2)}{2\rho^2} + \frac{\pi(\rho^2 - a^2)^2}{2\rho^2|a^2 - \rho^2|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{za^2 \cos^2 \phi_0 d\phi_0}{(\rho^2 + a^2 - 2a\rho \cos \phi_0)R} &= a^2 I_3 + \frac{z}{4\rho^2} I_1 - \frac{z(\rho^2 + a^2)}{2\rho^2} I_2 \\ &+ \frac{z(\rho^2 - a^2)^2}{4\rho^2} I_3. \end{aligned} \quad (60)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{za^2 \cos^2 \phi_0 d\phi_0}{(\rho^2 + a^2 - 2a\rho \cos \phi_0)R} &= a^2 I_3 + \frac{z}{4\rho^2} I_1 - \frac{z(\rho^2 + a^2)}{2\rho^2} I_2 + \frac{z(\rho^2 - a^2)^2}{4\rho^2} I_3. \end{aligned}$$

Sehingga turunan kedua fungsi potensial terhadap ρ menjadi

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho^2} &= \frac{\pi}{2\rho^2} \left\{ \rho^2 - a^2 + \frac{a^4 - \rho^4}{|a^2 - \rho^2|} \right\} - \frac{z}{4\rho^2} I_1 + \frac{za^2}{2\rho^2} I_2 \\ &- \frac{z(a^4 - \rho^4)}{4\rho^2} I_3. \end{aligned} \quad (61)$$

Masukkan harga-harga I_1, I_2 dan I_3 dalam hal integral eliptis ke dalam persamaan (61) di atas dan dengan menggunakan persamaan (10) menghasilkan

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi(\rho, z)}{\partial \rho^2} &= -\frac{\pi a^2}{\rho^2} - \frac{2z l_2(a)}{\rho^2} E(k) + \frac{2z}{\rho^2 l_2(a)} \{l_2^2(a) - \rho^2\} F(k) \\ &+ \frac{2z(a^2 + \rho^2)}{\rho^2 l_2(a)} \Pi(n, k). \end{aligned} \quad (62)$$

Turunan pertama fungsi potensial terhadap z disini dievaluasi dengan menggunakan metoda Fabrikant. Dari persamaan (29) didapat

$$\frac{\partial \Psi(\rho, z)}{\partial z} = \int_0^a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{R} \rho_0 d\rho_0 d\phi_0 \quad (63)$$

Jarak $1/R$ (seper R) dapat ditulis sebagai

$$\frac{1}{R} = \frac{2}{\pi} \int_0^{l_1(\rho_0)} \frac{1}{[\rho^2 - x^2]^{1/2} [\rho_0^2 - g^2(x)]^{1/2}} \lambda \left(\frac{x^2}{\rho\rho_0}, \phi - \phi_0 \right) dx$$

dimana

$$\begin{aligned} \lambda(k, \omega) &= \frac{1 - k^2}{1 + k^2 - 2k \cos \omega} \\ g^2(x) &= x^2 + \frac{x^2 z^2}{\rho^2 - x^2}. \end{aligned} \quad (64)$$

Substitusi persamaan (64) ke dalam (63) didapat

$$\frac{\partial \Psi(\rho, z)}{\partial z} = 4 \int_0^a \int_0^{l_1(\rho_0)} \frac{dx}{\sqrt{\rho^2 - x^2} \sqrt{\rho_0^2 - g^2(x)}} \rho_0 d\rho_0, \quad (65)$$

kemudian dengan menukar orde integral, persamaan diatas bisa ditulis menjadi

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi(\rho, z)}{\partial z} &= 4 \int_0^{l_1(a)} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - x^2}} \left\{ \int_{g(x)}^a \frac{\rho_0 d\rho_0}{\sqrt{\rho_0^2 - g^2(x)}} \right\} dx \\ &= 4 \int_0^{l_1(a)} \frac{\sqrt{a^2 - g^2(x)}}{\sqrt{\rho^2 - x^2}} dx. \end{aligned} \quad (66)$$

