

ANALISIS PERCABANGAN RETAK PADA MATERIAL KERAMIK PIEZOELEKTRIK

IGN Wiratmaja Puja⁽¹⁾, Muhamad Hidayat⁽¹⁾ dan Qing Hua Qin⁽²⁾

⁽¹⁾Departemen Teknik Mesin ITB

⁽²⁾School of Aerospace, Mechanical, and Mechatronics Engineering,
University of Sydney, Australia

Ringkasan

Percabangan atau belokan retak pada material piezoelektrik dapat terjadi akibat pembebanan mekanik atau elektrik. Dalam makalah ini disajikan analisis percabangan retak untuk material keramik piezoelektrik (PZT). Material canggih jenis ini sangat tepat untuk diaplikasikan pada peralatan sensor, aktuator, dan juga bidang struktur pintar. Dengan mengaplikasikan Stroh formalism yang telah dikembangkan untuk elastoelectric, maka boundary value problem dapat diselesaikan dengan transformasi Hilbert. Solusi elastik, elektrik, stress intensity factor, dan strain energi density didapat secara eksplisit dalam bentuk integral yang dapat dipecahkan dengan metoda Gauss-Chebyshev-Quadrature. Hasil numerik untuk jenis keramik piezoelektrik (PZT) diberikan untuk ilustrasi perilaku stress-electric intensity factor baik secara kuantitatif maupun kualitatif.

Abstract

Crack branch or kink in piezoelectric body may occur due to mechanical or electric loading. This paper presents the analysis of crack branch for ceramic piezoelectric materials. This type of advanced materials is very advantageous for application in smart structures, measurements device and actuators. Utilizing the extended Stroh Formalism for elastoelectric, the boundary value problems are solved by way of Hilbert Transforms. The explicit expressions for the elastic, electric, stress and electric intensity factor, and strain energi density are presented in integral forms. These integrals are solved using Gauss-Chebyshev-Quadrature. Numerical results for piezoelectric ceramics are presented to illustrate both qualitative and quantitative behaviour of the stress- electric intensity factors.

Keywords: crack, branch, piezoelectric, electroelastic, ceramics, stress-electric intensity factor

1. PENDAHULUAN

Material piezoelektrik keramik (*piezoceramic*) adalah salah satu material maju yang memiliki prospek aplikasi engineering yang luas di masa depan. Saat ini piezoelektrik secara luas digunakan pada berbagai peralatan seperti sensor, aktuator, transducer, dan struktur pintar. Berbeda dengan material piezoelektrik alami, karakteristik elasto-elektrik piezoelektrik keramik dapat direkayasa untuk mendapatkan sifat tertentu yang diinginkan. Mekanika *piezoceramic* sangat kompleks karena sifat *anisotropic* serta sifat *coupling* antara sifat elastic dan sifat elektrik. Aspek mekanika retakan perlu mendapat perhatian khusus berhubung *piezoceramic* adalah jenis material getas[1]. Retak juga dapat direkayasa pada media *piezoceramic* untuk meningkatkan sensitivitas pada karakteristik tertentu. Jenis retak dapat bermacam-macam seperti retak berbentuk garis, retak berbentuk silindris dan retak tidak beraturan. Retak berbentuk garis pun dapat bermacam-macam bentuknya, seperti retak cabang tunggal, retak cabang banyak, retak menembus

permukaan, retak antar muka (*interface crack*), retak terhenti (*halted*) pada antar muka biomaterial[2]. Beberapa publikasi tentang fenomena retak pada piezoelektrik yang mendahului penelitian ini antara lain dilakukan oleh Qin dan Mai tentang percabangan retak pada bi-material piezoelektrik[3,4], Zhu dan Yang tentang retak yang berbelok pada kristal piezoelektrik [5], Qin dan Mai tentang Fungsi Green[6], serta Hayashi dan Nasser untuk aspek *energy release rate*[7].

Di dalam makalah ini dibahas retak cabang yang berbentuk suatu retak garis pada material piezokeramik. Retak cabang yang dimaksud adalah retak yang tumbuh dari ujung suatu retak (utama) dan/atau membentuk sudut terhadap sumbu retak (utama) tersebut. Geometri retak cabang ini dapat diilustrasikan seperti pada Gambar 1.1. Pada material piezoelektrik, beban elektromekanik mempunyai peran yang penting pada munculnya retak cabang, yang seterusnya dapat merambat dengan arah yang baru. Persamaan yang mengatur karakteristik material *piezoceramic* yang mengandung retak cabang adalah persamaan integral

singular. Penyelesaian persamaan integral singular ini akan memberikan informasi tentang karakteristik dari material piezoelektrik tersebut. Penyelesaian persamaan integral singular dapat dilakukan dengan cara analitik atau dengan cara numerik. Penyelesaian analitik seringkali sangat sulit dilakukan, bahkan sering kali tidak dapat dilakukan, untuk berbagai masalah retak. Karena sulitnya penyelesaian analitik, penyelesaian numerik menjadi alternatif penyelesaian.

Di dalam makalah ini penyelesaian persamaan integral singular untuk kasus retak cabang yang terjadi pada material piezoelektrik dilakukan dengan menggunakan solusi numerik. Sebuah program komputer kemudian dibuat untuk menyelesaikan solusi numerik ini. Penyelesaian solusi numerik ini akan memberikan informasi tentang karakteristik dari material piezoelektrik. Persamaan singular untuk retak pada material piezoelektrik yang dikembangkan oleh Qin[3,4] diadopsi sebagai persamaan dasar. Material keramik piezoelektrik adalah tipe *transversely isotropic*. Ukuran retak diasumsikan relatif kecil sehingga dapat didekati dengan model piezoelektrik solid

2. FORMULASI ELEKTROELASTIK UNTUK PIEZOELEKTRIK

Dalam sistem koordinat Cartesian x_i ($i = 1,2,3$), hukum constitutive untuk media piezothermoelastik dapat dinyatakan dalam notasi tensor sebagai berikut [8] :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= c_{ijkl} \gamma_{kl} - e_{ijs} E_s - \beta_{ij} \theta \\ D_i &= \varepsilon_{is} E_s + e_{irs} \gamma_{rs} + k_i \theta \\ h_i &= -\lambda_{ij} \theta_{,j} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{ij} &= \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \\ E_i &= -\phi_{,i} \end{aligned}$$

dengan persamaan keseimbangan,

$$\sigma_{ij,i} = 0 ; D_{i,i} = 0 ; h_{i,i} = 0 \quad (2)$$

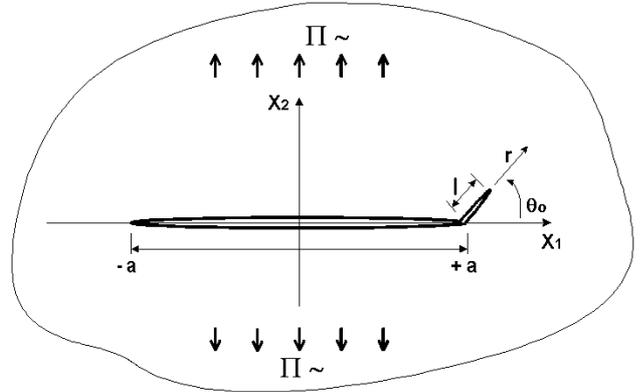
di mana sifat simetri pada koefisien material diadopsi dan secara notasi tensor dapat dinyatakan dengan

$$\begin{aligned} c_{ijkl} &= c_{jikl} = c_{klij} ; e_{kij} = e_{kji} ; e_{ijk} = e_{kji} ; \\ \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ji} ; \beta_{ij} = \beta_{ji} \end{aligned} \quad (3)$$

Di sini σ_{ij} , D_i , E_i , γ_{ij} , h_i , θ , ϕ , u_i , adalah masing-masing *stress component*, *electric displacement*, *electric field*, *strain*, *heat flow*, temperatur, *electric potential*, dan *mechanical displacement*. Konstanta c_{ijkl} , e_{kij} , ε_{ij} , β_{ij} , λ_i , k_{ij} adalah konstanta elastis, konstanta piezoelektrik, permitivitas, modulus thermal, koefisien *pyroelectric* dan koefisien konduksi panas. Indeks yang diulang menandakan penjumlahan, dan koma menandakan diferensiasi.

