

ANALISIS NUMERIK KONVEKSI ALAMI DALAM ANNULUS KONSENTRIK DENGAN METODE ARTIFICIAL COMPRESSIBILITY

Pranowo

Fakultas Teknologi Industri, Universitas Atma Jaya Yogyakarta
Jl. Babarsari 43 Yogyakarta 55281

Ringkasan

Paper ini membahas penyelesaian numerik konveksi alami dalam annulus konsentrik. Metode artificial compressibility digunakan untuk menyelesaikan persamaan Navier Stokes. Untuk memperkuat hubungan antara tekanan dan kecepatan, tekanan ditempatkan di pusat sel, sedangkan kecepatan dan temperatur diletakkan pada pojok sel. Persamaan Navier Stokes dipecah dalam bentuk diskrit dengan metode volume hingga, sehingga konservasi aliran tetap terjaga. Perbandingan dengan hasil penelitian lainnya menunjukkan kesesuaian yang sangat baik.

Abstract

This paper discusses numerical solution of natural convection in concentric annulus. Artificial Compressibility Method has been used to solve two dimensional Navier Stokes equations. And to strengthen the relationship between pressure and velocities, pressure was placed on the cell center, whereas the velocities and temperature were placed on cell vertex. Navier Stokes Equations were divided into discrete forms by finite volume method, so that flow conservation could be kept balance. The computation results show no significant difference with the other results solved using other computation method.

Keywords : natural convection, artificial compressibility method, finite volume method.

1. PENDAHULUAN

Konveksi alami dalam annulus memegang peranan penting dalam aplikasi rekayasa, sehingga menarik banyak peneliti untuk melakukan penelitian secara eksperimen maupun secara teoritis/numeris. Holland dan Raithby [1] melakukan eksperimen dan memperoleh rumus korelasi untuk menghitung koefisien perpindahan panas. Dengan berkembangnya komputer digital berkecepatan tinggi, penelitian numerik semakin intensif dilakukan. Penelitian numerik bertujuan untuk mengembangkan suatu metode numerik yang dapat memprediksikan fenomena konveksi alami dengan akurat dan hemat biaya. Hasil eksperimen digunakan sebagai validasi metode numerik.

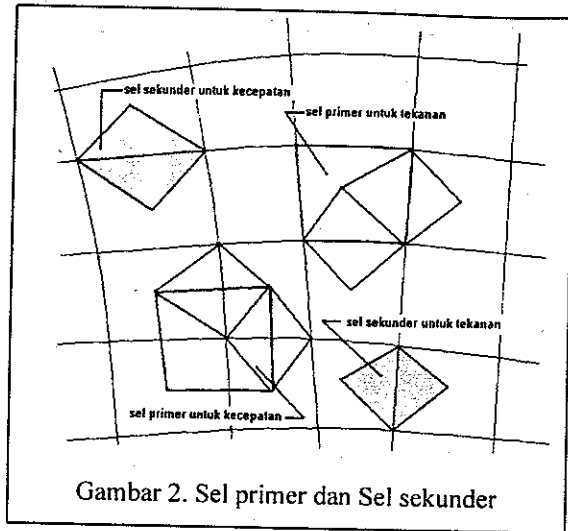
Kebanyakan penelitian numerik konveksi alami dilakukan dengan menggunakan variabel : *vorticity*, *stream function* dan temperatur. Dengan menggunakan variabel tersebut, suku tekanan dapat dihilangkan, sehingga perhitungan dapat dilakukan dengan mudah. Lee [2] menggunakan diskritisasi Benda Hingga dan menyelesaikannya dengan metode *Alternating Direct Implicit* (ADI). Shu dan Chew [3] menggunakan diskritisasi *Fourier Differential Quadrature* (FDQ), sedangkan Yau dkk [4] menggunakan *Generalized Differential Quadrature* (GDQ). Akurasi dari metode FDQ dan GDQ sangat baik, meskipun jumlah grid yang dipakai relatif sedikit. Tetapi kelemahan dari diskritisasi Benda hingga, FDQ dan GDQ seperti di atas adalah persamaan atur harus ditransformasi dulu ke dalam koordinat polar. Napolitano dan Quartapelle [5]

mentransformasikan persamaan atur ke dalam *body fitted coordinates*. Diskritisasi yang dipakai adalah Benda Hingga, dan sistem persamaan aljabar yang terbentuk kemudian diselesaikan secara simultan dengan Block ADI. Dengan Block ADI, perhitungan dapat dengan cepat mencapai konvergen. Penggunaan *body fitted coordinates* lebih fleksibel, karena dapat digunakan untuk domain yang relatif lebih kompleks.

Kelemahan pemakaian variabel *vorticity* dan *stream function* adalah : penentuan syarat batas tidak mudah dan pengembangan ke permasalahan 3 dimensi sangat sulit dilakukan. Untuk itu pemakaian variabel primitif (kecepatan, tekanan dan temperatur) terus dikembangkan. Kesulitan utama pemakaian variabel primitif adalah : variabel tekanan tidak terhubung langsung dengan variabel lainnya. Sehingga medan tekanan sulit untuk dihitung. Gartling dan Nickell [6] menggunakan diskritisasi Elemen Hingga. Sistem persamaan aljabar yang terbentuk, diselesaikan secara simultan menggunakan iterasi Newton-Raphson. Matriks yang digunakan Gartling berukuran relatif besar, sehingga memboroskan memori komputer. Gartling & Nickell menggunakan fungsi interpolasi kuadratik untuk kecepatan dan linear untuk tekanan. Penggunaan fungsi interpolasi yang berbeda ini bertujuan untuk menghilangkan *Spurious Pressure Mode*. Reddy [7] menggunakan *Penalty Function* dengan diskritisasi Elemen Hingga. Metode yang dipakai Reddy lebih sederhana dibanding dengan metodenya Gartling, tetapi penentuan nilai dari *Penalty Function* tidak mudah dilakukan.

