

PENYELESAIAN PENDEKATAN PROBLEM KONTAK HERTZIAN PADA KASUS KONTAK ANTARA RODA DAN REL

I M. Parwata^{1,2}, I W. Puja¹, B. Budiwantoro¹, S.S. Brodjonegoro¹

¹Laboratorium Perancangan Mesin, Fakultas Teknik Mesin dan Dirgantara, ITB.

²Jurusan Teknik Mesin, Fakultas Teknik, Universitas Udayana

Kontak: I M. Parwata, md_parwata@yahoo.co.uk

Ringkasan. Dalam makalah ini disajikan penyelesaian pendekatan problem kontak Hertzian antara roda dan rel. Perumusan ini menggunakan cara pendekatan analitik dan numerik terutama pada penyelesaian elliptic integral dengan tujuan untuk mendapatkan persamaan dimensi kontak, deformasi, tekanan kontak dan kontur tegangan. Radius kelengkungan utama rel dibuat semakin kecil yaitu dari 300-260 mm. Pemodelan dengan elemen hingga juga dilakukan sebagai alternatif penyelesaian pendekatan tekanan kontak. Di samping itu pula dengan Metode Elemen Hingga (MEH) dapat memperlihatkan distribusi tegangan kontak dan pengaruh kontak pada kedalaman tertentu. Kemudian hasil perhitungan dari persamaan ini dan MEH dibandingkan dengan model persamaan oleh Fischer dan Wiest [1] dan nilai eksak yang dihitung dengan persamaan Hertz [2]. Hasilnya memperlihatkan bahwa perhitungan dimensi kontak dan tekanan kontak maksimum memberikan hasil yang lebih akurat. Perbedaan hasil yang didapat dengan metode Hertz adalah antara 1,47-2,37% untuk tekanan kontak maksimum dan 2,45-3,02% untuk sumbu mayor ellips. Perbedaan hasil dengan menggunakan MEH juga memberikan hasil yang cukup akurat yaitu 0,09-3,5% untuk tekanan kontak maksimum.

Abstract. In this paper, an approach of the formulation for Hertzian contact problem between wheel and rail is presented. This formulation used analytic and numerical approach, especially in solving elliptic integrals in order to obtain dimension relations of the contact, deformation, contact pressure and stress contours. The main curvature radius range of the smaller rail are from 300-260 mm. Modeling with finite element solution was also performed as an alternative approach solution to the contact pressure. Besides, it is with Finite Element Method (FEM) can show the contact stress distribution and the influence of contact at a certain depth. The result of this formulation and Finite Element approach are compared with the model equation by Fischer and Wiest [1] and the exact value calculated by Hertz's equation [2]. The results showed that the calculation of the contact dimensions and maximum contact pressure give more conform results. The difference results obtained by the method of Hertz are between 1.47-2.37% for the maximum contact pressure and 2.45-3.02% for the major axis the ellipse. The difference results using finite element method also gives conforming results of 0.09-3.5% for the maximum contact pressure.

Keywords: *approximate solution, contact dimension, finite element, Hertzian contact, maximum contact pressure, wheel and rail contact.*

1 Pendahuluan

Teori Hertz [2] merupakan teori dasar yang umum digunakan untuk menyelesaikan problem kontak ellips. Kontak antara roda dan rel pada kepala rel merupakan salah satu contoh penerapan teori ini. Pada teori ini diasumsikan bahwa permukaan kontak sangat halus, tidak ada gesekan sehingga hanya tekanan normal yang diteruskan antara kedua benda dan model material adalah linier elastik.

Penyelesaian dengan teori Hertz ini memerlukan penyelesaian *elliptic integral* dalam perhitungan dimensi kontak dan deformasi [3]. Integral ini sangat kompleks dan hanya dapat diselesaikan secara numerik. Beberapa peneliti telah mempublikasikan penyelesaian pendekatan terhadap problem kontak ellips ini, antara lain: Brewe dan Hamrock [4] dengan memperkenalkan rasio setengah sumbu ellips dan harga pendekatan *elliptic integral* sebagaimana dipublikasikan Greenwood [5] dengan persamaan berikut:

$$r = \frac{a}{b} \approx 1,0339 \left(\frac{B}{A} \right)^{0,636} \quad (1)$$

$$\varepsilon \approx 1,0003 + 0,5968 \frac{A}{B} \quad (2)$$

di mana r adalah rasio setengah sumbu mayor dan minor ellips, ε merupakan nilai pendekatan *elliptic integral*, a merupakan setengah sumbu mayor ellips pada daerah kontak, b adalah setengah sumbu minornya, sedangkan A dan B merupakan konstanta yang dihubungkan dengan kelengkungan benda yang berkontak. Kemudian pendekatan ini disempurnakan lagi oleh Hamrock dan Brewe [6] dengan memberikan persamaan

$$r = \frac{a}{b} \approx \left(\frac{B}{A} \right)^{2/\pi}, \quad \varepsilon \approx 1 + \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \left(\frac{A}{B} \right) \quad (3)$$