Substitusi fungsi $g(x)$ dan sedikit manipulasi aljabar akhirnya persamaan diatas dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi(\rho, z)}{\partial z} = & 4 \left[l_1^2(a) - \rho^2 \right] \left[l_2^2(a) - \rho^2 \right] \times \\ & \int_0^{l_1(a)} \frac{dx}{(\rho^2 - x^2) \sqrt{l_1^2(a) - x^2} \sqrt{l_2^2(a) - x^2}} \\ & + 4 \left[l_1^2(a) - \rho^2 \right] \int_0^{l_1(a)} \frac{dx}{\sqrt{l_1^2(a) - x^2} \sqrt{l_2^2(a) - x^2}} \\ & + 4 \int_0^{l_1(a)} \frac{\sqrt{l_2^2(a) - x^2}}{\sqrt{l_1^2(a) - x^2}} dx. \end{aligned} \quad (67)$$

Jika integral di atas di evaluasi dengan menggunakan variabel integrasi baru t , dimana $x = l_1(a)t$, kita akan mendapat bentuk akhir dari turunan pertama $\Psi(\rho, z)$ terhadap z sebagai

$$\frac{\partial \Psi(\rho, z)}{\partial z} = \frac{4}{l_2(a)} \left\{ l_2^2(a) E(k) - [\rho^2 - l_1^2(a)] F(k) - z^2 \Pi(n, k) \right\}. \quad (68)$$

Mengingat fungsi potensial adalah fungsi harmonis, turunan kedua $\Psi(\rho, z)$ terhadap z bisa didapat dari

$$\nabla^2 \Psi(\rho, z) = 0; \text{ atau}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi(\rho, z)}{\partial z^2} = - \frac{\partial^2 \Psi(\rho, z)}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi(\rho, z)}{\partial \rho}. \quad (69)$$

Dengan memasukkan harga-harga turunan fungsi potensial terhadap ρ dan sederhanakan hasilnya, kita dapat

$$\frac{\partial^2 \Psi(\rho, z)}{\partial z^2} = \frac{4z}{l_2(a)} [F(k) - \Pi(n, k)]. \quad (70)$$

Selanjutnya kita bisa mengevaluasi turunan silang fungsi potensial sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi(\rho, z)}{\partial \rho \partial z} &= \frac{\partial^2 \Psi(\rho, z)}{\partial x \partial z} \bigg|_{\phi=0} = - \oint_c \frac{1}{R} dy_0 \\ &= \frac{4l_2(a)}{\rho} \{ E(k) - F(k) \}. \end{aligned} \quad (71)$$

Setelah mendapat semua turunan fungsi potensial yang diperlukan, sekarang bisa didapatkan ekspresi untuk perpindahan di dalam setengah ruang dengan memasukkan turunan yang relevan ke dalam persamaan (31-32). Perpindahan dalam bidang $x-y$ didapat

$$\begin{aligned} u^c &= \frac{H\sigma}{\rho} e^{i\phi} \sum_{j=1}^2 \frac{\gamma_j}{(m_j - 1)} \left\{ \pi a^2 + 2z_j l_{2j}(a) E(k_j) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2z_j}{l_{2j}(a)} [\rho^2 + l_{2j}^2(a)] F(k_j) - \frac{2z_j(a^2 - \rho^2)}{l_{2j}(a)} \Pi(n_j, k_j) \right\} \end{aligned} \quad (72)$$

dan perpindahan dalam arah normal didapat

$$w = H\sigma \sum_{j=1}^2 \frac{m_j}{(m_j - 1)} \frac{4}{l_{2j}(a)} \{ l_{2j}^2(a) E(k_j) \}$$

$$- [\rho^2 - l_{1j}^2(a)] F(k_j) - z_j^2 \Pi(n_j, k_j) \}. \quad (73)$$

Komponen tegangan di dalam setengah ruang juga didapat dengan mensubstitusi turunan fungsi potensial yang diperlukan ke dalam persamaan-persamaan (33), (35) dan (37). Hasilnya adalah