Pulicani dan Ouzzanni [8] menggunakan metode *pseudo spectral* untuk menganalisis konveksi alami dalam silinder 3 dimensi. Persamaan atur ditransformasi ke dalam koordinat silinder. Dan untuk mengatasi kesulitan yang berhubungan dengan tekanan, Pulicani menggunakan metode *artificial compressibility*. Dengan metode ini, turunan tekanan terhadap waktu dihubungkan langsung dengan kecepatan (kekalan massa). Metode ini akan memberikan jawaban yang benar jika, perhitungan sudah mencapai konvergen. Sebelum mencapai konvergen, hasil perhitungan tidak mempunyai arti fisis. Dengan demikian metode ini, hanya sesuai untuk permasalahan yang tidak tergantung waktu (*steady*).

Mengacu pada Pulicani dan Ouzzanni, metode *artificial compressibility* dikembangkan untuk menyelesaikan konveksi alami dalam annulus konsentrik 2 dimensi dengan diskritisasi volume hingga. Volume hingga dapat digunakan untuk domain yang berbentuk kompleks. Sistem grid yang dipakai volume hingga dapat berupa grid berstruktur (*structured grid*) maupun grid tidak berstruktur (*unstructured grid*) [9]. Grid berstruktur pada umumnya dipakai oleh metode beda hingga, dengan grid ini penyimpanan matriks dapat efisien sehingga hemat memory., selain itu penyusunan kode juga lebih mudah dilakukan. Sedangkan grid tidak berstruktur dipakai pada metode elemen hingga. Dengan grid ini, matriks yang ada berupa matriks jarang (*sparse matrix*), sehingga boros pemakaian memory. Keunggulan grid tidak berstruktur ini adalah mampu dipakai untuk domain yang sangat kompleks. Pada paper ini, grid yang dipakai adalah grid berstruktur karena keterbatasan memory PC yang digunakan dan bentuk domain tidak terlalu kompleks. Sel yang digunakan berbentuk segi empat sembarang. Untuk mengurangi efek spurious pressure mode, variabel tekanan diletakkan pada pusat sel (*cell center*) dan variabel kecepatan diletakkan pada pojok sel (*cell vertex*). Pemakaian staggered grid seperti ini juga dipakai oleh Benson dan Kim [10], untuk menganalisis aliran hidrodinamik *unsteady* melewati silinder.



Gambar 2. Sel primer dan Sel sekunder

2. PERSAMAAN ATUR DAN SYARAT BATAS

2.1. Persamaan Atur

Jika perbedaan temperatur yang terjadi kecil, maka pendekatan Boussinesq berlaku dengan demikian persamaan Navier Stokes dua dimensi dapat ditulis seperti berikut [11] :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{Pr}{Ra^{0.5}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{Pr}{Ra^{0.5}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + Pr \theta \quad (3)$$

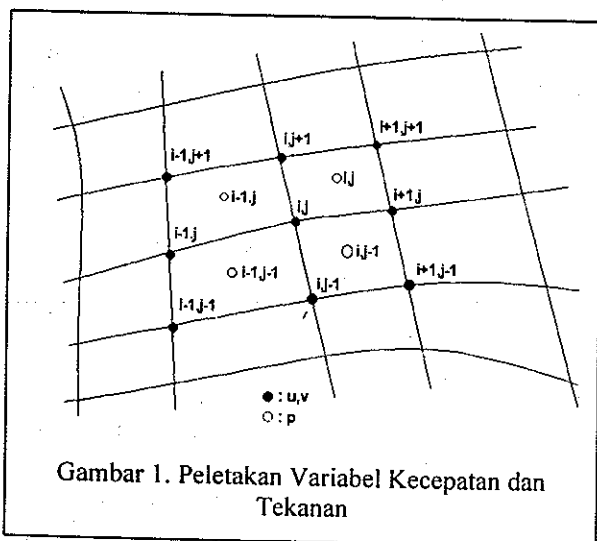
$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Ra^{0.5}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \quad (4)$$

Persamaan di atas diperoleh dengan membagi variabel berdimensi dengan variabel referensi. Variabel referensi untuk panjang adalah $L_r = L$, untuk kecepatan $V_r = (\alpha/L) Ra^{0.5}$, untuk variabel waktu $t_r = (L^2/\alpha) Ra^{-0.5}$ dan untuk temperatur (θ) didefinisikan seperti berikut : $(T - T_r)/(T_h - T_c)$ dan $T_r = (T_h + T_c)/2$

Dengan metode *Artificial Compressibility* persamaan (1) diubah menjadi :

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \beta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (5)$$

Variabel waktu pada tekanan di atas merupakan variabel tiruan, karena persamaan di atas sebenarnya hanya berlaku untuk *compressible flow*, sedangkan β merupakan faktor kompresibilitas tiruan dan nilainya konstan. Dengan demikian penyelesaian transien sistem persamaan tidak mempunyai arti fisis, hanya kondisi *steady* yang mempunyai arti fisis.