Selanjutnya Greenwood [5] memperkenalkan hubungan rasio setengah sumbu ellips dengan persamaan asytmot sederhana

$$\left(\frac{b}{a} \right) \sim \left(\frac{A}{B} \right)^{2/3} \quad (4)$$

dan perkalian $ab=c^2$ dimana

$$c = \left(\frac{3}{4} \frac{PR_e}{E^*} \right)^{1/2} \quad (5)$$

P merupakan resultan gaya kontak dan E^* adalah modulus elastis ekivalen dari material benda yang berkontak. R_e adalah radius efektif. Deformasi (δ) kemudian dihitung dengan

$$\delta = \frac{1}{2}(Aa^2 + Bb^2) \quad (6)$$

Perhitungan deformasi dengan persamaan ini memberikan kesalahan lebih kecil dari 2% untuk selang $B/A \leq 10$. Tekanan kontak maksimum p_0 pada kontak ellips dihitung sebagai berikut:

$$p_0 = \frac{1}{\pi} \left(\frac{6PE^{*2}}{R_e^2} \right)^{1/2} \quad (7)$$

Persamaan ini memberikan hasil perhitungan tekanan kontak yang cukup akurat pada selang $B/A \leq 5$.

Tanaka [7] memperkenalkan metode baru untuk menyederhanakan perhitungan *elliptic integral* pada perhitungan dimensi kontak menjadi persamaan yang lebih sederhana sehingga bisa dihitung secara integrasi numerik dengan Microsoft Excel maupun program sederhana FORTRAN. Dengan cara ini perhitungan tekanan kontak menghasilkan perbedaan 0,0005% dibandingkan dengan hasil secara eksak dari Hertz. Kemudian Antonie et al. [8] memformulasikan model ellips Hertzian dengan menggunakan pendekatan empiris eksplisit untuk menghitung dimensi, deformasi, dan tekanan kontak maksimum dengan ketelitian 0,003% dan dapat digunakan pada selang yang lebih lebar dengan menyempurnakan nilai γ (eksponen B/A) yang telah didapatkan oleh Brewe dan Hamrock. Fischer dan Wiest [1] membuat perumusan pendekatan yang lebih sederhana dan mudah dikerjakan secara manual untuk dimensi, tekanan kontak maksimum, dan deformasi. Perumusan ini sangat praktis digunakan untuk mempercepat proses perhitungan karena tidak memerlukan nilai parameter Hertz. Parameter ini biasanya didapat dengan menggunakan tabel atau grafik. Namun perumusan tersebut masih memberikan perbedaan hasil dengan teori Hertz terhadap tekanan kontak berkisar antara 4-5% dan cenderung menghasilkan selisih yang lebih besar bila diterapkan pada rel yang dengan variasi kelengkungan utama yang lebih kecil.

Berdasarkan pada hal tersebut maka pada makalah ini dilakukan upaya untuk memperbaiki akurasi perhitungan dimensi kontak, deformasi, maupun tekanan kontak maksimum. Pendekatan yang dilakukan adalah seperti dilakukan oleh Fischer dan Wiest [1] untuk menyelesaikan *elliptic integral* tetapi pada saat regresi diupayakan menghasilkan faktor korelasi yang lebih besar atau mendekati 1. Dengan demikian hasil perhitungan dimensi kontak, tekanan kontak maksimum, dan deformasi yang didapat akan semakin akurat. Keakuratan ini akan memberikan hasil yang akurat pula pada aplikasi selanjutnya seperti perhitungan gaya creep, pemodelan aus, maupun optimasi profil roda dan rel.

Penerapan teori Hertz pada kasus kontak antara roda dengan rel dapat dilakukan pada bagian *tread* roda dan rel. Pada kontak yang terjadi antara *flange* roda dan *gage corner* atau *gage face* rel metode ini kurang tepat diterapkan karena radius benda yang berkontak cukup kecil dibandingkan dengan radius area kontak yang terjadi [9]. Untuk mengatasi hal ini maka Metode Elemen Hingga (MEH) juga banyak digunakan. Di samping itu MEH dapat memperlihatkan kelakuan kontak roda rel pada kedalaman tertentu dan menggambarkan distribusi tegangan. Pada makalah ini pendekatan MEH juga dilakukan sebagai cara lain untuk mendapatkan tekanan kontak maksimum.

Persamaan Hertz juga mengalami perkembangan agar dapat diterapkan pada model aplikasi yang lain. Hal ini dilakukan oleh Hanson dan Puja [10] yang membuat perumusan elastik, perpindahan dan tegangan pada benda elastis dengan bidang isotropic parallel dengan permukaan kontak. Perumusan ini menggunakan variasi pembebanan ellips dari traksi normal dan traksi geser. Liu et al. [11] mengembangkan teori Hertz untuk titik kontak berbentuk lingkaran dan ellips termasuk untuk benda yang dilapisi. Bentuk pengembangannya adalah tekanan kontak maksimum, radius kontak, dan pendekatan kontak. Pendekatan kontak yang dihasilkan adalah dalam bentuk beban yang diberikan, radius ekivalen, dan modulus ekivalen yang melibatkan kehadiran lapisan. Pengembangan formula Hertz dimaksudkan untuk memudahkan penggunaan dan memberikan perkiraan yang akurat tentang karakteristik kontak.