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 8H\sigma A_{66} \sum_{j=1}^2 \frac{\gamma_j^2 - (1+m_j)\gamma_3^2}{\gamma_j(m_j - 1)} \frac{z_j}{l_{2j}(a)} \{ F(k_j) - \Pi(n_j, k_j) \} \\ \sigma_2 &= 4H\sigma A_{66} \frac{e^{i2\phi}}{\rho^2} \sum_{j=1}^2 \frac{\gamma_j}{(m_j - 1)} \left\{ -\pi a^2 - 2z_j l_{2j}(a) E(k_j) \right. \\ &\quad \left. + 2z_j l_{2j}(a) F(k_j) + \frac{2z_j a^2}{l_{2j}(a)} \Pi(n_j, k_j) \right\}, \end{aligned} \quad (74)$$

$$\sigma_z = \frac{2\sigma}{\pi(\gamma_1 - \gamma_2)} \sum_{j=1}^2 \gamma_j (-1)^{j+1} \frac{z_j}{l_{2j}(a)} \{ F(k_j) - \Pi(n_j, k_j) \}$$

$$\tau_z = \frac{2\sigma}{\pi\rho(\gamma_1 - \gamma_2)} e^{i\phi} \sum_{j=1}^2 (-1)^j l_{2j}(a) \{ F(k_j) - E(k_j) \}.$$

Perlu dicatat bahwa di dalam persamaan-persamaan di atas, parameter $l_{1j}(a)$, $l_{2j}(a)$, k_j dan n_j adalah sama dengan yang didefinisikan di bagian 2 dengan variabel z diganti oleh z_j , dimana $z = \gamma_j z_j$.

Persamaan-persamaan (72-73) untuk perpindahan dan (74) untuk tegangan adalah merupakan solusi eksak yang lengkap untuk setengah ruang isotropi melintang yang mendapat beban normal merata dalam lingkaran di permukaanya.

7. Solusi Elastis Untuk Setengah Ruang Isotropi

Perpindahan dan tegangan untuk setengah ruang isotropi didapat dengan mengambil limit isotropi dari solusi isotropi melintang. Hal ini diperlukan mengingat bahwa untuk material isotropi, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, m_1, m_2 \rightarrow 1$, sehingga ekspresi perpindahan dan tegangan pada persamaan (72-74) akan menjadi tak berhingga.

Limit isotropi yang diperlukan dapat di ekstrak dari makalah oleh Hanson (1992) sebagai berikut

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 \frac{\gamma_j}{(m_j - 1)} f(z_j) &= - \frac{(1-2\nu)f(z) + zf'(z)}{2(1-\nu)}, \\ \sum_{j=1}^2 \frac{m_j}{(m_j - 1)} f(z_j) &= f(z) - \frac{z}{2(1-\nu)} f'(z), \\ \sum_{j=1}^2 \frac{\gamma_j^2 - (1+m_j)\gamma_3^2}{\gamma_j(m_j - 1)} f(z_j) &= \frac{(1+2\nu)f(z) + zf'(z)}{2(1-\nu)}, \\ \frac{1}{(\gamma_1 - \gamma_2)} \sum_{j=1}^2 \gamma_j (-1)^j f(z_j) &= -f(z) + zf'(z), \\ \frac{1}{(\gamma_1 - \gamma_2)} \sum_{j=1}^2 \gamma_j (-1)^{j+1} f(z_j) &= -zf'(z), \end{aligned} \quad (75)$$

dan

$$H = \frac{1-\nu^2}{\pi E}, \quad A_{66} = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

dimana $f'(z)$ adalah turunan pertama $f(z)$ terhadap z , E adalah modulus Young dan ν adalah Poisson ratio. Dengan menggunakan limit (75) di atas sekarang kita bisa menurunkan medan elastis untuk setengah ruang isotropi dari persamaan (31-33), (35) dan (37). Hasil yang didapat dalam hal fungsi potensial adalah