Gambar 1. Peletakan Variabel Kecepatan dan Tekanan

Dengan Volume Hingga persamaan Navier Stokes ditulis dalam bentuk integral menggunakan teorema Gauss :

$$\Omega \frac{\partial p}{\partial t} + \beta \oint (u dy - v dx) = 0 \quad (6)$$

$$\Omega \frac{\partial u}{\partial t} + \oint (u u dy - u v dx) = - \oint p dy + \frac{1}{Ra^{0.5}} \left(\oint \left(\frac{1}{\Omega} \oint u dx \right) dx + \oint \left(\frac{1}{\Omega} \oint u dy \right) dy \right) \quad (7)$$

$$\Omega \frac{\partial v}{\partial t} + \oint (u v dy - v v dx) = \oint p dx + \Omega Pr \theta + \frac{Pr}{Ra^{0.5}} \left(\oint \left(\frac{1}{\Omega} \oint v dx \right) dx + \oint \left(\frac{1}{\Omega} \oint v dy \right) dy \right) \quad (8)$$

$$\Omega \frac{\partial \theta}{\partial t} + \oint (u \theta dy - v \theta dx) = \frac{1}{Ra^{0.5}} \left(\oint \left(\frac{1}{\Omega} \oint \theta dx \right) dx + \oint \left(\frac{1}{\Omega} \oint \theta dy \right) dy \right) \quad (9)$$

dalam bentuk diskrit menjadi [12] :

$$\Omega_{pm} \frac{\partial p}{\partial t} + \beta \sum_{m=1}^4 (u_m \Delta y_m - v_m \Delta x_m) = 0 \quad (10)$$

$$\Omega_{pm} \frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} + \sum_{k=1}^4 ((uu)_k \Delta y_k - (uv)_k \Delta x_k) = - \sum_{k=1}^4 p_k \Delta y_k + \frac{Pr}{Ra^{0.5}} \left(\sum_{k=1}^4 \frac{1}{\Omega_{sm}} \left(\sum_{l=1}^4 u_l \Delta y_l \right) \Delta y_k + \sum_{k=1}^4 \frac{1}{\Omega_{sm}} \left(\sum_{l=1}^4 u_l \Delta x_l \right) \Delta x_k \right) \quad (11)$$

$$\Omega_{pm} \frac{\partial v_{i,j}}{\partial t} + \sum_{k=1}^4 ((uv)_k \Delta y_k - (vv)_k \Delta x_k) = \sum_{k=1}^4 p_k \Delta x_k + \frac{Pr}{Ra^{0.5}} \left(\sum_{k=1}^4 \frac{1}{\Omega_{sm}} \left(\sum_{l=1}^4 v_l \Delta y_l \right) \Delta y_k + \sum_{k=1}^4 \frac{1}{\Omega_{sm}} \left(\sum_{l=1}^4 v_l \Delta x_l \right) \Delta x_k \right) + \Omega_p Pr \theta \quad (12)$$

$$\Omega_{pm} \frac{\partial \theta_{i,j}}{\partial t} + \sum_{k=1}^4 ((u\theta)_k \Delta y_k - (v\theta)_k \Delta x_k) = \frac{1}{Ra^{0.5}} \left(\sum_{k=1}^4 \frac{1}{\Omega_{sm}} \left(\sum_{l=1}^4 \theta_l \Delta y_l \right) \Delta y_k + \sum_{k=1}^4 \frac{1}{\Omega_{sm}} \left(\sum_{l=1}^4 \theta_l \Delta x_l \right) \Delta x_k \right) \quad (13)$$

2.1. Syarat Batas

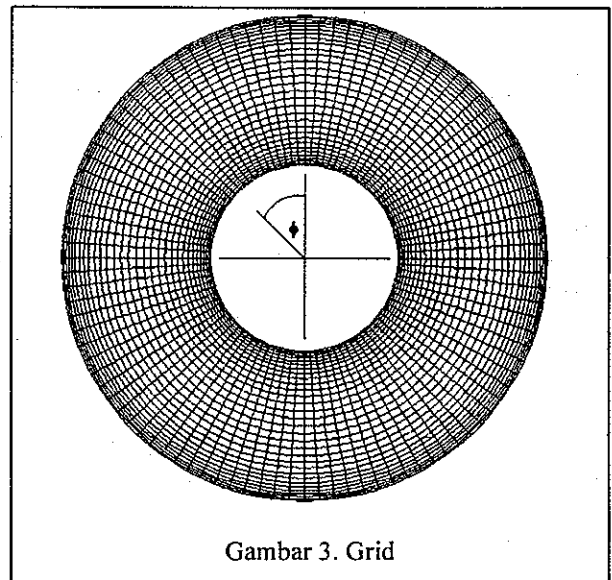
Grid yang digunakan berbentuk lingkaran konsentrik dengan jari-jari dalam = 0,625 dan jari-jari luar = 1,625. Grid dirapatkan pada permukaan dinding untuk menangkap fenomena lapisan batas.

Syarat batas yang digunakan adalah seperti berikut :

- Permukaan dinding dalam (*inner cylinder*).
Kecepatan (u,v) bernilai nol (*no slip condition*), $\theta=0,5$
- Permukaan dinding luar (*outer cylinder*).
Kecepatan (u,v) bernilai nol, $\theta=-0,5$

Karena tekanan diletakkan pada tengah sel, maka syarat batas untuk tekanan tidak ada.

Sebagai syarat awal, u,v,p dan θ bernilai nol.