2 Penyelesaian Dengan Integrasi Numerik *Elliptic Integral*

Pada kasus kontak roda dan rel, empat kelengkungan utama dianggap tegak lurus terhadap sebuah bidang. Bidang ini disebut dengan bidang kontak. Kedua benda elastis bertemu pada suatu titik kontak. Dekat titik kontak pada kondisi sebelum dibebani hubungan berikut dapat diperoleh seperti yang terdapat dalam pustaka [12,3]:

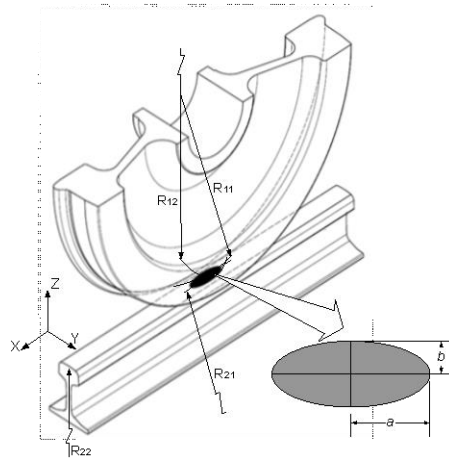
$$A = \frac{1}{2R_{11}}, \quad B = \frac{1/R_{12} + 1/R_{22}}{2} \quad (8)$$

Pada Gambar 1, R_{11} adalah radius ke arah melingkar roda pada titik kontak dan R_{12} adalah radius ke arah *transversal profile* roda yang mana menjadi tak berhingga untuk roda konis. Pada rel R_{22} adalah radius kelengkungan ke arah transversal permukaan rel dan R_{21} adalah radius ke arah memanjang yang mana besarnya menjadi tak berhingga. Dari hubungan ini terlihat bahwa A dan B merupakan fungsi kelengkungan utama roda dan rel.

Berdasarkan publikasi Tanaka [7] serta Fischer dan Wiest [1] didapatkan hubungan kuantitas A dan B sebagai berikut

$$A = \frac{3P}{2\pi} \cdot \left(\frac{2(1-\nu^2)}{E} \right) \cdot \frac{1}{a^3} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{rd\theta}{[(1 + \tan^2 \theta)^3 (\cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta)]^{\frac{1}{2}} \cos \theta} \quad (9)$$

$$B = \frac{3P}{2\pi} \cdot \left(\frac{2(1-\nu^2)}{E} \right) \cdot \frac{1}{a^3} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{rd\theta}{[(1 + r^2 \tan^2 \theta)^3 \cos^2 \theta]^{\frac{1}{2}}} \quad (10)$$



Gambar 1 Kontak roda rel dan dimensi kontak

Di mana P merupakan beban kontak, E adalah modulus elastik material roda dan rel dalam hal ini diasumsikan sama, ν adalah Poisson rasio, $r = a/b$ merupakan perbandingan antara setengah sumbu major a dan setengah sumbu minor b yang dinamakan parameter elliptic dan θ adalah sudut antara sumbu kelengkungan utama roda dan rel.

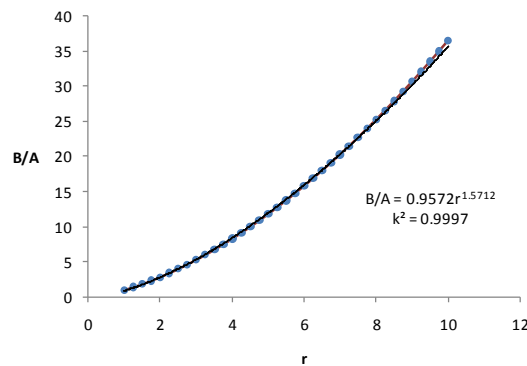
Integral pada Persamaan (9) dan (10) adalah tipe *elliptic integral*. Integral ini diselesaikan dengan menggunakan bantuan program MATLAB® yaitu *evalf* untuk mengevaluasi nilai integral tersebut. Kemudian nilai A dan B dihubungkan dengan parameter *elliptic* r . Nilai r yang digunakan adalah $1 \leq r \leq 10$. Selanjutnya hubungan ini diplot dalam grafik seperti pada Gambar 2. terlihat bahwa hubungan antara r dan B/A memiliki faktor korelasi $k^2 = 0,9997$ ini berarti persamaan regresi hampir sempurna sehingga,

$$B/A = \alpha r^\beta, \quad \beta = 1,5712, \quad \alpha = 0,9572 \quad (11)$$

Demikian pula hubungan r dengan B , dari plot grafik menunjukkan faktor korelasi yang sangat signifikan $k^2 = 0,9998$. Persamaan regresi yang dihasilkan adalah $B = 0,8399r^{2,0804}$ sehingga,

$$B = \frac{3P}{2\pi} \cdot \left(\frac{2(1-\nu^2)}{E} \right) \cdot \frac{1}{\alpha^{1/3}} \cdot \varepsilon_1^{\varepsilon_2} r^{\varepsilon_2} \quad \varepsilon_1 = 0,8399 \quad \varepsilon_2 = 2,0804 \quad (12)$$

Harga α dan β ini sangat sesuai dengan yang didapatkan oleh Brewe dan Hamrock [4], seperti yang ditulis pada makalah Fischer dan Wiest [1] bahwa hubungan antara B/A dan r adalah $B/A = 0,95r^{1,572}$.