$$\begin{aligned} u^c &= -\frac{e^{\phi}\sigma}{4\pi\mu} \left\{ (1-2\nu) \frac{\partial}{\partial \rho} \Psi(\rho, z) + z \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial z} \Psi(\rho, z) \right\}, \\ w &= \frac{\sigma(1-\nu)}{2\pi\mu} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \Psi(\rho, z) - \frac{z}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Psi(\rho, z) \right\}, \\ \sigma_1 &= \frac{\sigma}{2\pi} \left\{ (1+2\nu) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Psi(\rho, z) + z \frac{\partial^3}{\partial z^3} \Psi(\rho, z) \right\}, \\ \sigma_2 &= -\frac{\sigma}{2\pi} \left\{ (1-2\nu) \Lambda^2 \Psi(\rho, z) + z \Lambda^2 \frac{\partial}{\partial z} \Psi(\rho, z) \right\}, \\ \sigma_{xx} &= \frac{\sigma}{2\pi} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Psi(\rho, z) - z \frac{\partial^3}{\partial z^3} \Psi(\rho, z) \right\}, \\ \tau_z &= -\frac{e^{\phi}\sigma}{2\pi} z \frac{\partial^3}{\partial \rho \partial z^2} \Psi(\rho, z). \end{aligned} \quad (76)$$

Representasi daerah elastis di atas adalah dalam persetujuan yang eksak dengan hasil yang diperoleh Love (1929). Dimana sekarang kita menggunakan $\sigma \Psi(\rho, z)$ untuk fungsi χ , sedangkan fungsi V identik dengan $\sigma \{\partial \Psi / \partial z\}$.

Persamaan (76) menunjukkan bahwa untuk menganalisa perpindahan dan tegangan diperlukan beberapa turunan fungsi potensial tambahan. Turunan tersebut dievaluasi sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3}{\partial \rho \partial z^2} \Psi(\rho, z) &= \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{4l_2(a)}{\rho} [E(k) - F(k)] \right\} \\ &= \frac{4z}{\rho l_2(a)(1-k^2)} \left\{ -F(k) + \frac{1+k^2}{1-k^2} E(k) \right\} \\ \frac{\partial^3}{\partial \rho^2 \partial z} \Psi(\rho, z) &= \frac{4(l_2^2(a) - \rho^2)}{\rho l_2(a)(1-k^2)} \{F(k) - E(k)\} \\ &\quad - \frac{4k(a - 2\rho k + ak^2)}{\rho l_2(a)(1-k^2)^2} E(k) \\ \frac{\partial^3}{\partial z^3} \Psi(\rho, z) &= -\frac{\partial^3}{\partial z \partial \rho^2} \Psi(\rho, z) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \rho} \Psi(\rho, z) \\ &= \frac{4(l_2^2(a) - a^2)}{l_2^3(a)(1-k^2)} F(k) - \frac{4(\rho^2 + z^2 - a^2)}{l_2^3(a)(1-k^2)^2} E(k). \end{aligned} \quad (77)$$

Selanjutnya solusi yang lengkap didapat dengan mensubstitusi semua turunan fungsi potensial yang relevan ke dalam persamaan (76). Hasilnya adalah