Gambar 3. Grid

3. ALGORITMA PENYELESAIAN

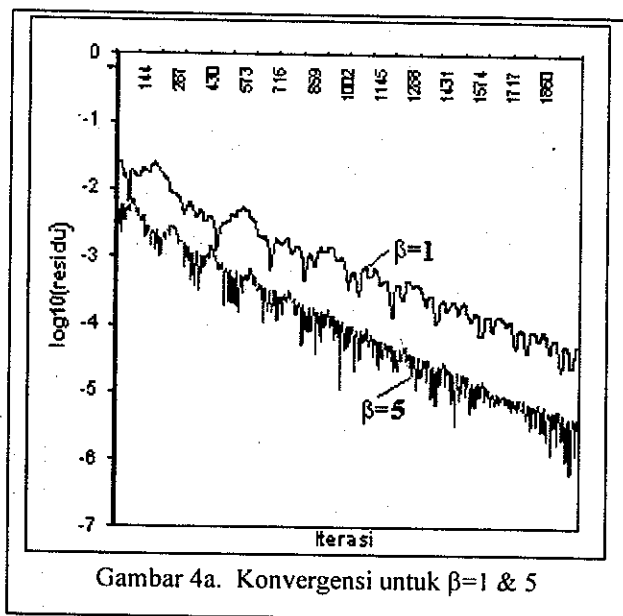
Algoritma Penyelesaian dari sistem persamaan di atas adalah sebagai berikut :

- Tentukan batas toleransi kesalahan atau jumlah iterasi (langkah waktu semu) untuk perhitungan , tentukan pula kondisi awal ($t=0$) untuk semua variabel (u,v, θ ,p).
- Selesaikan persamaan (11) untuk mendapatkan u dengan Metode *Alternating Direct Implicit* (ADI).
- Selesaikan persamaan (12) untuk mendapatkan v dengan Metode ADI.

4. Hitung tekanan menggunakan persamaan (10).
5. Selesaikan persamaan (13) untuk mendapatkan θ dengan Metode ADI.
6. Periksa apakah sudah mencapai batas konvergensi /melebihi batas jumlah iterasi atau belum, jika belum kembali ke langkah 2. Jika sudah ke langkah 7.
7. Tulis data.
8. Selesai.

4. HASIL PERHITUNGAN DAN PEMBAHASAN.

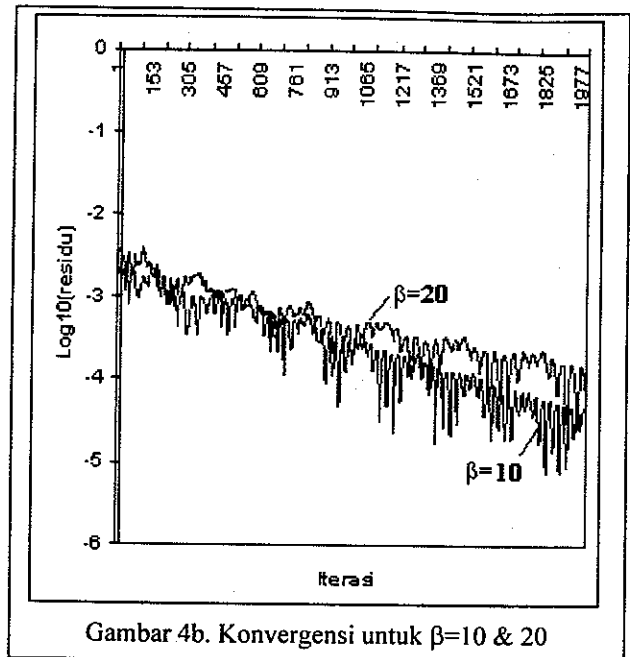
Perhitungan dilakukan pada komputer AMD K6-2 dengan Lahey Fortran 77. Untuk mempelajari pengaruh nilai faktor kompresibilitas tiruan (β), perhitungan dilakukan dengan nilai β yang cukup bervariasi, yaitu : 1,5,10 dan 20. Pulicani & Ouzzanni menggunakan nilai $\beta = 25$ & 30 dengan $\Delta t = 0,002$. Sedangkan Kwak dkk [13] merekomendasikan nilai β berkisar $0,75 < \beta < 10$, tetapi Kwak dkk memakai metode Artificial Compressibility untuk menganalisis aliran hidrodinamis 3 dimensi, bukan konveksi alami. Pengaruh nilai β terhadap konvergensi dapat dilihat pada gambar 4a dan 4b. Perhitungan dilakukan dengan grid berukuran 101×31 . Untuk $\beta = 1,5$, dan 10 lebar langkah waktu semu (Δt) = 0,02, sedangkan untuk $\beta = 20$, nilai $\Delta t = 0,005$.



Gambar 4a. Konvergensi untuk $\beta=1$ & 5

Residu dihitung dengan rumus :

$$\frac{\sum \left| \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right|}{\sum n}, n = \text{nodal}$$



Gambar 4b. Konvergensi untuk $\beta=10$ & 20

Dari gambar 4a dan 4b, terlihat bahwa : konvergensi yang paling baik adalah untuk nilai $\beta=5$. Untuk $\beta=1$, konvergensi cukup baik, tetapi lebih lambat dibanding $\beta=5$. Konvergensi untuk $\beta=10$ cenderung lambat, dan jika beta β dinaikkan, konvergensi terganggu sehingga dapat divergen. Hal ini dapat dilihat pada perhitungan dengan $\beta=20$, konvergensi sangat lambat. Untuk kondisi ini, supaya dapat konvergen, nilai Δt diperkecil, yaitu : 0,005. Untuk nilai β yang lebih besar dari 20, konvergen sangat sulit untuk dicapai.

