

METODA ELEMEN HINGGA PADA TORSI BATANG BERPENAMPANG SEMBARANG

B. Sutjiatmo¹⁾ dan Mulyadi¹⁾

Metoda elemen hingga akan diterapkan pada kasus torsi pada batang berpenampang sembarang. Elemen yang dipakai adalah elemen segitiga. Penyusunan fungsi interpolasi, matriks kekakuan, matriks gaya dan persamaan simultan diterangkan. Kasus yang dipilih adalah torsi pada penampang segiempat, siku, I dan poros pejal beralur. Hasilnya dibandingkan dengan hasil analitis.

I. PENDAHULUAN.

Metoda elemen hingga (MEH) berkembang dari metoda matriks dalam analisa struktur. Dengan bantuan komputer digital, MEH berkembang dengan pesat. Saat ini, MEH tidak terbatas digunakan pada analisa struktur saja, tetapi MEH dapat digunakan pada setiap kontinum atau "field problem", seperti misalnya pada bidang mekanika fluida, perpindahan panas, dan peristiwa fisika lainnya.

Tulisan ini membahas langkah dasar MEH dengan elemen sederhana segitiga dan fungsi interpolasi linear. Kasus yang dipilih adalah kasus elastomekanik bidang. Sebagai contoh dipilih kasus torsi pada berbagai penampang, yaitu penampang segi empat panjang, penampang siku, penampang I dan penampang poros beralur pasak. Hasilnya dibandingkan dengan hasil analitis.

Metoda elemen hingga merupakan suatu metoda analisa numerik untuk mendapatkan jawab pendekatan dari berbagai persoalan teknik. Dalam banyak kasus teknik, geometri obyek yang dipelajari adalah tidak teratur atau sembarang. Walaupun persamaan keadaan dan kondisi batas persoalan dapat diturunkan, tetapi karena bentuk batas yang sembarang, jawab analitik yang sederhana dari persoalan tersebut tidak dapat diperoleh. Usaha pemecahan dapat dilakukan dengan beberapa penyederhanaan sehingga persoalan dapat dipecahkan. Cara tersebut dapat berhasil, tetapi seringkali cara tersebut menjurus ke jawab yang sangat tidak tepat atau bahkan jawab yang salah. Karena itu, dalam kasus demikian, diperlukan suatu metoda numerik yang dapat menghasilkan jawab pendekatan yang cukup teliti. Salah satu metoda numerik tersebut adalah MEH.

MEH dipakai untuk mencari jawab yang berlaku pada suatu daerah yang dibagi dalam banyak sub daerah kecil atau elemen. MEH memberikan jawab pendekatan sepotong-sepotong dari persamaan keadaan yang ada. Dasar premis dari MEH adalah bahwa jawab untuk suatu daerah dapat didekati dengan menggantikannya dengan suatu kumpulan jawab untuk elemen-elemen yang menyusun daerah tersebut. Karena elemen dapat dibentuk sembarang, maka elemen-elemen dapat menyusun bangun yang kompleks.

Persoalan kontinum merupakan persoalan dengan jumlah besaran tak diketahui yang tak berhingga. Pembagian kontinum menjadi elemen hingga mengubah persoalan menjadi persoalan dengan besaran tak diketahui yang berhingga. Fungsi pendekatan yang sering pula disebut fungsi interpolasi disusun dalam suku-suku yang merupakan harga besaran fisik pada titik tertentu yang disebut titik simpul. Titik simpul biasanya dipilih pada batas elemen di mana elemen berikutnya tersambung. Harga besaran pada simpul dan fungsi interpolasi menentukan secara lengkap harga besaran yang dicari di dalam elemen. Dalam MEH, harga besaran pada simpul menjadi besaran yang tak diketahui. Jika semua besaran yang tak diketahui ini diperoleh, fungsi interpolasi menentukan besaran yang dicari di seluruh daerah.

Dengan demikian, jelas bahwa ketelitian jawab ditentukan oleh jumlah elemen dan fungsi interpolasi yang dipilih. Fungsi interpolasi yang dipilih harus memenuhi kondisi kompatibilitas.

Langkah-langkah dalam MEH adalah sebagai berikut :

1. Pembagian kontinum menjadi elemen-elemen.

1) Jurusan Mesin ITB.

berbagai bangun elemen dapat dipilih, misalnya segitiga, segi empat panjang atau segi empat sembarang untuk elemen bidang dan tetrahedron, prisma tegak atau hexahedron sembarang untuk elemen ruang. Pemilihan bangun elemen ditentukan dengan perasaan teknik dan pengalaman terdahulu.