3. PERSAMAAN INTEGRAL SINGULAR UNTUK RETAK CABANG

Suatu media piezoelektrik tak berhingga yang dikenai tegangan mekanik dan medan listrik ditunjukkan pada gambar 1. Media ini mengandung sebuah retak utama dengan panjang $2a$ dan sebuah retak cabang tumbuh pada ujung retak utama dengan panjang l dan membentuk sudut θ_0 terhadap sumbu retak utama.



Gambar 1 Geometri Retak Cabang

Permasalahan ini dapat diformulasikan dalam bentuk potensial kompleks yang didasarkan pada *Stroh formalism*[9]. Solusi umum medan elektro-elastik dapat dituliskan dalam bentuk[6]:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= 2\text{Re}\{\mathbf{A} f(z)\} \\ \phi &= 2\text{Re}\{\mathbf{B} f(z)\} \\ \mathbf{\Pi}_1 &= -\phi_{,2} \\ \mathbf{\Pi}_2 &= \phi_{,1} \end{aligned} \quad (4)$$

dengan $f(z)$ adalah fungsi kompleks,

$$f(\underline{z}) = \{f_1(z_1) f_2(z_2) f_3(z_3) f_4(z_4)\}^T \quad (5)$$

dan

$$z_i = x_1 + p_i x_2 ; i = 1, 2, 3, 4.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \phi\}^T \\ \mathbf{\Pi}_1 &= \{\sigma_{11}, \sigma_{21}, \sigma_{31}, D_1\} \\ \mathbf{\Pi}_2 &= \{\sigma_{12}, \sigma_{22}, \sigma_{32}, D_2\} \end{aligned} \quad (6)$$

\mathbf{u} adalah *Elastic Displacement and Electric Potential* (EDEP) dan $\mathbf{\Pi}$ adalah *Stress and Electric Displacement* (SED). Sedangkan Nilai \mathbf{A} dan \mathbf{B} pada persamaan utama dapat ditentukan dengan penjabaran *Stroh formalism*.

Kondisi batas yang harus dipenuhi baik pada retak utama maupun cabangnya adalah :

- Tidak terdapat traksi-arus pada permukaan retak utama atau $\mathbf{\Pi}_2$ pada permukaan crack = 0

$$\phi'(x_1) + \overline{\phi'(x_1)} = 0 ; |x_1| < c \quad (7)$$

- Sepanjang permukaan retak cabang tidak terdapat traksi - arus.

$$\phi'_{,r}(r, \theta) + \overline{\phi'_{,r}(r, \theta)} = 0 ; 0 < |r| < l \quad (8)$$

4. SOLUSI SINGULAR

Sebuah retak dapat dilihat sebagai suatu distribusi dislokasi yang kontinu[10]. Distribusi dislokasi ini akan menghasilkan kondisi singular. Kondisi singular ini membutuhkan solusi singular. Untuk bidang tak berhingga yang mengandung sebuah dislokasi tepi, \mathbf{b} , pada $z_0 (x_{10}, x_{20})$. Solusi elektro-elastis dapat dipenuhi oleh fungsi potensial [3],

$$f_0(z) = \frac{\ln(z - z_0)}{2\pi i} \mathbf{B}^T \mathbf{b} \quad (9)$$

Jika terdapat retak pada bidang tersebut, solusi elektro-elastis tidak hanya diberikan oleh persamaan (9) saja, tetapi juga oleh kondisi batas pada permukaan retak di manakondisi batas ini harus dipenuhi. Potensial kompleks yang baru, $f_I(z)$ untuk suatu dislokasi tepi (*edge dislocation*) untuk bidang dengan sebuah retak di dalamnya dapat dituliskan sebagai :

$$f_I(z) = f_0(z) + f_R(z) \quad (10)$$

di mana $f_R(z)$ akan ditentukan dengan kondisi SED pada permukaan retak sama dengan nol (*traction free*).

Traksi yang bekerja pada permukaan retak, $x_2 = 0, |x_1| < c$, dengan unit normal $[0, 1, 0]^T$ adalah

$$\begin{aligned} t(x_1) &= \Pi_2(z) = 2\text{Re}\{\mathbf{B} f_0'(z)\} \\ &= \mathbf{B} f_0'(z) + \overline{\mathbf{B}} \overline{f_0'(z)} \end{aligned} \quad (11)$$

Dengan memasukkan persamaan (9) ke persamaan (11) akan dihasilkan :

$$\mathbf{t}(x) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \mathbf{B} \left\langle \frac{1}{x_i - z_{0\alpha}} \right\rangle \mathbf{B}^T \mathbf{b} - \overline{\mathbf{B}} \left\langle \frac{1}{x_i - z_{0\alpha}} \right\rangle \overline{\mathbf{B}}^T \mathbf{b} \right\} \quad (12)$$

di mana

$$\left\langle \left(\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right)_\alpha \right\rangle = \text{diag}[(\cdot)_1 (\cdot)_2 (\cdot)_3 (\cdot)_4]$$

Traksi-arus, $-t(x_1)$, untuk melawan traksi-arus pada persamaan (12), menghasilkan bentuk *Hilbert problem*[6],

$$\mathbf{B} f_R'(z) = -\frac{\chi(z)}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{\mathbf{t}(x) dx}{\chi^+(z)(x-z)} + \mathbf{c} \chi(z) \quad (13)$$

di mana $\chi(z)$ adalah *fungsi Plemelj* :

$$\chi(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}} \quad (14)$$

Dengan menggunakan *contour integral* akan didapatkan

$$\mathbf{B} f_R'(z) = \frac{1}{2\pi i} \mathbf{B} \mathbf{F}(z, z_0) \mathbf{B}^T \mathbf{b} + \frac{1}{2\pi i} \mathbf{B}^{-1} \overline{\mathbf{B}} \mathbf{F}(z, \bar{z}_0) \overline{\mathbf{B}}^T \mathbf{b}$$

dan

$$\mathbf{c} = +\frac{1}{2\pi i} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{b} = \left(-2i \mathbf{B} \mathbf{B}^T \right) \frac{\mathbf{b}}{4\pi} = \frac{\mathbf{L} \mathbf{b}}{4\pi}$$

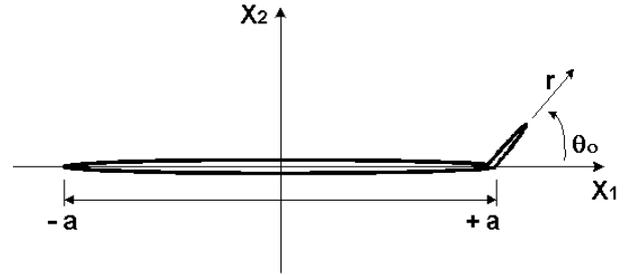
$$\mathbf{L} = -2i \mathbf{B} \mathbf{B}^T$$

$$\mathbf{F}(z, z_0) = \frac{1}{2} \left\langle \frac{1}{(z - z_0)} \left\{ 1 - \frac{\chi(z)}{\chi(z_0)} \right\} \right\rangle \quad (15)$$

Bentuk akhir dislokasi retak dapat ditulis menjadi :

$$\begin{aligned} f_I'(z) &= f_0'(z) + f_R'(z) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left\{ \left\langle \frac{1}{z_\alpha - z_{\alpha 0}} \right\rangle \mathbf{B}^T \mathbf{b} - \mathbf{F}(z, z_0) \mathbf{B}^T \mathbf{b} + \mathbf{B}^{-1} \overline{\mathbf{B}} \mathbf{F}(z, \bar{z}_0) \overline{\mathbf{B}}^T \mathbf{b} \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

Bentuk persamaan integral untuk potensial dislokasi retak cabang dapat diturunkan dengan mendefinisikan sistem koordinat pada saat tumbuhnya retak cabang seperti ditunjukkan pada gambar 2.