$$\begin{aligned} u^c &= -\frac{\sigma e^{\phi}}{4\pi\mu\rho} \left\{ (1-2\nu)\pi a^2 + 2(3-2\nu)z l_2(a) E(k) \right. \\ &\quad - \frac{2z}{l_2(a)} [2l_2^2(a) + (1-2\nu)(\rho^2 + l_2^2(a))] F(k) \\ &\quad \left. - \frac{2z(1-2\nu)(a^2 - \rho^2)}{l_2(a)} \Pi(n, k) \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w &= \frac{\sigma}{2\pi\mu l_2(a)} \left\{ 4(1-\nu) l_2^2(a) E(k) - [4(1-\nu)(\rho^2 - l_1^2(a)) \right. \\ &\quad \left. + 2z^2] F(k) - 2z^2(1-2\nu) \Pi(n, k) \right\}, \\ \sigma_1 &= \frac{2z\sigma}{\pi} \left\{ -\frac{\rho^2 + z^2 - a^2}{l_2^2(a)(1-k^2)^2} E(k) \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{(l_2^2(a) - a^2)}{l_2^2(a)(1-k^2)} + \frac{(1+2\nu)}{l_2(a)} \right] F(k) - \frac{(1+2\nu)}{l_2(a)} \Pi(n, k) \right\}, \\ \sigma_{xx} &= \frac{2z\sigma}{\pi} \left\{ \frac{[\rho^2 + z^2 - a^2]}{l_2^2(a)(1-k^2)^2} E(k) + \frac{(a^2 - l_1^2(a))}{l_2^2(a)(1-k^2)} F(k) - \frac{1}{l_2(a)} \Pi(n, k) \right\}, \\ \tau_z &= \frac{2\sigma z^2 e^{\phi}}{\pi \rho l_2(a)(1-k^2)} \left[F(k) - \frac{1+k^2}{1-k^2} E(k) \right], \\ \sigma_2 &= -\frac{\sigma e^{\phi/2}}{\pi \rho^2} \left\{ -(1-2\nu)\pi a^2 \right. \\ &\quad + \frac{2z}{l_2(a)(1-k^2)} [2l_2^2(a) - l_1^2(a) F(k) \\ &\quad - \rho^2 + (1-2\nu)(1-k^2) l_2^2(a)] F(k) \\ &\quad - \frac{2z}{l_2(a)(1-k^2)^2} [(1-2\nu)(1-k^2)^2 l_2^2(a) + 2l_2^2(a) \\ &\quad \left. - 2(1-k^2) l_1^2(a) - \rho^2(1+k^2)] E(k) + \frac{2za^2(1-2\nu)}{l_2(a)} \Pi(n, k) \right\}. \end{aligned} \quad (78)$$

8. Solusi Elastis di Permukaan

Pada bagian sebelumnya telah dibahas perpindahan dan tegangan untuk titik yang umum di dalam setengah ruang. Perlu diperhatikan bahwa pada saat $z \rightarrow 0$ untuk $\rho < a$ ($n \rightarrow 1$) integral eliptis jenis ketiga akan menuju tak berhingga. Akan tetapi semua ekspresi yang mengandung integral eliptis jenis ketiga, integral tersebut selalu dikalikan dengan z yang juga menuju nol. Bagian ini akan membahas hal tersebut.

Dengan mengambil limit terhadap persamaan (1) didapat

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} l_1(a) &= \frac{1}{2} \{ (a + \rho) - |a - \rho| \} = \min(a, \rho), \\ \lim_{z \rightarrow 0} l_2(a) &= \frac{1}{2} \{ (a + \rho) + |a - \rho| \} = \max(a, \rho), \end{aligned} \quad (79)$$

dimana min adalah nilai minimum dan max adalah nilai maximum antara a dan ρ . Dengan menggunakan hasil diatas nilai k dan n menjadi

$$\begin{aligned} k &= \frac{\rho}{a}, \quad \rho < a; \quad k = \frac{a}{\rho}, \quad \rho > a, \\ n &= 1, \quad \rho \geq a; \quad k = \frac{a^2}{\rho^2}, \quad \rho > a. \end{aligned} \quad (80)$$

Jika $z \rightarrow 0$, harga integral eliptis jenis pertama dan kedua akan menuju nilai tertentu, sehingga kita hanya perlu mengambil limit untuk integral eliptis jenis ketiga yang nilainya menuju tak berhingga. Karena integral eliptis jenis ketiga selalu dikalikan dengan z , limit yang diperlukan adalah

$$\lim_{z \rightarrow 0} z \Pi(n, k) = \frac{\pi l_2(a)}{8\rho^2} \left\{ 2\rho^2 - |a^2 - \rho^2| + \frac{(a^4 - \rho^4)}{|a^2 - \rho^2|} \right\}$$

$$= \begin{cases} \frac{\pi a}{2} & , \quad \rho < a \\ 0 & , \quad \rho > a \end{cases} \quad (81)$$