2. Pemilihan fungsi interpolasi. Fungsi interpolasi yang menyatakan perubahan besaran di seluruh elemen dipilih. Seringkali, fungsi interpolasi yang dipilih adalah suku banyak karena suku banyak mudah diintegrasi dan diambil turunannya. Derajat suku banyak yang dipilih tergantung dari jumlah simpul yang ada dalam setiap elemen.
3. Penentuan sifat elemen. Sifat elemen dinyatakan dalam persamaan matriks. Penentuan sifat elemen ini dapat dilakukan dengan empat cara yaitu cara langsung, cara variasi, cara 'weighted residual', dan cara balans energi.
4. Penggabungan sifat elemen menjadi sistem persamaan keseluruhan. Persamaan matriks setiap elemen digabung-gabungkan menjadi persamaan matriks yang menyatakan sifat seluruh sistem.
5. Pemecahan sistem persamaan. Sistem persamaan yang merupakan persamaan simultan dipecahkan untuk diperolehnya harga besaran tak diketahui pada simpul. Jika persamaan tersebut linear, pemecahan dapat dilakukan misalnya dengan eliminasi Gauss setelah persamaan dimodifikasi.

MEH dapat digunakan dalam tiga kategori persoalan. Kategori pertama adalah persoalan keseimbangan yang merupakan mayoritas penggunaan MEH. Yang termasuk dalam kategori ini, antara lain, adalah distribusi lendutan atau distribusi tegangan pada mekanika benda padat, distribusi suhu pada benda dengan beban thermal dan distribusi tekanan atau kecepatan pada mekanika fluida. Kategori kedua adalah persoalan frekuensi pribadi dalam mekanika benda padat dan mekanika fluida. Persoalan tersebut merupakan persoalan steady state yang jawabnya berupa penentuan frekuensi pribadi dan mode getaran. Kategori ketiga adalah persoalan dinamika kontinum. Persoalan yang termasuk dalam kategori ini adalah persoalan-persoalan dari kedua kategori pertama dengan dimasukkannya dimensi waktu ke dalamnya.

2. TORSI PADA BATANG YANG TIDAK SILINDRIS

Perhatikan poros Gb. 1 yang mendapat beban torsi T . Dalam kasus ini, ingin diketahui distribusi tegangan geser yang bekerja pada penampangnya. Pemecahan soal ini dilakukan melalui suatu fungsi tegangan ϕ . Dengan memakai persamaan keseimbangan, hukum Hooke, dan persamaan kompatibilitas

serta anggapan bahwa warping tidak tergantung dari posisi penampang, dapat diturunkan hubungan (Timoshenko, 1970).

$$\frac{1}{G} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{1}{G} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + 2\theta = 0 \quad (1)$$

dengan syarat batas $\phi = 0$ di batas penampang, di mana

ϕ = fungsi tegangan

G = modulus geser

θ = sudut puntir per satuan panjang poros

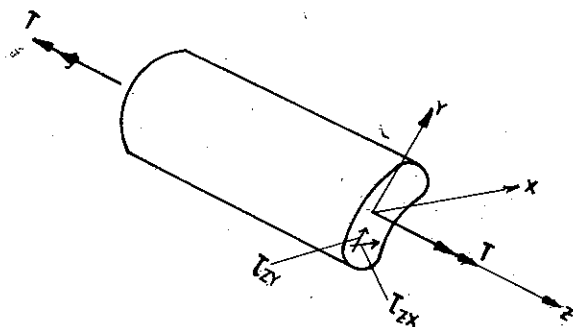
Tegangan geser pada penampang dapat dihitung dari hubungan :

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \phi}{\partial y} ; \tau_{zy} = - \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (2)$$

Hubungan antara torsi T dan fungsi tegangan ϕ dapat dituliskan sebagai :