Gambar 2. Sumbu pada retak cabang

Definisikan z dan z_0 dalam bentuk koordinat silinder sebagai berikut :

$$\begin{aligned} x_1 &= a + r \cos \theta; \quad x_2 = r \sin \theta \\ z &= a + r(\cos \theta + p \sin \theta) \end{aligned} \quad (17)$$

dan dislokasi

$$\begin{aligned} x_{10} &= a + r_0 \cos \theta_0; \quad x_{20} = r_0 \sin \theta_0 \\ z_0 &= a + r_0(\cos \theta_0 + p \sin \theta_0) \end{aligned} \quad (18)$$

maka dislokasi tunggal pada (x_{10}, x_{20}) dapat dituliskan dalam bentuk :

$$\begin{aligned} z_\alpha &= a + r(\cos \theta + p_\alpha \sin \theta) \\ z_{\alpha 0} &= a + r_0(\cos \theta_0 + p_\alpha \sin \theta_0); \quad 0 \leq r_0 \leq l \end{aligned} \quad (19)$$

Dengan mengganti \mathbf{b} dengan $\mathbf{b}(r_0) dr_0$ dan dengan mengintegrasikan terhadap r_0 dari 0 (ujung retak utama) sampai dengan l akan dihasilkan potensial untuk distribusi dislokasi pada retak cabang sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_2'(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^l \left\{ \left\langle \frac{1}{z_\alpha - z_{\alpha 0}} \right\rangle \mathbf{B}^T - \mathbf{F}(z, z_0) \mathbf{B}^T \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{B}^{-1} \overline{\mathbf{B}} \mathbf{F}(z, \bar{z}_0) \overline{\mathbf{B}}^T \right\} \mathbf{b}(r_0) dr_0 \end{aligned} \quad (20)$$

Perlu dicatat bahwa $\mathbf{b}(r_0) dr_0$ adalah kerapatan (*density*) dislokasi yang harganya belum diketahui. Untuk itu $\mathbf{b}(r_0) dr_0$ dapat dicari dengan menerapkan kondisi batas yaitu bebas traksi sepanjang permukaan retak cabang

$$\begin{aligned} t_\theta(r) \Big|_{\theta=\theta_0} &= 0 \\ t_\theta(r) \Big|_{\theta=\theta_0} &= \frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_{\theta=\theta_0} = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

Kondisi bebas traksi sepanjang permukaan retak harus dipenuhi untuk dapat menurunkan persamaan integral.

Mengingat medan elasto-elektrik yang jaraknya jauh dari dislokasi tidak terpengaruh oleh adanya retak, maka syarat asimtotik kondisi batasnya adalah $f_z'(z) \rightarrow 0$ ketika $|z| \rightarrow \infty$, dengan syarat yang harus dipenuhi $f'(z) \rightarrow \frac{1}{4}$ ketika $|z| \rightarrow \infty$. Untuk memenuhi kondisi asimtotik ini maka dapat ditetapkan fungsi koreksi

$$f'(z) = f_2'(z) + f_\infty'(z) \quad (22)$$

Solusi untuk f_∞' dapat diadopsi dari [4]

$$f_\infty' = \frac{1}{2} \left\{ \frac{z}{\sqrt{z^2 - c^2}} \right\} B^{-1} \Pi_2^\infty \quad (23)$$

Untuk memenuhi kondisi batas pada cabang retak yaitu $\Pi_\theta = \phi_{,r}|_{\theta=\theta_0} = 0$, maka traksi-arus sepanjang permukaan cabang retak haruslah nol, maka :

$$\begin{aligned} t_n &= -\Pi_1 \sin \theta_0 + \Pi_2 \cos \theta_0 = 0 \\ &= -\phi_{,2} \sin \theta_0 + \phi_{,1} \cos \theta_0 = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

Untuk tujuan penyederhanaan, definisi sistem koordinat dapat dituliskan dalam bentuk

$$\begin{aligned} z &= a + r(\cos \theta + p \sin \theta) = a + rz^* \\ z_0 &= a + r_0(\cos \theta_0 + p \sin \theta_0) = a + r_0 z_0^* \end{aligned} \quad (26)$$

dimana

$$z^* = \cos \theta + p \sin \theta; \quad z_0^* = \cos \theta_0 + p \sin \theta_0$$

sehingga pada saat $\theta = \theta_0$,

$$z^* = z_0^*; \quad z = a + rz_0^* \quad (27)$$

maka

$$\begin{aligned} (z - z_0) &= (z + rz_0^*) - (z + r_0 z_0^*) = (r - r_0) z_0^* \\ \frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r} \langle a + rz^* \rangle = z^* \end{aligned} \quad (28)$$

Dengan menggunakan sistem koordinat yang disederhanakan ini maka turunan parsial fungsi potensial dapat dilakukan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \phi_{,r} &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \langle \mathbf{B} f(z) + \overline{\mathbf{B}} \overline{f(z)} \rangle \\ &= \mathbf{B} f_2'(z) z^* + \overline{\mathbf{B}} \overline{f_2'(z)} z^* + \left\{ \mathbf{B} f_\infty'(z) + \overline{\mathbf{B}} \overline{f_\infty'(z)} \right\} z^* \\ &= z_0^* \left\{ \mathbf{B} f_2'(z) + \overline{\mathbf{B}} \overline{f_2'(z)} \right\} + z_0^* \phi_{0\infty} \end{aligned} \quad (29)$$

$\phi_{0\infty}$ adalah suatu fungsi vektor yang diketahui yang berhubungan dengan medan SED yang diinduksi oleh beban luar.