Pertimbangan lain yang perlu adalah bahwa ekspresi daerah elastis untuk isotropi melintang ditulis dalam bentuk penjumlahan $j=1,2$. Pada saat $z \rightarrow 0$, $z_j \rightarrow 0$ sehingga bagian yang dijumlahkan hanyalah konstanta elastis. Dengan demikian penjumlahan tersebut dapat disederhanakan menjadi

$$\sum_{j=1}^2 \frac{\gamma_j}{(m_j - 1)} = -\gamma_1 \gamma_2 \sum_{j=1}^2 \frac{m_j}{\gamma_j (m_j - 1)} = -\alpha$$

$$\sum_{j=1}^2 \frac{m_j}{(m_j - 1)} = -\sum_{j=1}^2 \frac{1}{(m_j - 1)} = 1$$

$$\sum_{j=1}^2 \frac{(m_j + 1)}{\gamma_j (m_j - 1)} = \frac{-1}{2\pi H A_{44} \gamma_1 \gamma_2} \quad (82)$$

dimana kita menggunakan relasi $m_1 m_2 = 1$ dan α didefinisikan sebagai

$$\alpha = \frac{(A_{11} A_{33})^{\frac{1}{2}} - A_{13}}{A_{11}(\gamma_1 + \gamma_2)} \quad (83)$$

Dengan menggunakan hasil analisis di atas, perpindahan dan tegangan yang terjadi di permukaan setengah ruang isotropi melintang yang mendapat beban normal merata dalam lingkaran adalah sebagai berikut

$$u^c = -H\alpha\pi\sigma(x + iy) \quad , \quad \rho < a \quad ;$$

$$u^c = -H\alpha\pi\sigma(x + iy) \frac{a^2}{\rho^2} \quad , \quad \rho > a \quad ,$$

$$w = 4\sigma H a E \left(\frac{\rho}{a} \right) \quad , \quad \rho < a \quad ;$$

$$w = \frac{4H\sigma}{\rho} \left[\rho^2 E \left(\frac{a}{\rho} \right) - (\rho^2 - a^2) F \left(\frac{a}{\rho} \right) \right] \quad , \quad \rho > a \quad ,$$

$$\sigma_1 = \frac{2\sigma}{\gamma_1 \gamma_2} \{ -1 + (G_1 - G_2) \pi A_{66} \alpha \} \quad , \quad \rho < a \quad ;$$

$$\sigma_1 = 0 \quad , \quad \rho > a \quad , \quad \sigma_2 = 0 \quad , \quad \rho < a \quad ; \quad (84)$$

$$\sigma_2 = 4H\alpha\pi\sigma A_{66} e^{i2\phi} \frac{a^2}{\rho^2} \quad , \quad \rho > a \quad ,$$

$$\sigma_{zz} = -\sigma \quad , \quad \rho < a \quad ; \quad \sigma_{zz} = 0 \quad , \quad \rho > a \quad ,$$

$$\tau_z = 0 \quad , \quad \rho < a \quad ; \quad \tau_z = 0 \quad , \quad \rho > a \quad ,$$

dimana

$$\beta = \frac{\gamma_3}{2\pi A_{44}} \quad , \quad G_1 = \beta + \gamma_1 \gamma_2 H \quad , \quad G_2 = \beta - \gamma_1 \gamma_2 H \quad .$$

Disini perlu dicatat bahwa tegangan yang berharga nol dan $-\sigma$ yang diberikan oleh persamaan (84) adalah persis sama dengan kondisi batas di permukaan.