Gambar 2 Hubungan antara r dengan B/A

Dari Persamaan (11) dan (12), persamaan setengah sumbu major dan minor ellips pada daerah kontak dapat diturunkan menjadi

$$a = P^{1/3} \cdot \left(\frac{3\varepsilon_1}{\pi} \right)^{1/3} \cdot \left(\frac{1-\nu^2}{E} \right)^{1/3} \cdot \alpha^{-\varepsilon_2/3\beta} \left(\frac{B}{A} \right)^{\varepsilon_2/3\beta} \cdot \frac{1}{B^{1/3}} \quad (13)$$

$$b = P^{1/3} \cdot \left(\frac{3\varepsilon_1}{\pi} \right)^{1/3} \cdot \left(\frac{1-\nu^2}{E} \right)^{1/3} \cdot \alpha^{\frac{[(3-\varepsilon_2)]}{3\beta}} \cdot \left(\frac{B}{A} \right)^{\frac{[(\varepsilon_2-3)]}{3\beta}} \cdot \frac{1}{B^{1/3}} \quad (14)$$

Tekanan kontak maksimum p_0 dihitung dengan persamaan tekanan kontak maksimum dari teori Hertz dengan mensubstitusikan harga a dan b pada Persamaan (13) dan (14)

$$p_0 = \frac{3P}{2} \cdot \left(\frac{1}{ab\pi} \right) \quad (15)$$

Untuk perhitungan deformasi δ dengan menyelesaikan integral pada persamaan berikut

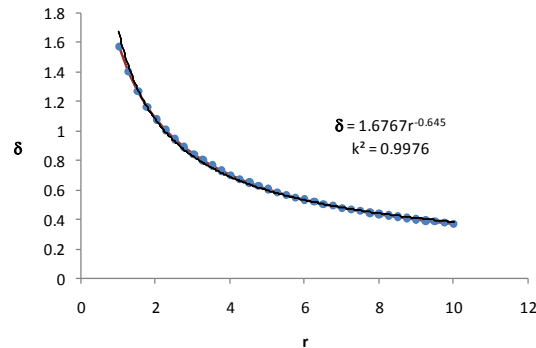
$$\delta = \frac{3P}{2\pi} \cdot \left(\frac{2(1-\nu^2)}{E} \right) \cdot \frac{1}{b^3} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{[(\cos^2\theta + r^2 \sin^2\theta)]^{\frac{3}{2}}} \quad (16)$$

Integral tersebut diselesaikan secara numerik seperti pada penyelesaian integral Persamaan (9) dan (10) di atas. Hasil integrasi selanjutnya diplot dalam grafik hubungan antara r dan δ seperti ditunjukkan pada Gambar 3. Terlihat bahwa faktor korelasinya adalah $k^2 = 0,9975$. Dari hasil regresi didapatkan hubungan antara r dengan δ seperti berikut

$$\delta = \lambda r^{-\eta} \quad \text{dimana } \lambda = 1,6767 \text{ dan } \eta = 0,6450 \quad (17)$$

Dengan memasukkan Persamaan (17) dan (14) ke Persamaan (16) maka didapat besarnya deformasi antara kedua benda elastis

$$\delta = P^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{9}{\pi^2 \cdot \varepsilon_1} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{1-\nu^2}{E} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot \lambda \cdot \alpha^{\left(\frac{\varepsilon_2 + 3\eta - 3}{3\beta} \right)} \cdot \left(\frac{B}{A} \right)^{\frac{3-\varepsilon_2-3\eta}{3\beta}} \cdot B^{\frac{1}{3}} \quad (18)$$



Gambar 3 Hubungan antara r dengan δ

Dengan memasukkan harga α , β , ε_1 , ε_2 , λ , η kedalam Persamaan (13), (14), (18) maka persamaan dimensi kontak dan deformasi menjadi

$$a = 0,9472 \cdot P^{1/3} \cdot \left(\frac{1 - \nu^2}{E} \right)^{1/3} \cdot \left(\frac{B}{A} \right)^{0,4414} \cdot B^{-1/3} \quad (19)$$

$$b = 0,9212 \cdot P^{1/3} \cdot \left(\frac{1 - \nu^2}{E} \right)^{1/3} \cdot \left(\frac{B}{A} \right)^{-0,1951} \cdot B^{-1/3} \quad (20)$$

$$\delta = 1,7071 \cdot P^{1/3} \cdot \left(\frac{1 - \nu^2}{E} \right)^{2/3} \cdot \left(\frac{B}{A} \right)^{-0,2154} \cdot B^{1/3} \quad (21)$$

Persamaan-persamaan yang dihasilkan pada pembahasan di atas, digunakan untuk menghitung dimensi dan deformasi. Kemudian tekanan kontak yang terjadi pada kontak antara roda dan rel dihitung dengan Persamaan (15) dengan harga sumbu mayor dan minor ellips sesuai Persamaan (19) dan (20).