Selanjutnya dapat dievaluasi

$$z_0^* \left\{ \mathbf{B} f_2'(z) + \overline{\mathbf{B}} \overline{f_2'(z)} \right\} = \dots$$

yang menghasilkan :

$$\begin{aligned} \dots &= \frac{z_0^*}{2\pi i} \int_0^l \left\{ \mathbf{B} \left\langle \frac{1}{z_\alpha - z_{\alpha 0}} \right\rangle \mathbf{B}^\top - \overline{\mathbf{B}} \left\langle \frac{1}{\overline{z_\alpha - z_{\alpha 0}}} \right\rangle \overline{\mathbf{B}}^\top \right\} \mathbf{b}(r_0) dr_0 \\ &+ \frac{z_0^*}{2\pi i} \int_0^l \left\{ \overline{\mathbf{B}} \mathbf{F}(z, z_0) \overline{\mathbf{B}}^\top - \mathbf{B} \mathbf{F}(z, z_0) \mathbf{B}^\top \right\} \mathbf{b}(r_0) dr_0 \\ &+ \frac{z_0^*}{2\pi i} \int_0^l \left\{ \overline{\mathbf{B}} \overline{\mathbf{F}(z, z_0)} \overline{\mathbf{B}}^\top - \mathbf{B} \overline{\mathbf{F}(z, z_0)} \mathbf{B}^\top \right\} \mathbf{b}(r_0) dr_0 \end{aligned} \quad (30)$$

Evaluasi masing-masing suku pada persamaan di atas akan menghasilkan

$$\begin{aligned} \frac{z_0^*}{2\pi i} \int_0^l \left\{ \mathbf{B} \left\langle \frac{1}{z_\alpha - z_{\alpha 0}} \right\rangle \mathbf{B}^\top - \overline{\mathbf{B}} \left\langle \frac{1}{\overline{z_\alpha - z_{\alpha 0}}} \right\rangle \overline{\mathbf{B}}^\top \right\} \mathbf{b}(r_0) dr_0 &= \dots \\ &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \mathbf{L} + \overline{\mathbf{L}} \right\} \int_0^l \frac{\mathbf{b}(r_0) dr_0}{(r - r_0)}; \quad \text{dimana } \mathbf{L} = -2i \mathbf{B} \mathbf{B}^\top \\ &= \frac{\text{Re}\{\mathbf{L}\}}{2\pi} \int_0^l \frac{\mathbf{b}(r_0) dr_0}{(r - r_0)} \end{aligned} \quad (31)$$

suku ke-2 dan ke-3 digabungkan dan setelah hasil evaluasi disederhanakan akan didapatkan,

$$\begin{aligned} &= \frac{z_0^*}{2\pi i} \left[\int_0^l \text{Im} \left\{ \overline{\mathbf{B}} \mathbf{F}(z, z_0) \overline{\mathbf{B}}^\top \right\} \mathbf{b}(r_0) dr_0 \right. \\ &\quad \left. - \int_0^l \text{Im} \left\{ \mathbf{B} \mathbf{F}(z, z_0) \mathbf{B}^\top \right\} \mathbf{b}(r_0) dr_0 \right] \end{aligned} \quad (32)$$

dengan penyederhanaan dan memasukkan z_0^* ke matriks maka dihasilkan

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\pi} \int_0^l \text{Im} \left\{ \overline{\mathbf{B}} \langle z_{0\alpha}^* \rangle \mathbf{F}(z, z_0) \overline{\mathbf{B}}^\top - \mathbf{B} \langle z_{0\alpha}^* \rangle \mathbf{F}(z, z_0) \mathbf{B}^\top \right\} \mathbf{b}(r_0) dr_0 \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^l \mathbf{Y}_0(r, r_0) \mathbf{b}(r_0) dr_0 \end{aligned} \quad (33)$$

dengan

$$\mathbf{Y}_0(r, r_0) = \text{Im} \left\{ \overline{\mathbf{B}} \langle z_{0\alpha}^* \rangle \mathbf{F}(z, z_0) \overline{\mathbf{B}}^\top - \mathbf{B} \langle z_{0\alpha}^* \rangle \mathbf{F}(z, z_0) \mathbf{B}^\top \right\}$$

Dengan demikian persamaan integral singular untuk retak cabang dapat dituliskan dalam bentuk

$$\frac{\text{Re}\{\mathbf{L}\}}{2\pi} \int_0^l \frac{\mathbf{b}(r_0) dr_0}{(r - r_0)} + \frac{1}{\pi} \int_0^l \mathbf{Y}_0(r, r_0) \mathbf{b}(r_0) dr_0 + \Phi_\infty(r) = 0 \quad (34)$$

di mana

$$\Phi_\infty = z_0^* \phi_{0\infty} = \text{Re} \left\{ \mathbf{B} \left\langle z_{0\alpha}^* \left[\frac{z_\alpha}{\sqrt{z^2 - c^2}} - 1 \right] \right\rangle \mathbf{B}^{-1} \Pi_2^\infty \right\}$$

Untuk memudahkan penyelesaian secara numerik, maka diusulkan normalisasi sistem koordinat dari $[0, l]$

menjadi $[-1, +1]$, yaitu $s = \frac{2r - l}{l}$; $s_0 = \frac{2r_0 - l}{l}$,

sehingga $dr_0 = \frac{1}{2} l ds_0$, dan $(r - r_0) = \frac{1}{2} l (s - s_0)$.

Akhirnya didapat hubungan

$$\frac{dr_0}{r-r_0} = \frac{ds_0}{s-s_0} \quad (35)$$

Dengan demikian persamaan integral untuk retak cabang akhirnya dapat dituliskan dalam bentuk

$$\frac{\text{Re}\{\mathbf{L}\}}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\mathbf{b}(s_0) ds_0}{(s-s_0)} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \mathbf{Y}_0(s, s_0) \mathbf{b}(s_0) ds_0 + \Phi_\infty(s) = 0 \quad (36)$$

Persamaan ini selanjutnya akan diubah ke dalam bentuk persamaan numerik untuk menentukan karakteristik medan elasto-elektrik dan factor intensitas tegangan disekitar retakan.

5. FORMULASI NUMERIK UNTUK SOLUSI PERSAMAAN INTEGRAL SINGULAR

Persamaan integral singular untuk suatu retak cabang yang telah ditulis dalam koordinat yang telah dinormalisasi selanjutnya akan dipecahkan dengan metoda numerik. Integral ini termasuk integral singular jenis pertama dengan kernel Cauchy ($s - s_0$) dan kernel Fredholm $\mathbf{Y}_0(s, s_0)$. Fungsi yang akan dicari adalah kerapatan (*density*) dislokasi, $\mathbf{b}(s_0)$, pada retak cabang. Bentuk $\mathbf{b}(s_0)$ dalam fungsi berat adalah

$$\mathbf{b}(s_0) = \frac{\hat{\mathbf{b}}(s_0)}{\sqrt{1-s^2}} = \frac{\sum_{j=1}^N \hat{\mathbf{b}}_j T_j(s_0)}{\sqrt{1-s^2}} \quad (37)$$

$\hat{\mathbf{b}}(s_0)$ adalah sebuah fungsi vektor reguler dalam deret polinomial *Chebyshev* yang terdefinisi pada selang $|x| \leq 1$ dan memenuhi kondisi $\hat{\mathbf{b}}(-1) = 0$. $\hat{\mathbf{b}}_j$ adalah vektor dengan konstanta real dan $T_j(s_0)$ adalah polinomial *Chebyshev* jenis pertama. Fungsi berat yang dipilih adalah $\sqrt{1-s^2}$ di manakedua ujung retak cabang adalah singular. Pemilihan fungsi berat ini sangat bergantung dari asumsi bagaimana retak tersebut terbentuk dan kondisi batas yang muncul di sekitar retak. Dengan menggunakan metoda yang dikembangkan oleh Endorgan dan Gupta [11] dapat ditentukan persamaan solusi numerik yang sesuai untuk menyelesaikan kondisi retak cabang ini dalam bentuk