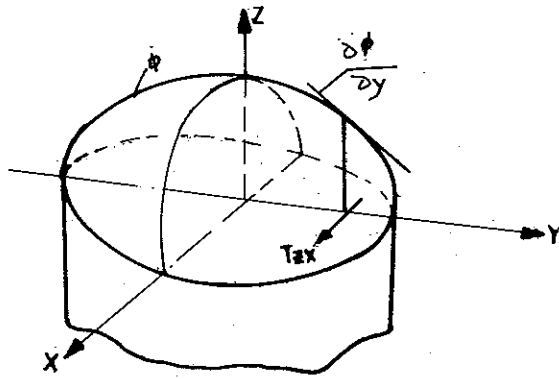
$$T = 2 \int_{\text{luas}} \phi \, dA \quad (3)$$

$$T = 2 \int_{\text{luas}} \phi \, dA$$

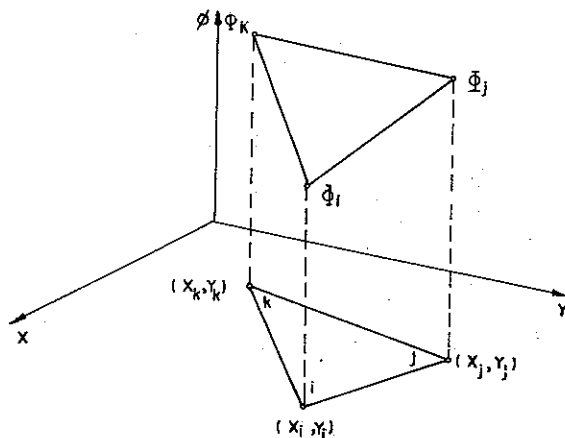


Gb. 1. Poros berpenampang sembarang dengan beban torsi.

Tegangan geser yang dicari dapat diperoleh setelah fungsi tegangan ϕ memenuhi persamaan (1) beserta syarat batasnya diperoleh. Tegangannya dihitung dengan pers. (2). Fungsi tegangan ϕ dapat dipandang sebagai suatu bidang yang menutupi penampang batang, Gb. 2. Momen Torsi sebanding dengan volume di bawah bidang ϕ dan tegangan gesernya merupakan gradien bidang tersebut terhadap arah x dan y .



Gb. 2. Bidang ϕ dan komponen tegangan geser.



Gb. 3. Elemen bidang sederhana.

Perkiraan fungsi ϕ akan dicari dengan metoda elemen hingga. Untuk ini, bidang penampang dibagi-bagi menjadi beberapa elemen. Elemen yang dipilih di sini adalah elemen sederhana yaitu segitiga. Kemudian, dipilih pula fungsi interpolasi, yang merupakan perkiraan fungsi ϕ , yang sederhana yaitu fungsi interpolasi linear.

2.1. Elemen dan Fungsi Interpolasi

Perhatikan elemen segitiga dengan simpul i, j, dan k, Gb. 3. Harga skalar pada simpul masing-masing dinyatakan dengan ϕ_i , ϕ_j , ϕ_k . Dengan mengambil fungsi interpolasi linear, fungsi interpolasi tersebut dapat dituliskan sebagai :

$$\phi = \alpha_1 + \alpha_2 X + \alpha_3 Y \quad (4)$$

di mana α_1 , α_2 , dan α_3 adalah konstanta

Harga ϕ di simpul dapat dituliskan :

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_i \text{ untuk } x = X_i, y = Y_i \\ \phi &= \phi_j \text{ untuk } x = X_j, y = Y_j \\ \phi &= \phi_k \text{ untuk } x = X_k, y = Y_k \end{aligned} \quad (5)$$

Dengan memasukkan pers. (5) ke pers. (4) diperoleh

$$\begin{aligned} \phi_i &= \alpha_1 + \alpha_2 X_i + \alpha_3 Y_i \\ \phi_j &= \alpha_1 + \alpha_2 X_j + \alpha_3 Y_j \\ \phi_k &= \alpha_1 + \alpha_2 X_k + \alpha_3 Y_k \end{aligned} \quad (6)$$

Harga α_1 , α_2 dan α_3 dapat diperoleh dari pers. (6), yaitu :

$$\alpha_1 = \frac{1}{2A} [(X_j Y_k - X_k Y_j) \phi_i + (X_k Y_i - X_i Y_k) \phi_j + (X_i Y_j - X_j Y_i) \phi_k]$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2A} [(Y_j - Y_k) \phi_i + (Y_k - Y_i) \phi_j + (Y_i - Y_j) \phi_k]$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2A} [(X_k - X_j) \phi_i + (X_i - X_k) \phi_j + (X_j - X_i) \phi_k]$$

di mana A adalah luas elemen dan

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{vmatrix} \quad (8)$$

Dengan memasukkan persamaan (7) ke persamaan (4) diperoleh hubungan :

$$\phi = N_i \phi_i + N_j \phi_j + N_k \phi_k \quad (9)$$

di mana

$$N_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y) \text{ dan } \begin{cases} a_i = X_j Y_k - Y_k X_j \\ b_i = Y_j - Y_k \\ c_i = X_k - X_j \end{cases}$$

$$N_j = \frac{1}{2A} (a_j + b_j x + c_j y) \text{ dan } \begin{cases} a_j = X_k Y_i - Y_k X_i \\ b_j = Y_k - Y_i \\ c_j = X_i - X_k \end{cases}$$

$$N_k = \frac{1}{2A} (a_k + b_k x + c_k y) \text{ dan } \begin{cases} a_k = X_i Y_j - X_j Y_i \\ b_k = Y_i - Y_j \\ c_k = X_j - X_i \end{cases}$$