Penerapan pendekatan ini diterapkan pada kasus berikut: akibat kontak antara roda dan rel terjadi perubahan radius kelengkungan utama rel R_{22} misalkan karena mengalami keausan, deformasi plastis, maupun retak pada permukaan, dalam hal ini radius kelengkungan utama rel diasumsikan bervariasi mulai dari 300, 290, 280, 270, dan 260 mm. Sedangkan roda yang digunakan memiliki radius $R_{11} = 460$ mm dan R_{12} dengan besar tak berhingga. Modulus Elastis material roda dan rel adalah sama sebesar 200 GPa dan Poisson rasio 0,3. Besarnya beban yang diberikan pada sumbu roda sebesar 80 kN [1]. Perhitungan dimensi kontak dan tekanan kontak maksimum menggunakan perumusan hasil pendekatan oleh Fischer dan Wiest [1] dan perumusan dari makalah ini. Kemudian hasilnya dibandingkan dengan penyelesaian eksak sesuai teori Hertz [2].

Perbandingan hasil perhitungan dimensi kontak dan tekanan kontak maksimum diperlihatkan seperti Tabel 1. Terlihat dimensi setengah sumbu mayor ellips hasil dari pendekatan pada makalah ini lebih mendekati nilai eksak dibandingkan dengan menggunakan pendekatan Fischer dan Wiest [1], sedangkan untuk setengah sumbu minor ellips pendekatan Fischer dan Wiest [1] memberikan hasil yang lebih baik. Untuk tekanan kontak maksimum, dengan menggunakan pendekatan pada makalah ini memberikan hasil yang lebih akurat. Hal ini dapat dilihat pada Tabel 2 dengan persentase perbedaan hasil antara perhitungan dengan pendekatan Fischer, dan Wiest [1] maupun metode pada makalah ini dengan metode Hertz.

Tabel 1 Perbandingan hasil perhitungan dimensi kontak dan tekanan kontak maksimum dengan pendekatan Fischer metode Hertz

Radius R ₂₂ (mm)	Nilai dengan Pendekatan Fisher			Nilai dengan pendekatan ini			Nilai eksak dengan Teori Hertz		
	a (mm)	b (mm)	p ₀ (N/mm ²)	a (mm)	b (mm)	p ₀ (N/mm ²)	a (mm)	b (mm)	p ₀ (N/mm ²)
260	6.727	4.653	1 221	6.998	4.743	1 151	7.216	4.658	1168
270	6.696	4.746	1 202	6.969	4.839	1 133	7.178	4.749	1154
280	6.668	4.838	1 184	6.942	4.932	1 116	7.140	4.838	1138
290	6.640	4.929	1 167	6.916	5.025	1 099	7.101	4.923	1123
300	6.613	5.018	1 151	6.891	5.116	1 084	7.063	5.009	1110

Tabel 2 Persentase perbedaan hasil antara pendekatan Fischer dan Wiest [1], pendekatan pada makalah ini dengan metode Hertz.

Radius R ₂₂ (mm)	Perbedaan hasil dengan Pendekatan Fisher			Perbedaan hasil dengan pendekatan ini		
	a	b	p ₀	a	b	p ₀
260	6.78%	0.11%	4.49%	3.02%	1.82%	1.47%
270	6.71%	0.06%	4.14%	2.90%	1.88%	1.85%
280	6.61%	0.01%	4.05%	2.76%	1.96%	1.98%
290	6.49%	0.11%	3.94%	2.60%	2.06%	2.12%
300	6.37%	0.18%	3.70%	2.45%	2.13%	2.37%

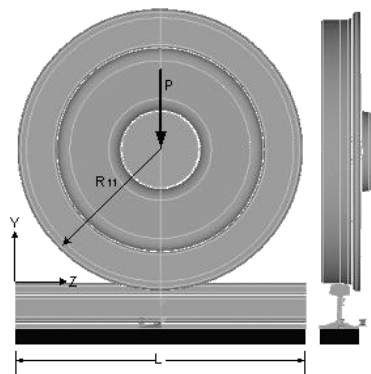
3 Pendekatan Numerik Dengan MEH

Pendekatan elemen hingga untuk menyelesaikan problem kontak antara roda dan rel telah banyak dilakukan. Telliskviv. dan Olofsson [13] memodelkan kontak roda dan rel pada dua kasus kontak, kasus pertama adalah kontak dibuat pada *gauge corner* rel dan kasus kedua adalah kontak dibuat pada kepala rel. Metode perhitungan yang digunakan adalah dengan menggunakan metode Hertz, program CONTACT dan MEH. Pada kedua kasus tersebut, perhitungan tekanan kontak maksimum dengan metode Hertz dan program CONTACT memberi hasil yang sama. Untuk kasus pertama: terdapat perbedaan yang sangat signifikan antara penyelesaian dengan MEH dan metode Hertz dan program CONTACT. Metode Hertz dan program CONTACT memberikan hasil 3 kali lebih besar daripada analisis dengan MEH, hal ini akibat asumsi *half space* dan penggunaan model material elastik-plastik. Untuk kasus kedua: ada perbedaan sekitar 25-30 persen antara MEH dan metode Hertz maupun dengan program CONTACT, pada kasus ini asumsi *half space* sesuai sehingga perbedaan hasil ini akibat penggunaan model material plastis pada analisis MEH. Selanjutnya Sladkowski dan Sitarz [14] menganalisis pengaruh interaksi antara profil roda dan rel pada daerah kontak dan distribusi tegangan. Dilakukan simulasi dengan memvariasikan sudut serang dan profile roda dan rel. Sudut