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{N} \left[\frac{\text{Re}\{\mathbf{L}\}}{2(s_r - s_{0k})} + \mathbf{Y}_0(s_r, s_{0k}) \right] \hat{\mathbf{b}}(s_{0k}) + \Phi_\infty(s_r) = 0 \quad (38)$$

dan kondisi batas

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \frac{\pi}{N} \hat{\mathbf{b}}(-1) &= \sum_{k=1}^N \frac{\pi}{N} \sum_{j=1}^N \hat{\mathbf{b}}_j T_j(-1) = \sum_{k=1}^N \hat{\mathbf{b}}_k T_k(-1) \\ \sum_{k=1}^N \hat{\mathbf{b}}_k T_k(-1) &= 0 \end{aligned} \quad (39)$$

dimana

$$s_{0k} = \cos \left[\frac{(2k-1)\pi}{2N} \right] \quad (k = 1, 2, \dots, N)$$

$$s_r = \cos \left[\frac{r\pi}{N} \right] \quad (r = 1, 2, \dots, N-1)$$

Karena kondisi batas dalam bentuk polinomial *Chebyshev*, maka persamaan integral singular juga harus diubah dalam bentuk polinomial *Chebyshev*, menjadi :

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{N} \left[\frac{\text{Re}\{\mathbf{L}\}}{2(s_r - s_{0k})} + \mathbf{Y}_0(s_r, s_{0k}) \right] \sum_{j=1}^N \hat{\mathbf{b}}_j T_j(s_{0k}) + \Phi_\infty(s_r) = 0 \quad (40)$$

Dengan menyelesaikan N buah $\hat{\mathbf{b}}_{kj}$ yang tidak diketahui pada persamaan diatas maka akan didapatkan nilai $\hat{\mathbf{b}}(s_0)$ pada seluruh titik yang dianalisis pada retak cabang. Dengan metode interpolasi akan didapatkan besarnya $\hat{\mathbf{b}}(s_0)$ pada ujung retak cabang, $\hat{\mathbf{b}}(+1)$. Dengan mengetahui besarnya $\hat{\mathbf{b}}(+1)$, maka dapat dihitung besarnya faktor intensitas tegangan pada ujung retak cabang tersebut. Persamaan untuk menghitung faktor intensitas tegangan (SIF) adalah :

$$\mathbf{K} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \mathbf{\Pi}_n(r) \quad (41)$$

dengan

$$\mathbf{K} = \{K_{II} K_{III} K_I K_D\}^T \text{ untuk material PZT4}$$

$$\mathbf{K} = \{K_{II} K_I K_{III} K_D\}^T \text{ untuk material PZT5 dan PZT5H}$$

Besarnya nilai $\mathbf{\Pi}_n(r)$ adalah

$$\mathbf{\Pi}_n(r) \approx \Omega(\theta) \frac{\text{Re}\{\mathbf{L}\} \hat{\mathbf{b}}(1)}{\sqrt{8(s_0 - 1)}} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{l}{r}} \Omega(\theta) \text{Re}\{\mathbf{L}\} \hat{\mathbf{b}}(1) \quad (42)$$

sehingga

$$\mathbf{K} \approx \sqrt{\frac{l\pi}{8}} \Omega(\theta) \text{Re}\{\mathbf{L}\} \hat{\mathbf{b}}(1) \quad (43)$$

di mana $\Omega(\theta)$ adalah matriks rotasi dengan sumbu putar x_2 (untuk material PZT4) atau sumbu putar x_3 (untuk material PZT5 dan PZT5H), masing-masing adalah

$$\Omega(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ untuk PZT4} \quad (44)$$

$$\Omega(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ untuk PZT5/ PZT5H}$$

Matriks rotasi ini digunakan untuk mengubah posisi \mathbf{K} pada sumbu global retak utama ke posisi sumbu lokal retak cabang.

6. KARAKTERISTIK FAKTOR INTENSITAS TEGANGAN (SIF)

Studi karakteristik faktor intensitas tegangan untuk material keramik piezoelektrik dilakukan untuk tiga jenis material yang banyak digunakan dalam struktur pintar yaitu PZT4, PZT5 dan PZT5H. Konstanta elasto-elektrik untuk ketiga jenis material tersebut adalah :

Material PZT4[12]

Konstanta Elastis dalam N/m²:

$$c_{11} = 139 \times 10^9, c_{12} = 77.8 \times 10^9, c_{13} = 74.3 \times 10^9, \\ c_{33} = 113 \times 10^9, c_{44} = c_{55} = 25.6 \times 10^9.$$

Konstanta Piezoelektrik dalam C/m²
 $e_{33} = 13.84, e_{31} = -6.98, e_{15} = 13.44,$

Konstanta Dielektrik dalam F/m :

$$\kappa_{11} = 6.00 \times 10^{-9}, \kappa_{33} = 5.47 \times 10^{-9},$$

Material PZT5[12]

Konstanta Elastis dalam N/m²:

$$c_{11} = 117 \times 10^9, c_{12} = c_{13} = 53.0 \times 10^9, \\ c_{22} = c_{33} = 126 \times 10^9, c_{23} = 55.0 \times 10^9, \\ c_{44} = 35.5 \times 10^9, c_{55} = c_{66} = 35.3 \times 10^9.$$

Konstanta Piezoelektrik dalam C/m²

$$e_{11} = 23.3, e_{12} = e_{13} = -6.5, e_{35} = e_{26} = 13.44.$$

Konstanta Dielektrik dalam F/m :

$$\kappa_{11} = 13.0 \times 10^{-9}, \kappa_{22} = \kappa_{33} = 15.1 \times 10^{-9}.$$

Material PZT5H[6]

Konstanta Elastis dalam N/m²:

$$c_{11} = 111 \times 10^9, c_{12} = c_{13} = 75.2 \times 10^9, \\ c_{22} = c_{33} = 121 \times 10^9, c_{23} = 75.4 \times 10^9, \\ c_{44} = 22.8 \times 10^9, c_{55} = c_{66} = 21.1 \times 10^9.$$

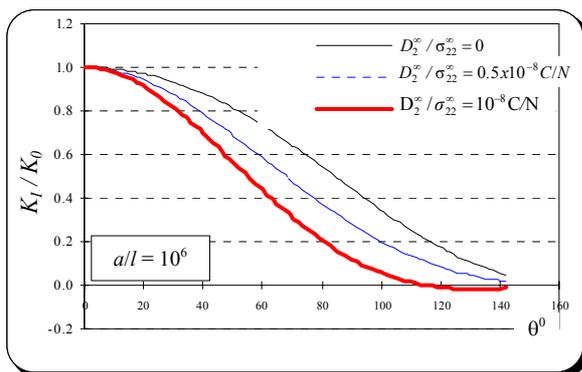
Konstanta Piezoelektrik dalam C/m²

$$e_{11} = 15.8, e_{12} = e_{13} = -5.4, e_{35} = e_{26} = 15.8,$$

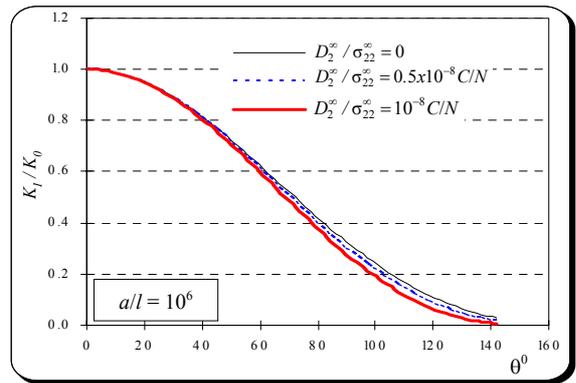
Konstanta Dielektrik dalam F/m :

$$\kappa_{11} = 7.35 \times 10^{-9}, \kappa_{22} = \kappa_{33} = 8.17 \times 10^{-9},$$

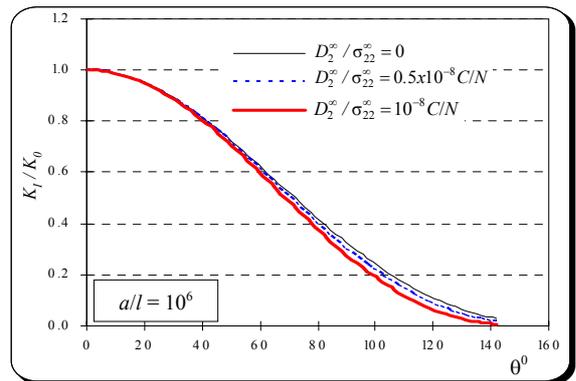
Karakteristik pengaruh penambahan medan listrik positif pada faktor intensitas tegangan modulus I ditunjukkan pada gambar 3 (a), (b), (c) untuk material PZT4, PZT5 dan PZT5H.