9. Solusi Elastis Sepanjang Sumbu z

Kalau kita perhatikan ekspresi untuk tegangan dan perpindahan, baik untuk setengah ruang isotropi melintang atau isotropi terlihat sepintas bahwa pada sumbu z ($\rho = 0$) tegangan dan perpindahan akan menuju tak berhingga mengingat semua ekspresi mengandung jari-jari ρ sebagai pembagi. Akan tetapi perlu diketahui parameter-parameter geometri juga merupakan fungsi dari ρ . Untuk itu di bagian ini akan diturunkan perpindahan dan tegangan yang terjadi di sumbu z secara analitis. Dengan menggunakan teori ekspansi binomial (Abramowitz, 1972) kita dapat mengekspansi

$$l_1(a) = \frac{a}{(a^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \rho - \frac{1}{2} \frac{az^2}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \rho^3 + O(\rho^5) \quad ,$$

$$\frac{1}{l_2(a)} = \frac{1}{(a^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2} \frac{z^2}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \rho^2 + O(\rho^4) \quad ,$$

$$k = \frac{a}{a^2 + z^2} \rho - \frac{1}{2} \frac{az^2}{(a^2 + z^2)^3} \rho^3 + O(\rho^5) \quad ,$$

$$n = \frac{a}{a^2 + z^2} - \frac{a^2 z^2}{(a^2 + z^2)^3} \rho^2 + O(\rho^4) \quad , \quad (85)$$

$$(1-n)^{-\frac{1}{2}} = \frac{(a^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}{z} - \frac{1}{2} \frac{a^2}{z(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \rho^2 + O(\rho^4) \quad ,$$

$$E(k) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi a^2}{8(a^2 + z^2)^2} \rho^2 + O(\rho^4) \quad ,$$

$$F(k) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi a^2}{8(a^2 + z^2)^2} \rho^2 + O(\rho^4) \quad ,$$

$$\Pi(n, k) = \frac{\pi(a^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}{2z} + \frac{\pi[z - (a^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}]}{4(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \rho^2 + O(\rho^4) \quad .$$

Kemudian dengan menggunakan hasil ekspansi di atas, solusi elastis sepanjang sumbu z didapat

$$u^c = \sigma_z = \tau_z = 0 \quad ,$$

$$w = 2\pi H \sigma \sum_{j=1}^2 \frac{m_j}{(m_j - 1)} \left\{ (a^2 + z_j^2)^{\frac{1}{2}} - z_j \right\} \quad ,$$

$$\sigma_1 = 4\pi H \sigma A_{66} \sum_{j=1}^2 \frac{\gamma_j^2 - (1 + m_j) \gamma_j^2}{(m_j - 1) \gamma_j} \left\{ \frac{z_j}{(a^2 + z_j^2)^{\frac{1}{2}}} - 1 \right\} \quad ,$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\sigma}{(\gamma_1 - \gamma_2)} \sum_{j=1}^2 \gamma_j (-1)^{j+1} \left\{ \frac{z_j}{(a^2 + z_j^2)^{\frac{1}{2}}} - 1 \right\} \quad (86)$$

10. Kesimpulan dan Diskusi

Tegangan dan perpindahan yang terjadi di dalam setengah ruang isotropi melintang yang mendapat beban merata dalam lingkaran di permukaannya telah di evaluasi secara analitis. Solusi elastis di turunkan secara eksak dalam bentuk yang mengandung integral eliptis lengkap jenis pertama, kedua dan ketiga. Solusi untuk setengah ruang isotropi sebelumnya sudah di evaluasi oleh Love (1929). Akan tetapi Love tidak

mendapat solusi yang lengkap karena pada saat itu integral eliptis lengkap jenis ketiga belum ditemukan. Di dalam makalah ini solusi yang lengkap untuk setengah ruang isotropi didapat dengan mengambil limit isotropi dari solusi isotropi melintang. Perlu dicatat bahwa solusi untuk setengah ruang isotropi melintang adalah baru karena belum pernah ada yang mempublikasikan sebelumnya. Di dalam solusi yang sekarang kita juga menganalisa secara eksak perpindahan dan tegangan yang terjadi sepanjang sumbu z dan di permukaan setengah ruang.