serang dicoba pada 0° dan 2° , sedangkan profile yang dicoba adalah profile roda standar dan profile roda baru dengan tebal *flange* 33 mm dan 30 mm. Hasilnya, memberikan bahwa profile roda yang baru, mampu mengurangi tekanan kontak pada *flange* antara 20 sampai 50%. Kemudian Wiest et al. [15] membandingkan empat metode perhitungan untuk mendapatkan harga tekanan kontak, luas area kontak dan deformasi (*mutual approach*), yaitu teori Hertz, Program CONTACT, MEH untuk elastik, dan MEH untuk elastik-plastik. Analisis dilakukan pada kasus kontak roda dengan *crossing*, memberikan hasil yang sangat akurat pada area kontak, tekanan kontak dan deformasi.

3.1 Pemodelan Elemen hingga

Pada kasus kontak antara roda dan rel dimana kontak yang terjadi pada kepala rel, dilakukan analisis dengan MEH. Pemodelan dilakukan dengan menempatkan roda di atas rel dan membuat satu titik kontak pada kepala rel. Rel yang digunakan dalam pemodelan adalah type rel UIC 54 dengan radius kelengkungan utama adalah 300 mm, sedangkan roda adalah type profil ORES 1002 dengan radius rolling nominal $R_{11} = 460$ mm. Panjang rel yang digunakan dalam pemodelan ini adalah $L = 500$ mm dengan inklinasi 1:40. Gambar model pembebanan roda dan rel seperti diperlihatkan pada Gambar 4.



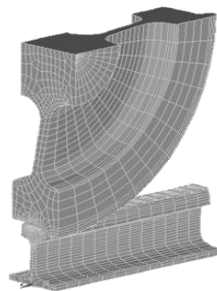
Gambar 4 Model pembebanan roda rel

Beban poros roda P adalah 80 kN [1]. Bagian bawah rel dianggap ditumpu dengan tumpuan jepit. Selanjutnya, dengan mengasumsikan profil roda tetap dan radius kelengkungan utama rel divariasikan mulai dari 300, 290, 280, 270 dan 260 mm.

Analisis MEH dilakukan dengan menggunakan software *Ansys Multiphysic*. Pada pemodelan elemen hingga 3 dimensi, rel dan roda akan dimodelkan sebagai benda elastis. Model elemen hingga diperlihatkan seperti Gambar 5. Arah memanjang rel adalah arah longitudinal diindikasikan dengan sumbu Z ,

arah lateral diindikasikan dengan sumbu X dan arah vertikal diindikasikan dengan sumbu Y. Elemen yang digunakan memodelkan roda dan rel adalah 20 *node brick element* dan elemen kontak yang digunakan adalah CONTA175 dan TARGE170.

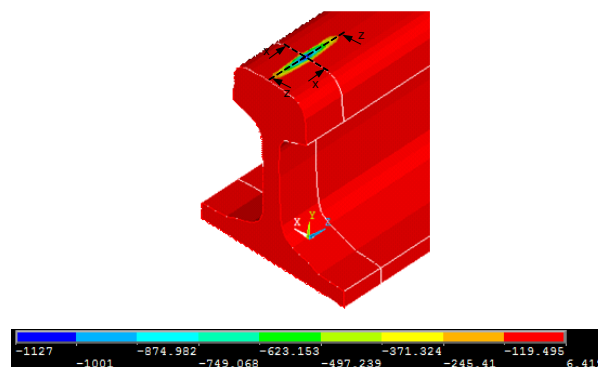
Pemodelan pasangan kontak dilakukan dengan menganggap roda sebagai *Target* dan Rel sebagai *Contact*. Kontak pada roda merupakan tipe *surface to surface contact* sedangkan rel diperlakukan sebagai *node to surface contact*. Untuk mempercepat eksekusi maka dibuat meshing yang lebih halus pada sekitar titik kontak roda dan rel, sedangkan pada bagian lainnya dibuat lebih kasar.



Gambar 5 Model Elemen hingga

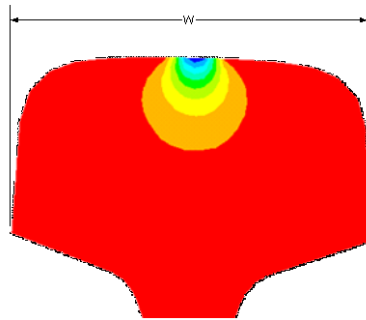
3.2 Kontur Tegangan Kontak dan Perbandingan dengan Metode Hertz

Tegangan kontak maksimum terjadi pada pusat kontak dan area kontak menyerupai ellips beserta besarnya tekanan kontak dan distribusinya ditunjukkan pada Gambar 6. Area kontak ini sesuai dengan yang dimaksud dalam teori Hertz.