Untuk mengetahui akurasi perhitungan pada paper ini, hasil perhitungan untuk berbagai nilai Bilangan Rayleigh dibandingkan dengan hasil peneliti lainnya, yaitu : hasil eksperimen oleh Raithby & Holland dan perhitungan numerik oleh Napolitano & Quartapelle. Grid yang dipakai pada perbandingan ini berukuran : 101×31 , $\beta=5$, $\Delta t=0,02$ dan $RR=2,6$. Gambar 5 menunjukkan perbandingan nilai $\overline{K_{eq}}$ perhitungan sekarang dengan perhitungan dari korelasi Raithby & Holland. $\overline{K_{eq}}$ dihitung dengan rumus :

$$\overline{K_{eq}} = \frac{\left(\left(\overline{K_{eq}} \right)_{inner} + \left(\overline{K_{eq}} \right)_{outer} \right)}{2}$$

$$\left(\overline{K_{eq}} \right)_{inner} = -\frac{1}{2\pi} \int \left(\frac{\partial \theta}{\partial r} \right)_{inner} \ln \left(\frac{r_o}{r_i} \right) r_i d\phi$$

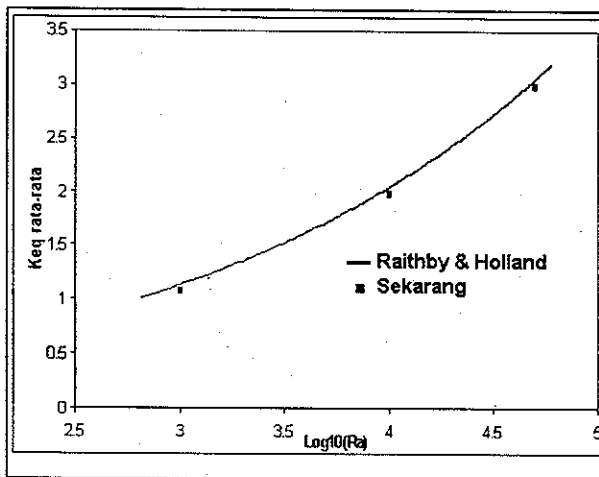
$$\left(\overline{K_{eq}} \right)_{outer} = -\frac{1}{2\pi} \int \left(\frac{\partial \theta}{\partial r} \right)_{outer} \ln \left(\frac{r_o}{r_i} \right) r_o d\phi$$

Korelasi dari Raithby & Holland adalah sebagai berikut [1] :

$$\overline{K}_{eq} = 0.386 \left(\frac{Pr}{0.861 + Pr} \right)^{\frac{1}{4}} Ra_{cyl}^{\frac{1}{4}}$$

$$Ra_{cyl}^{\frac{1}{4}} = \frac{\ln \left(\frac{r_o}{r_i} \right)}{(r_o L - r_i L)^{\frac{3}{4}} \left((D_i L)^{\frac{3}{5}} + (D_o L)^{\frac{3}{5}} \right)^{\frac{1}{4}}} Ra^{\frac{1}{4}}$$

Konduktivitas ekivalen rata-rata tanpa dimensi diperoleh dengan membagi konduktivitas ekivalen rata-rata berdimensi dengan konduktivitas berdimensi (k).

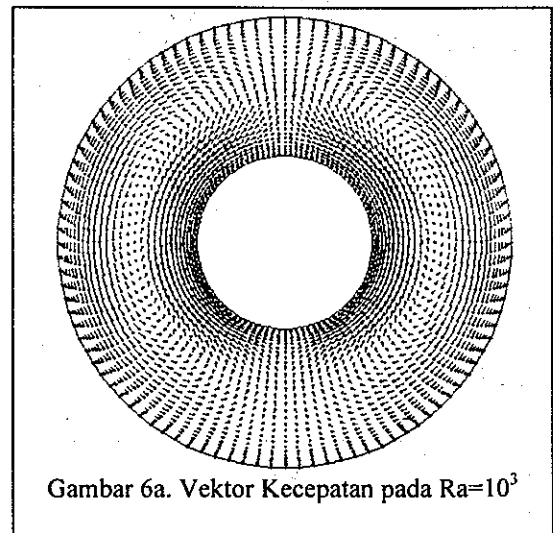


Dari gambar 5 terlihat bahwa : Konduktivitas ekivalen rata-rata pada perhitungan sekarang mempunyai kesesuaian yang sangat baik dengan korelasi dari Raithby dan Holland. Perbandingan dengan hasil perhitungan numeris lainnya disajikan pada tabel 1. Tabel 1 menunjukkan bahwa hasil perhitungan sekarang sangat dekat dengan perhitungan Napolitano & Quartapelle dan Goldstein & Kuehn [1].

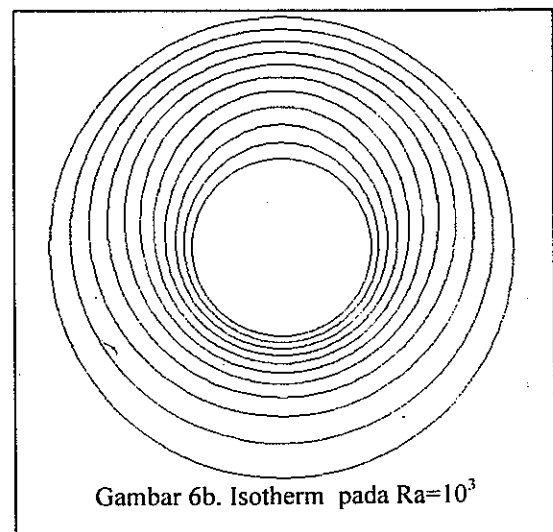
Untuk memeriksa hasil perhitungan tidak tergantung pada ukuran grid (*grid independence*), perhitungan dilakukan pada berbagai ukuran grid, yaitu : 61 x 15, 81 x 21 dan 101 x 31 dengan $\beta=5$ dan $\Delta t=0.02$. Dari tabel 1 terlihat bahwa meskipun ukuran grid bervariasi, jawaban tetap tunggal (*trivial*). Ukuran grid hanya berpengaruh pada akurasi. Semakin besar ukuran grid, hasil perhitungan semakin akurat. Dengan demikian, pada perhitungan ini bebas dari ukuran grid.