Perlu diketahui bahwa problem ini juga bisa dipecahkan dengan menggunakan metoda transformasi Hankel (Hankel Transform). Inverse Hankel transform yang muncul jika kita menggunakan transformasi Hankel dapat dievaluasi dengan menggunakan hasil yang didapat oleh Eason et al. (1955). Disitu mereka mengevaluasi beberapa jenis integral Lipschitz-Hankel yang mengandung fungsi Bessel. Hanya sayangnya hasil yang didapat oleh Eason et al. sangat kompleks. Dengan menggunakan parameter dan hasil yang didapat disini tampaknya hasil yang didapat Eason et al. akan dapat ditulis dalam bentuk yang lebih kompak sehingga dapat diaplikasikan dengan mudah di bidang engineering.

Sumber dana :

Dana Penelitian yang didasari artikel ini adalah melalui dana "Medan Tegangan dan Deformasi Elastis Untuk Masalah Mekanika Kontak dan Crack Tiga Dimensi Pada Bahan Keramik" tahun anggaran 1997/1998 dengan kontrak No.20/PPIPD/DPPM/97/PPIPD/1997, yang dikelola oleh Dit Binlitabmas Ditjen Dikti, Depdikbud.

Daftar Pustaka

1. Abramowitz, Milton and Stegun, Irene A., 1972, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, New York.
2. Amazigo, John C., 1980, *Advanced Calculus and Its Applications to the Engineering and Physical Sciences*, John Wiley and Sons, New York.
3. Boussinesq, J., 1885, *Application des Potentiels*, Gauthier-Villars.
4. Eason, G., Noble, B. and Sneddon, I. N., 1955, "On Certain Integrals of Lipschitz-Hankel Type Involving Products of Bessel Functions", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Vol. A247, pp. 529-551.
5. Elliot, H. A., 1948, "Three-Dimensional Stress Distributions in Hexagonal Aeolotropic Crystals", *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 44, pp. 522-533.
6. Fabrikant, V. I., 1989, *Application of Potential Theory in Mechanics : A Selection of a New Results*, Kluwer Academic, The Netherlands.
7. Gradshteyn, I. S. and Ryzik, I. M., 1980, *Table of Integrals, Series, and Products* (translated by A. Jeffry), Academic Press, London.
8. Hanson, M. T., 1992, "The Elastic Field for Conical Indentation Including Sliding Friction for Transverse Isotropy", *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 59, pp. 123-130.
9. Hanson, M. T., Puja, I. W., 1996, "Love's Circular Patch Problem Revisited : Closed Form Solutions for Transverse Isotropy and Shear Loading", *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 54, No. 2, pp. 359-384.
10. Hanson, M. T., Puja, I. W., 1998, "Elastic Subsurface Stress Analysis for Circular Foundations I", *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 124, No. 5, pp. 537-546.
11. Daniel, I.M, and Ishai, O., 1994, *Engineering Mechanics of Composite Materials*, Oxford University Press
12. Karapetian, E.N., and Hanson, M.T., 1994, "Crack Opening Displacements and Stress Intensity Factors Caused by a Concentrated Load Outside a Circular Crack", *International Journal of Solid and Structures*, Vol 31, No. 15, pp. 2035-2052.
13. Lamb, H., 1902, "On Boussinesq's Problem", *London Mathematical Society Proceedings*, Vol. 34, pp. 276-284.
14. Love, A. E. H., 1929, The Stress Produced in a Semi-Infinite Solid by Pressure on Part of the Boundary", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Vol. A228, pp. 377-420.
15. Podil'chuk, Yu.N. and Tkachenko, V.F, 1996, "Stress State of Transversely Isotropic Medium with a Parabolic Crack Under a Linearly Varying Shear Load", *International Applied Mechanics*, Vol. 31, No. 5, pp. 338-345.
16. Terazawa, K. (1916) *Jur. Coll. Sci. Imp. Univ. Tokyo*, Vol. 37, Art. 7.
17. Urgural, A. C. and Fenster, S. K., 1975, *Advanced Strength and Applied Elasticity*, Elsevier, New York.