(a) Material PZT4



(b) Material PZT5

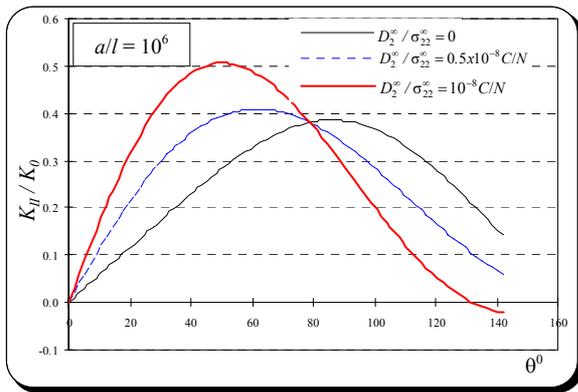


(c) Material PZT5H

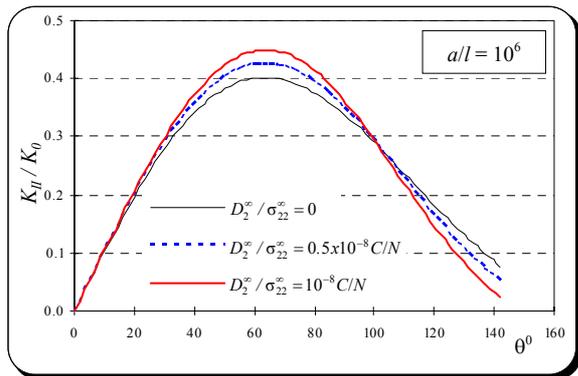
Gambar 3. Karakteristik K_I pada material PZT4, PZT5 dan PZT5H

Dapat diobservasi bahwa faktor intensitas tegangan modulus I akan mengalami penurunan dengan bertambahnya medan tegangan listrik positif dan dengan semakin besarnya sudut retak cabang. Di antara ketiga material piezoelektrik, K_I material PZT4 memperlihatkan sifat yang paling sensitif terhadap penambahan medan listrik positif, terlihat dari paling besarnya penurunan faktor intensitas tegangan modulus I untuk penambahan medan listrik positif yang sama. Material PZT5H adalah yang paling tidak sensitif terhadap penambahan medan listrik positif. Jika sensitifitas material PZT5H dibandingkan dengan sensitifitas material PZT5, maka menunjukkan perbedaan yang kecil. Perbedaan yang kecil ini disebabkan oleh sifat-sifat elektro-mekanik kedua material yang mirip.

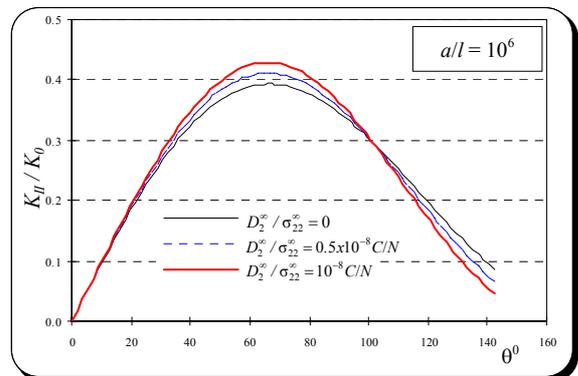
Untuk modulus II, pengaruh penambahan medan listrik positif pada faktor intensitas tegangan modulus II ditunjukkan pada gambar 4.



(a) Material PZT4



(b) Material PZT5



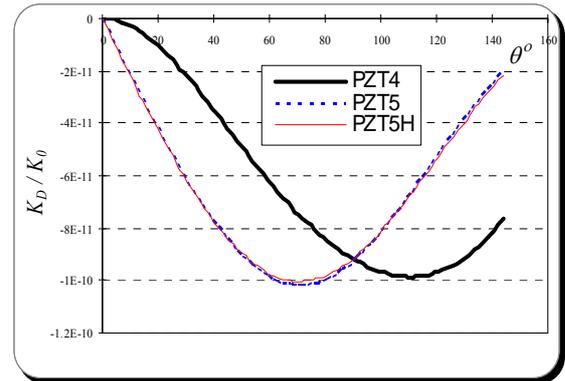
(c) Material PZT5H

Gambar 4 Karakteristik K_{II} pada material PZT4, PZT5 dan PZT5H

Dari gambar 4 terlihat bahwa faktor intensitas tegangan modulus II akan meningkat dengan semakin besarnya sudut retak cabang. Setelah mencapai puncak pada sudut tertentu, faktor intensitas tegangan ini akan berkurang dengan bertambahnya sudut retak cabang. Perubahan yang juga bisa diamati adalah bahwa faktor intensitas tegangan modulus II di bawah sudut tertentu (berbeda untuk setiap material) mempunyai nilai yang paling besar untuk $D_{22}^{\infty} / \sigma_{22}^{\infty} = 0$ dan nilai yang paling kecil untuk $D_{22}^{\infty} / \sigma_{22}^{\infty} = 10^{-8} C/N$. Setelah melewati sudut (tertentu tersebut) akan terjadi hal yang sebaliknya yaitu nilai K_{II} untuk $D_{22}^{\infty} / \sigma_{22}^{\infty} = 10^{-8} C/N$ adalah yang paling besar, sedangkan $D_{22}^{\infty} / \sigma_{22}^{\infty} = 0$

bernilai paling kecil. Variasi K_{II} untuk material PZT4 adalah yang terbesar dan PZT5H adalah yang terkecil untuk ketiga material. Ini menunjukkan bahwa K_{II} material PZT4 adalah yang paling sensitif terhadap perubahan medan listrik positif. Sedangkan material PZT5 dan PZT5H mempunyai hasil yang berdekatan, hal ini disebabkan oleh sifat material yang berdekatan pula.

Pengaruh tegangan mekanik terhadap faktor intensitas *electric displacement*, K_D pada ketiga jenis material piezoelektrik ditunjukkan pada gambar 5. Grafik ini menunjukkan efek kopel dari material piezoelektrik.