Tinjauan secara fisis akan diberikan pada bagian di bawah ini. Dari gambar 6a,7a dan 8a terlihat bahwa : aliran di bagian atas dan samping silinder dalam (*inner cylinder*) mengalir dengan cepat menuju ke atas. Hal ini karena densitas mengalami penyusutan karena efek pemanasan dari silinder dalam, sehingga lebih ringan dan mengapung ke atas. Setelah mencapai dinding silinder luar (*outer cylinder*), aliran bercabang, sehingga bagian percabangan ini tekanan naik, karena merupakan titik stagnasi. Fluida mengalir menyusuri dinding

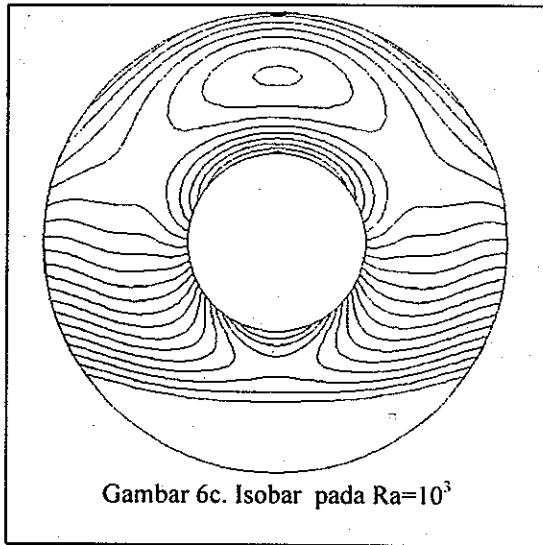
silinder luar bagian atas sambil mengalami pendinginan. Densitas bertambah, sehingga lebih berat dan mengalir turun. Pada daerah yang ditinggalkan oleh fluida panas, akan diisi oleh fluida yang relatif dingin. Fluida dari bagian bawah silinder dalam akan mengalir ke atas. Dengan demikian akan terjadi sirkulasi aliran fluida. Dengan semakin meningkatnya Bilangan Rayleigh, tebal lapisan batas pada dinding silinder semakin tipis. Hal ini sangat jelas terlihat pada gambar 6a,7a dan 8a. Fluida mengalir juga membawa panas, hal ini terlihat pada gambar 6 b, 7b dan 8b. Pada $Ra=10^3$, isotherm berbentuk mirip cincin konsentrik. Pada Ra rendah, kecepatan aliran yang terjadi juga relatif rendah, selain itu difusivitas mendominasi aliran. Pada $Ra=10^4$ dan 5×10^4 , isotherm pada bagian atas silinder dalam mengalami penyebaran, sesuai dengan arus aliran fluida. Pada $Ra=10^4$ dan 5×10^4 , arus konveksi lebih dominan dibanding dengan difusivitas. Pada perhitungan ini, pemakaian *staggered grid* dapat menghilangkan spurious pressure mode, hal ini dapat dilihat pada isobar gambar 6c,7c dan 8b. Pada gambar tersebut, isobar berupa garis mulus, tidak ada gangguan riak (*wiggle*).



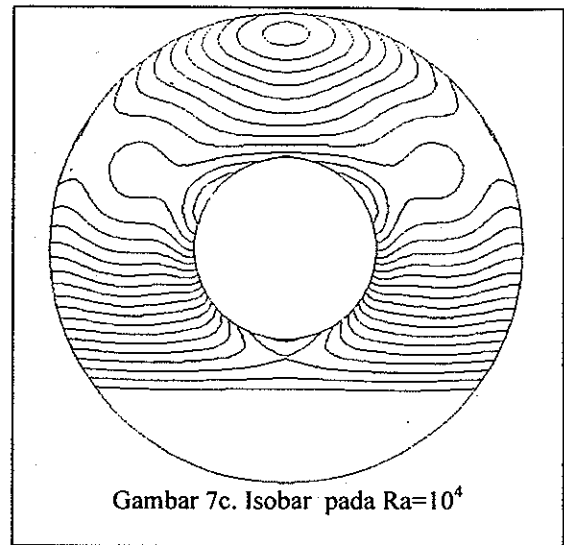
Gambar 6a. Vektor Kecepatan pada $Ra=10^3$