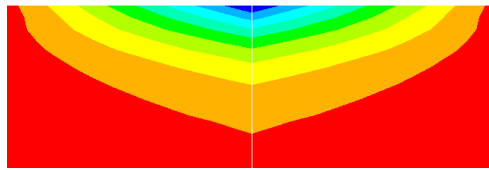


Gambar 6 Tapak Ellips pada rel

Distribusi tegangan kontak pada penampang melintang rel diperlihatkan pada Gambar 7. dan pada arah memanjang diperlihatkan pada Gambar 8. Terlihat tegangan kontak maksimum terjadi pada titik pusat kontak. Hal ini juga sesuai dengan metode Hertz, tetapi dalam kasus ini, distribusi tegangan tidak berbentuk ellips sempurna karena terjadinya deformasi di sekitar area kontak, yang mana dalam teori Hertz hal ini diasumsikan konstan.

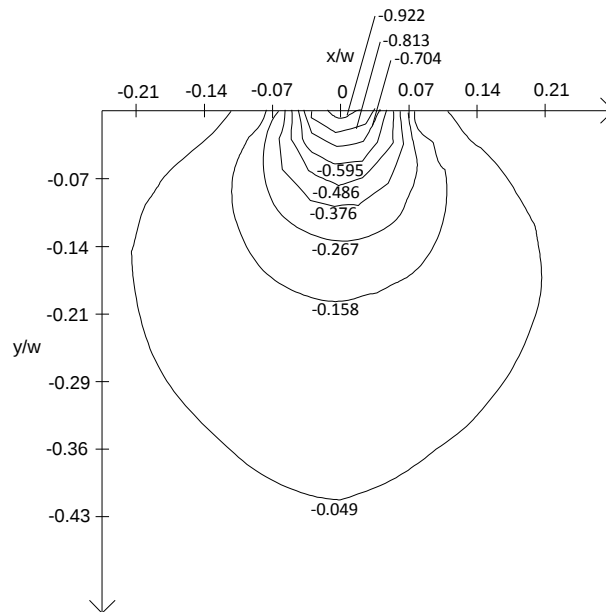


Gambar 7 Kontur tegangan kontak pada penampang X-X



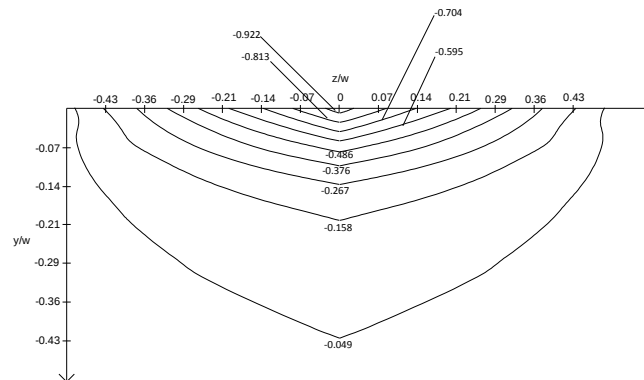
Gambar 8 Kontur tegangan kontak pada penampang Z-Z

Kontur tegangan kontak σ_c ke arah lateral maupun vertical diperlihatkan pada Gambar 9. Gambar ini memperlihatkan hubungan antara perbandingan tegangan kontak dan tekanan kontak maksimum p_0 yang didapat dengan metode Hertz dengan deformasi ke arah lateral dan vertical. Pada makalah ini w adalah lebar kepala rel yaitu sebesar 70 mm seperti ditunjukkan pada Gambar 7.



Gambar 9 Kontur σ_c/p_o pada bidang $Z=0$ untuk radius kelengkungan utama rel 260 mm dengan beban poros $P = 80$ kN

Hasil selengkapnya tekanan kontak maksimum di mana radius kelengkungan utama rel R_{22} divariasikan seperti pada kolom 4 (Tabel 3). Besarnya tekanan kontak ini apabila dibandingkan dengan penyelesaian pendekatan untuk kasus kontak Hertzian terlihat cukup mendekati.



Gambar 10 Kontur σ_c/p_o pada bidang $X=0$ untuk radius kelengkungan utama rel 260 mm dengan beban poros $P = 80$ kN

Perhitungan persentase perbedaan hasil dari keempat metode ini ditampilkan pada Tabel 4. Persentase ini merupakan perbedaan hasil pendekatan maupun analisis elemen hingga terhadap nilai eksak yang dihitung dengan persamaan tekanan kontak maksimum berdasarkan teori Hertz. Terlihat hasil yang cukup mendekati dengan pendekatan pada makalah ini. Perbedaan hasilnya yaitu sekitar 1-2,4 persen. Hasil analisis dengan MEH juga memperlihatkan hasil yang cukup mendekati. Perbedaan hasil yaitu antara 0-3,5 persen.