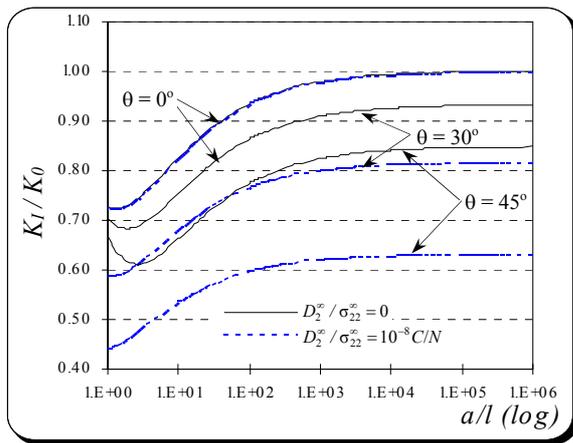


Gambar 5 Pengaruh tegangan mekanik terhadap *electric displacement*, K_D pada material PZT4, PZT5 dan PZT5H

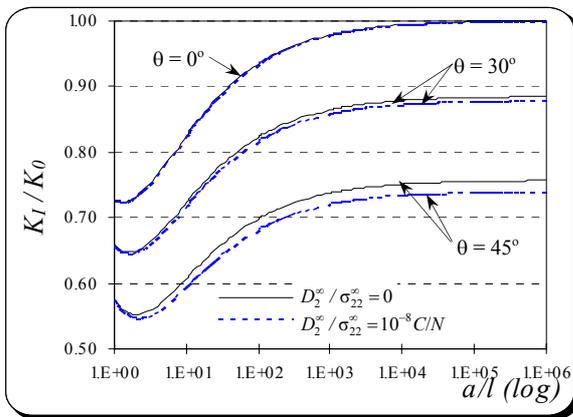
Karena adanya sifat “coupling” antara elastic dengan elektrik, terlihat bahwa faktor intensitas *electric displacement*, K_D , akan meningkat (arah medan listriknya adalah negatif) dengan semakin besarnya sudut retak cabang sampai sudut tertentu. Nilai K_D kemudian akan mengecil setelah mencapai titik tertinggi tersebut. Nilai K_D tertinggi dimiliki oleh material PZT5 diikuti oleh material PZT5H dan kemudian PZT4. Tetapi sudut terjadinya K_D tertinggi ini, paling besar pada material PZT4, kemudian diikuti oleh material PZT5H dan PZT5.

Gambar 6 memperlihatkan pengaruh panjang retak cabang pada perubahan faktor intensitas tegangan modulus I untuk ketiga material pada berbagai arah percabangan retak. Karakteristik SIF modulus I menunjukkan bahwa untuk $D_{22}^{\infty} / \sigma_{22}^{\infty} = 10^{-8} C/N$, K_I akan mengecil dengan semakin kecilnya a/l sampai pada titik tertentu, kemudian akan membesar sampai $a/l = 1$. Jika dibandingkan dengan gambar 4 untuk $a/l = 10^6$ terlihat bahwa perubahan terbesar faktor intensitas tegangan modulus I dialami oleh material PZT4 lalu diikuti oleh material PZT5 dan PZT5H. Hal ini menunjukkan bahwa material PZT4 adalah material yang paling sensitif terhadap perubahan panjang retak cabang dibandingkan material PZT5 dan PZT5H.

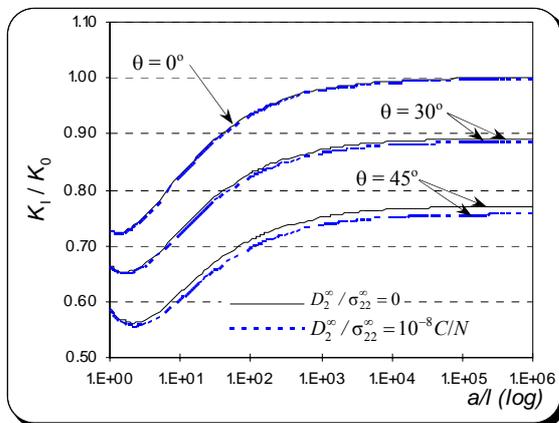
Penambahan medan listrik positif akan mempengaruhi faktor intensitas tegangan modulus I di manaterdapat tegangan kombinasi antara tarik dan geser ($\sigma_{22}^{\infty} = \sigma_{21}^{\infty}$).



(a) Material PZT4



(b) Material PZT5

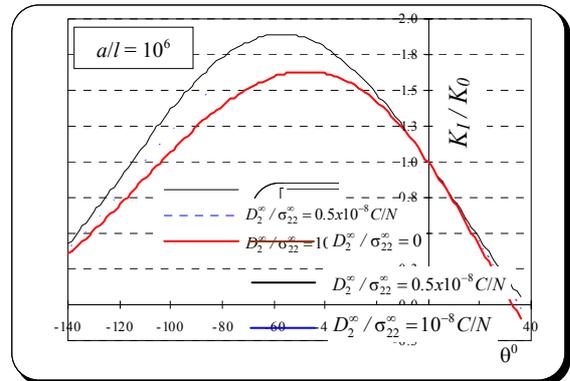


(c) Material PZT5H

Gambar 6 Pengaruh dimensi dan arah cabang retak terhadap K_I pada material PZT4, PZT5 dan PZT5H

Gambar 7 menunjukkan karakteristik K_I yang mendapat beban medan listrik positif untuk material PZT4. Terlihat bahwa dengan adanya tegangan geser yang bekerja pada material (besarnya sama dengan tegangan tarik) maka akan dihasilkan nilai K_I yang berbeda untuk sudut positif dan sudut negatif retak cabang. Hal ini dapat dijelaskan bahwa tegangan geser tidak simetri terhadap sumbu x_1 , tetapi berlawanan arah, sehingga sudut positif dan sudut negatif akan menghasilkan nilai K_I yang berbeda. Pada material PZT4 terlihat bahwa K_I terbesar

adalah untuk $D_2^\infty / \sigma_{22}^\infty = 0$, terus $D_2^\infty / \sigma_{22}^\infty = 0.5 \times 10^{-8} \text{ C/N}$ dan $D_2^\infty / \sigma_{22}^\infty = 10^{-8} \text{ C/N}$. Ini menunjukkan bahwa penambahan medan listrik positif akan memperkecil K_I pada kondisi $\sigma_{22}^\infty = \sigma_{21}^\infty$.



Gambar 7 Perubahan K_I , di mana $\sigma_{22}^\infty = \sigma_{21}^\infty$ pada Material PZT4, PZT5 dan PZT5H

7. KESIMPULAN

Solusi lengkap untuk retak cabang pada media keramik piezoelektrik telah dipresentasikan dalam makalah ini. Permasalahan kondisi batas diselesaikan berdasarkan Stroh Formalism yang telah dikembangkan untuk retakan pada piezoelektrik oleh Qin. Karakteristik faktor intensitas tegangan untuk berbagai variabel mekanik-elektrik ditampilkan dalam bentuk grafik-grafik, sehingga memudahkan observasi sensitivitas SIF terhadap arah cabang retakan.

Nilai faktor intensitas tegangan modulus I, K_I , akan semakin kecil dengan semakin besarnya medan listrik positif dan semakin besarnya sudut retak cabang. Faktor intensitas tegangan modulus II, K_{II} , akan semakin besar dengan semakin besarnya medan listrik positif dan sudut retak cabang, dan setelah mencapai sudut tertentu, K_{II} akan berkurang dengan semakin besarnya medan listrik positif dan sudut retak cabang. Perubahan K_I dan K_{II} pada material PZT4 adalah yang paling sensitif terhadap penambahan medan listrik positif dibandingkan dengan perubahan material PZT5 dan PZT5H.

Sumber dana :

Dana Penelitian yang didasari artikel ini adalah melalui dana "Research on Ceramic for Tribological Machine Components", International Linkage Research Program, Grant No. 002/IRL/ URGE/2000, Directorate General for Higher Education, Indonesia, 2000/2001.

8. DAFTAR PUSTAKA

1. Sosa, H., (1981), "On the fracture mechanics of piezoelectric solids", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 18, pp. 1502-1511.
2. Broek, D., (1986), *Elementary Engineering Fracture Mechanics*, Martinus Nijhoff Publisher, Dordrecht.