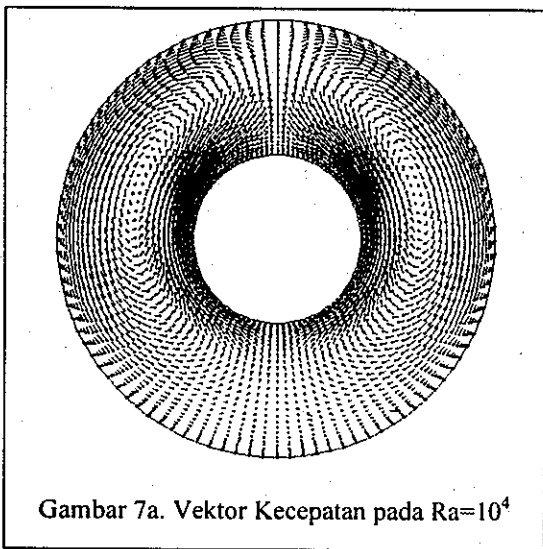
Gambar 6b. Isotherm pada $Ra=10^3$



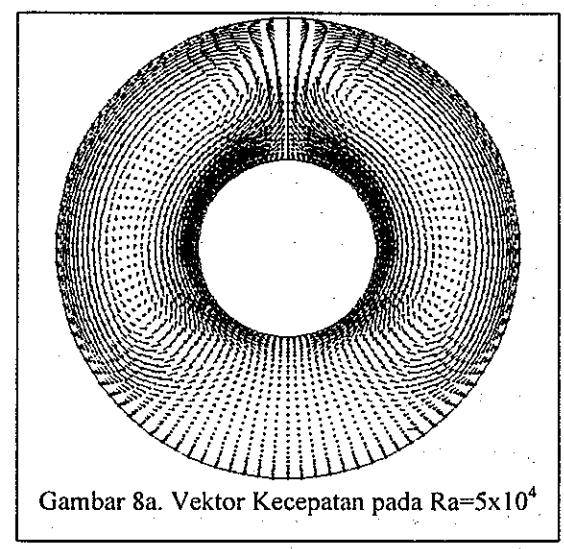
Gambar 6c. Isobar pada $Ra=10^3$



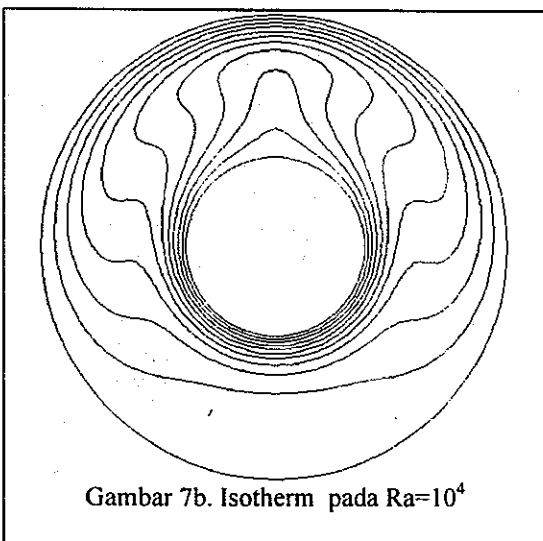
Gambar 7c. Isobar pada $Ra=10^4$



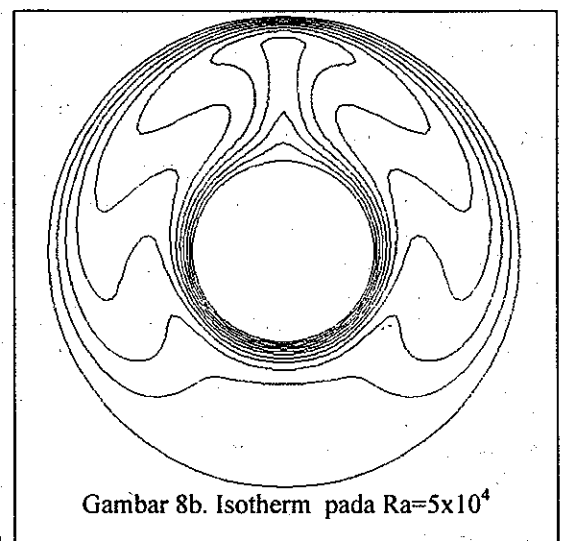
Gambar 7a. Vektor Kecepatan pada $Ra=10^4$



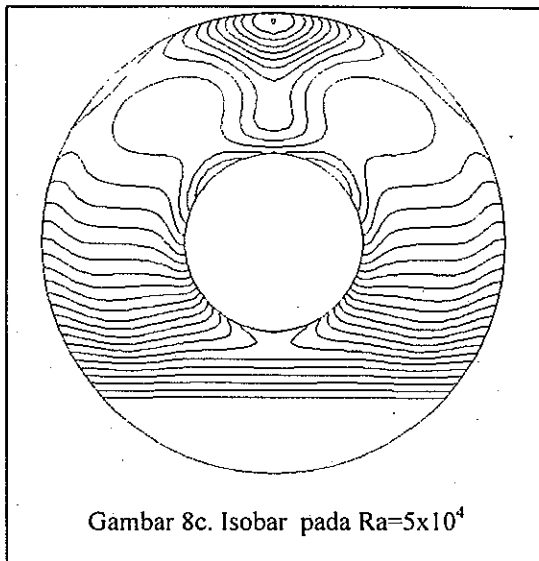
Gambar 8a. Vektor Kecepatan pada $Ra=5 \times 10^4$



Gambar 7b. Isotherm pada $Ra=10^4$



Gambar 8b. Isotherm pada $Ra=5 \times 10^4$



Gambar 8c. Isobar pada $Ra=5 \times 10^4$

Dari perhitungan yang telah dilakukan, dapat ditarik beberapa kesimpulan sebagai berikut :

1. Penempatan variabel kecepatan dan temperatur pada pojok sel dan variabel tekanan pada pusat sel dapat menghilangkan *spurious pressure mode*.
2. Konvergensi metode *artificial compressibility* sangat dipengaruhi oleh nilai faktor kompresibilitas tiruan, nilai yang direkomendasikan : $1 \leq \beta \leq 10$.
3. Perbandingan dengan hasil peneliti lain menunjukkan bahwa penyelesaian numerik dengan metode *artificial compressibility* dan diskritisasi volume hingga mempunyai akurasi yang baik.