Tabel 4 juga memperlihatkan bahwa semakin kecil R_{22} perbedaan hasil tekanan kontak maksimum dengan pendekatan pada makalah ini memperlihatkan perbedaan yang semakin kecil, sedangkan hasil dengan MEH memperlihatkan bahwa semakin besar radius R_{22} perbedaan hasilnya cenderung mengecil kecuali untuk radius $R_{22} = 290$ mm. Hal ini disebabkan karena *aspect ratio* elemen yang dihasilkan cukup besar. Sehingga hasilnya memberikan perbedaan hasil yang tidak sebanding dengan perbedaan hasil perhitungan tekanan kontak pada radius R_{22} lainnya.

Tabel 3 Tekanan Kontak Maksimum menurut Pendekatan oleh Fischer, Pendekatan ini, MEH dan Hertz

Radius R_{22} (mm)	Fisher (N/mm ²)	Pendekatan pada makalah ini (N/mm ²)	MEH (N/mm ²)	Hertz (N/mm ²)
260	1221	1151	1127	1168
270	1202	1133	1130	1154
280	1184	1116	1141	1138
290	1167	1099	1105	1123
300	1151	1084	1111	1110

Tabel 4 Perbedaan hasil Tekanan Kontak Maksimum menurut Pendekatan oleh Fischer, Pendekatan ini, MEH dengan Hertz

Radius R_{22} (mm)	Fisher	Pendekatan pada makalah ini	MEH
260	4.49%	1.47%	3.51%
270	4.14%	1.85%	2.08%
280	4.05%	1.98%	0.26%
290	3.94%	2.12%	1.60%
300	3.70%	2.37%	0.09%

4 Kesimpulan

Persamaan pendekatan yang didapat pada makalah ini memberikan hasil yang cukup mendekati. Perbedaan hasil perhitungan tekanan kontak maksimum sebesar 1,47-2,37% bila dibandingkan dengan hasil perhitungan berdasar teori Hertz. Dimensi kontak juga memberikan hasil yang cukup mendekati terutama perhitungan sumbu mayor ellips yaitu sebesar 2,45-3,02%. Perhitungan berlaku untuk selang rasio setengah sumbu mayor dan minor ellips r terletak pada $1 \leq r \leq 10$. Analisis tekanan kontak maksimum dengan elemen hingga juga memberikan hasil yang cukup mendekati dengan perbedaan hasil sebesar 0,09-3,51% terhadap hasil perhitungan dengan teori Hertz.

5 Daftar Pustaka

- [1] Fischer, F.D., and Wiest, M., *Approximate Analytical Model for Hertzian Elliptical Wheel/Rail or Wheel/Crossing Contact Problems*, ASME Journal of Tribology, Vol.130, 1-3, 2008
- [2] Garg, V.K., and Dukkipati, R.V., *Dynamics of Railway Vehicle Systems*, Academic Press Canada, Ontario, 106-107, 1984
- [3] Johnson, K.L., *Contact Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, 85-106, 1985
- [4] Brewe, D.E., and Hamrock B.J., *Simplified solution for elliptical contact deformation between two elastic solids*, ASME Journal of Lubrication Technology, Vol.99, 485-387, 1977
- [5] Greenwood, J.A., *Analysis of elliptical Hertzian*, Tribology International, Vol.30, 235-237, 1997
- [6] Hamrock, B.J. and Brewe, D.E., *Simplified solution for stresses and deformations*, ASME Journal of Lubrication Technology, Vol.105, 171-177, 1983
- [7] Tanaka, N., *A New Calculation Method of Hertz Elliptical Contact Pressure*, ASME Journal of Tribology, Vol.123, 887-889, 2001
- [8] Antoine, J.F., Visa, C., Sauvey, C. and Abba, G., *Approximate Analytical Model for Hertzian Elliptical Contact Problems*, ASME Journal of Tribology, Vol.128, 660-664, 2006
- [9] Liu, Y., Liu, L., and Mahadevan, S., *Analysis of subsurface crack propagation under rolling contact loading in railroad wheels using FEM*, Engineering Fracture Mechanics, Vol.74, 2659-2674, 2007

- [10] Hanson, M.T., and Puja, IGN W., *The Elastic Field Resulting from Elliptical Hertzian Contact of Transversely Isotropic Bodies: Closed Form Solutions for Normal and shear Loading*, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol.64, 457-465, 1997
- [11] Liu, S.B., Peyronnel, A., Wang, Q.J. and Keer, L.M., *An extension of the Hertz theory for three-dimensional coated bodies*, Tribology Letters, Vol.18, 303-314, 2005
- [12] Iwnicki, S., *Handbook of Railway Vehicle Dynamics*, CRC Press Taylor & Francis Group, Boca Raton, 88-92, 2006
- [13] Telliskivi, T., and Olofsson, U., *Contact mechanics analysis of measured wheel-rail profiles using the finite element method*, J. Rail Rapid Transit, Vol.215, 65-72, 2000
- [14] Sladkowski, M.S., *Analysis of wheel-rail interaction using FE software*, Wear, Vol.258, 1217-1223, 2005
- [15] Wiest, M., Kassa, E., Davesa, X.V., Nielsen, J.C.O. and Ossberger, H., *Assessment of methods for calculating contact pressure in wheel-rail/switch contact*, Wear, Vol.265, 1439-1445, 2008