3. Qing-Hua Qin *, Yiu-Wing Mai, (2000), "Crack branch in piezoelectric bimaterial system", *International Journal of Engineering Science, Vol 38*, pp. 673±693.
4. Qin, Q.-H. and Mai, Y. W. (1999), "Crack Branch in Piezoelectric Bimaterial System", *Int. J. Solids and Structures, Vol. 38*, pp. 673-693.
5. Zhu, T. and Yang. Wei. (1998), "Crack Kinking in Piezoelectric Solid", *Int. J. Solids and Structures Vol. 36*, pp. 5013-5027.
6. Q.H. Qin, Y.W. Mai, (2005), "Thermo-electro-elastic Green's function and application for bimaterial of piezoelectric materials", *Arch. Appl. Mech.*, to appear.
7. K. Hayashi, S. Nemat-Nasser, (1981), "Energy-release rate and crack kinking under combined loading", *J. Appl. Mech. Vol. 48*, pp 520±524.
8. Shen, S., Kuang, Z.B., (1998), "Interface Crack in Bi-Piezothermoelastic Media and the Interaction with a point heat source", *International Journal of Solid and Structures, V.45, No. 30*, pp.3899-3915.
9. A.N. Stroh, *Dislocations and cracks in anisotropic elasticity*, Phil. Mag. 7 (1958) 625±646.
10. Hills, D. A., Kelly, P. A., Dai, D. N. and Korsunsky, A. M., (1996), *Solution of Crack Problems: The Distributed Dislocation Technique*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht.
11. F. Erdogan, G.D. Gupta, (1972), *On the numerical solution of singular integral equations*, Q. Appl. Math. Vol. 32, pp. 525± 534.
12. Ting, T.C.T., (1992), "Image singularities of Green's functions for anisotropic elastic half-space and bimaterials", *Q. J. Mech. Appl.Math, Vol 45*, pp. 119±139.

9. LAMPIRAN

Stroh Formalism untuk Benda Piezoelektrik

Dalam sistem koordinat kartesian, solusi persamaan keseimbangan untuk deformasi dua dimensi di mana u_k dan ϕ hanya tergantung pada x_1 dan x_2 dapat dinyatakan dengan

$$u_J = a_J f(z) \quad (J = 1,2,3,4) \quad (L.1)$$

dimana

$$z = x_1 + px_2, \quad u_4 = \phi \quad (L.2)$$

Dan p, a_j adalah konstanta yang harus ditentukan harganya. Dalam notasi matriks

$$\mathbf{u} = \mathbf{a}f(z) \quad (L.3)$$

Sehingga \mathbf{u}, \mathbf{a} adalah empat vektor dan \mathbf{u} disebut dengan *displacement* yang digeneralisasi.

Persamaan (1), (2), (L.3) dan (L.4) dikombinasikan menjadi satu persamaan

$$[\mathbf{Q} + p(\mathbf{R} + \mathbf{R}^T) + p^2\mathbf{T}] \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (L.5)$$

Matriks 4 x 4 \mathbf{Q} dan \mathbf{T} adalah simetri tetapi tidak definit positif dan nonsingular. Penentuan elemen matriks \mathbf{Q}, \mathbf{R} dan \mathbf{T} mengikuti aturan sebagai berikut :

$$E_{iJKm} = \begin{cases} C_{ijkm}, & J, K = 1,2,3 \\ e_{mij}, & J = 1,2,3 : K = 4 \\ e_{ikm}, & K = 1,2,3 : J = 4 \\ -k_{im}, & J = K = 4 \end{cases} \quad (L.6)$$

ij or kl	11	22	33	23 or 32	13 or 31	12 or 21
P or q	1	2	3	4	5	6
$c_{pq} = C_{ijkl} ; e_{ip} = e_{ikl}$						

Untuk bidang $x_1 - x_2$

$$Q_{IK} = E_{1IK1} ; R_{IK} = E_{1IK2} ; Q_{IK} = E_{2IK2} \quad (L.7)$$

Untuk bidang $x_1 - x_3$

$$Q_{IK} = E_{1IK1} ; R_{IK} = E_{1IK3} ; Q_{IK} = E_{3IK3} \quad (L.8)$$

Vektor fungsi tegangan yang digeneralisasi, ϕ didefinisikan sebagai

$$\phi = \mathbf{b}f(z), \quad \mathbf{b} = (\mathbf{R}^T + p\mathbf{R})\mathbf{a} = \frac{-1}{p} (\mathbf{Q} + p\mathbf{R})\mathbf{a} \quad (L.9)$$

dengan

$$\sigma_{i1} = -\phi_{i,2}, \quad \sigma_{i2} = -\phi_{i,1}, \quad D_1 = -\phi_{4,2}, \quad D_2 = \phi_{4,1} \quad (L.10)$$

Solusi umum yang didapatkan dengan superposisi delapan solusi dari persamaan (L.3) dan (L.9), dihubungkan dengan delapan nilai eigen p , adalah

$$\mathbf{u} = 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{\alpha=1}^4 a_{\alpha} f_{\alpha}(z_{\alpha}) \right\}, \quad \phi = 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{\alpha=1}^4 b_{\alpha} f_{\alpha}(z_{\alpha}) \right\} \quad (L.11)$$

dengan Re berarti bagian real.

Pada sebagian besar aplikasi, diasumsikan

$$f_{\alpha}(z_{\alpha}) = q_{\alpha} f_{\alpha}(z_{\alpha}) \quad (\alpha \text{ tidak dijumlah}) \quad (L.12)$$

Maka persamaan (L.11) direduksi menjadi, dalam notasi matriks,

$$\mathbf{u} = 2 \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{A} \langle f(z_{*}) \rangle q \right\}, \quad \phi = 2 \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{B} \langle f(z_{*}) \rangle q \right\} \quad (L.13)$$

di mana \mathbf{A} dan \mathbf{B} adalah matriks 4 x 4 yaitu

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4], \quad \mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4] \quad (L.14)$$

dan $\langle f(z_{*}) \rangle$ adalah matrik diagonal 4 x 4

$$\langle f(z_{*}) \rangle = \operatorname{diag} \langle f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4) \rangle \quad (L.15)$$

Matrik Kekakuan Material Keramik Piezoelektrik

Konstanta material piezoelektrik PZT4 direferensikan pada bidang x_1-x_3 . Matriks Q, R dan T pada penjabaran *Stroh formalism* menjadi

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q} &= \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{55} & e_{15} \\ 0 & 0 & e_{15} & -k_{11} \end{bmatrix}, & \mathbf{R} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_{13} & e_{31} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{55} & 0 & 0 & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\
 \mathbf{T} &= \begin{bmatrix} c_{55} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} & e_{33} \\ 0 & 0 & e_{33} & -k_{33} \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{L.16}$$

Sedangkan konstanta material piezoelektrik PZT5 dan PZT5H direferensikan pada bidang x_1-x_2 , sehingga matriks Q, R dan T menjadi

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q} &= \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 & e_{11} \\ 0 & c_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ e_{11} & 0 & 0 & -k_{11} \end{bmatrix}, & \mathbf{R} &= \begin{bmatrix} 0 & c_{12} & 0 & 0 \\ c_{66} & 0 & 0 & e_{26} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_{12} & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\
 \mathbf{T} &= \begin{bmatrix} c_{66} & 0 & 0 & e_{26} \\ 0 & c_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ e_{26} & 0 & 0 & -k_{22} \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{L.17}$$