5. DAFTAR PUSTAKA

1. Sadik Kakac dan Yaman Yener, *Convective Heat Transfer*, CRC Press, Boca Raton, 1995.
2. T.S. Lee, *Numerical Computation with Air Enclosed Between The Annuli Of Eccentric Heated Horizontal Rotating Cylinder*, Journal of Computers & Fluids, Vol. 21, No. 3, 1992.
3. C. Shu dan Y.T. Chew, *Fourier Differential Quadrature and Its Application to Simulate Natural Convection in a Concentric Annuli*, International Symposium on Transport Phenomena in Thermal-Fluids Engineering, Singapore, 1996.
4. Q. Yau, C. Shu dan S. Yeo, *GDQ Simulation of Natural Convection in a Concentric Annuli by Iterative Method*, International Symposium on Transport Phenomena in Thermal-Fluids Engineering, Singapore, 1996.
5. M. Napolitano dan L. Quartapelle, *Block ADI for Steady Natural Convection in Two Dimensions*, Numerical Methods in Heat Transfer Vol. 2 (Edited by : R.W.Lewis, K. and Morgan), John Wiley & Sons, Bristol, 1985.
6. D.K. Gartling dan R.E. Nickell, *Finite Element Analysis of Free and Forced Convection*, Finite Elements in Fluids Vol. 3 (Edited by : R.H. Gallagher, O.C. Zienkiewicz, J.T. Oden, M. Morandi Cecchi and C. Taylor), John Wiley & Sons, Bristol, 1985.

7. J. N. Reddy, 1983, *Penalty-finite Element Methods in Conduction and Convection Heat Transfer*, Numerical Methods in Heat Transfer Vol. 2 (Edited by : R.W.Lewis, K. Morgan and B.A. Schrefler), John Wiley & Sons, Bristol, 1983.
8. J.P. Pulicani and Ouazzani, *A Fourier-Chebyshev Pseudospectral Method for Solving Steady 3-D Navier Stokes and Heat Equations in Cylindrical Cavities*, International Journal of Computers & Fluids, Vol. 20, No. 2, 1991.
9. Charles Hirsch, (1990), *Numerical Computation of Internal and External Flows*, Volume 1, John Wiley & Sons, Chichester, 1988..
10. S.W. Kim dan T.J. Benson, *Comparison of SMAC, PISO and Iterative Advancing Scheme for Unsteady Flow*, Journal of Computers & Fluids, Vol. 21, No. 3, 1992.
11. P.Le Quere, 1990, *Accurate Solutions to The Square Thermally Driven Cavity at High Rayleigh Number*, International Journal of Computers & Fluids, Vol. 20, No. 1, 1990.
12. Kardana Natakusumah, *Finite Volume Solution of Two Dimensional Compressible Euler and Navier Stokes Equations on Structured Grids*, Journal SITRA 93-01-06, 1993.
13. Dochan Kwak et al, *A Three-Dimensional Incompressible Navier-Stokes Flow Solver Using Primitive Variables*, AIAA Journal, Vol. 24, 1986.
14. D. W. Pepper, dan R.E Cooper, 1983, *Numerical Solution of Natural Convection in Eccentric Annuli*, AIAA Journal, Vol. 21, No. 9, 1983.

6. NOTASI

u	: Kecepatan horizontal
v	: Kecepatan vertikal
p	: Tekanan
x	: Sumbu horizontal
y	: Sumbu vertikal
t	: Waktu semu
Ra	: Bilangan Rayleigh
	: $\frac{g\beta(T_h - T_c)L^3}{\nu\alpha}$
Pr	: Bilangan Prandtl
Nu	: Bilangan Nusselt
T	: Temperatur berdimensi
K_{eq}	: Konduktivitas ekuivalen tanpa dimensi
L	: Jarak antara silinder berdimensi
r_i	: Jari-jari dalam tanpa dimensi
r_o	: Jari-jari luar tanpa dimensi
D_i	: Diameter dalam tanpa dimensi
D_o	: Diameter dalam tanpa dimensi
RR	: Perbandingan jari-jari luar dan dalam
α	: Diffusivitas thermal
β	: Faktor kompresibilitas tiruan
	: Koefisien ekspansi thermal
ϕ	: Sudut
θ	: Temperatur tanpa dimensi
Ω	: Area sel

Subskrip

- r : Variabel referensi
 c : Properti pada dinding dingin
 h : Properti pada dinding panas
 pp : sel primer untuk tekanan
 pm : sel primer untuk kecepatan
 sm : sel sekunder untuk kecepatan

Tabel 1. Perbandingan Konduktivitas ekuivalen lokal.

Ra	ϕ	Inner cylinder					Outer cylinder				
		61x15	81x21	101x31	Nap.*	Gold.*	61x15	81x21	101x31	Nap.*	Gold.*
10^3	0°	0.545	0.560	0.568	0.59	0.57	1.799	1.784	1.775	1.86	1.78
	90°	1.111	1.120	1.127	1.18	1.14	1.007	1.003	1.001	1.04	1.00
	180°	1.439	1.445	1.451	1.59	1.47	0.571	0.575	0.577	0.59	0.57
10^4	0°	-	-	0.383	0.40	0.37	-	-	5.358	5.50	5.35
	90°	-	-	2.278	2.42	2.33	-	-	1.578	1.64	1.54
	180°	-	-	2.760	2.92	2.90	-	-	0.160	0.16	0.14
5×10^4	0°	-	-	0.550	0.61	0.53	-	-	10.868	10.62	10.77
	90°	-	-	3.184	3.42	3.28	-	-	2.473	2.12	2.28
	180°	-	-	3.822	4.08	4.32	-	-	0.121	0.13	0.12

Nap. = Napolitano & Quartapelle

Gold. = Goldstein & Kuehn

* : sumber dari ref [5]