N disebut fungsi bentuk. Sebagai pengecekan, dapat dengan mudah ditunjukkan bahwa harga N_i di simpul i adalah satu, dan nol di simpul j dan k.

Gradien ϕ terhadap x dengan demikian adalah :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \phi_i + \frac{\partial N_j}{\partial x} \phi_j + \frac{\partial N_k}{\partial x} \phi_k \quad (10)$$

Dari pers. untuk N diperoleh

$$\frac{\partial N_\beta}{\partial x} = b_\beta, \quad \beta = i, j, k$$

sehingga

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \beta_i \phi_i + \beta_j \phi_j + \beta_k \phi_k \quad (11)$$

2.2. Penyusunan Persamaan Simultan

Kembali ke masalah semula, di sini ingin dicari fungsi ϕ yang memenuhi pers. (1) beserta syarat batasnya. Salah satu cara pemecahannya adalah melalui matematik variasi. Dalam prinsip variasi, jawab ϕ yang memenuhi pers. (1) beserta syarat batasnya ekuivalen dengan mencari fungsi ϕ yang meminimumkan suatu fungsi variasi berikut :

$$I = \int_V \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 - 2 G \theta \phi \right] dV \quad (12)$$

$$\text{yaitu } \frac{\partial I}{\partial \{\phi\}} = 0.$$

Bagaimana prinsip variasi tersebut dan bagaimana cara mendapatkan fungsi variasi tidak dibahas disini. Pembaca yang berminat dapat mempelajarinya dari buku-buku tentang metoda elemen hingga, misalnya Zienkiewics, 1979.

Dengan mendefinisikan

$$\{g\}^T = \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} \right] \quad (13)$$

dan

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Pers. (12) dapat ditulis sebagai

$$I = \int_V \frac{1}{2} \left[\{g\}^T [D] \{g\} - (2G\theta)\phi \right] dV \quad (15)$$

Lambang $\{ \}$ menyatakan matriks kolom

Karena daerah penampang terbagi-bagi dalam banyak elemen dan setiap elemen mempunyai fungsi ϕ yang berbeda-beda, maka integrasi pada pers. (15) harus dipisah-pisah menjadi integrasi dalam setiap elemen. Sehingga,

$$I = \sum_{e=1}^E \int_V \frac{1}{2} \left[\{g^{(e)}\}^T [D] \{g^{(e)}\} - (2G\theta)^{(e)} \phi^{(e)} \right] dV \quad (16)$$

di mana E adalah jumlah elemen. Pers. (16) dapat dituliskan sebagai

$$I = I^{(1)} + I^{(2)} + \dots + I^{(e)} = \sum_{e=1}^E I^{(e)} \quad (17)$$

di mana $I^{(e)}$ menyatakan kontribusi elemen e . Fungsi I akan minimum bila,

$$\frac{\partial I}{\partial \{\phi\}} = \sum_{e=1}^E \frac{\partial I^{(e)}}{\partial \{\phi\}} = 0 \quad (18)$$

Dari pers. (10) dapat dituliskan

$$\{g^{(e)}\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi^{(e)}}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi^{(e)}}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi^{(e)}}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_p}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_p}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \dots & \frac{\partial N_p}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{bmatrix} \quad (19)$$

atau

$$\{g^{(e)}\} = [B^{(e)}] \{\phi\} \quad (20)$$

Dengan memakai pers. (20), integral $I^{(e)}$ pada pers. (16) dapat dituliskan sebagai

$$I^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \frac{1}{2} \{ \phi \}^T \{ B^{(e)} \}^T [D^{(e)}] \{ B^{(e)} \} \{ \phi \} dV - \int_{V^{(e)}} \{ G \theta \} \{ N^{(e)} \}^T \{ \phi \} dV \quad (21)$$

Turunan $I^{(e)}$ terhadap ϕ menghasilkan

$$\frac{\partial I^{(e)}}{\partial \{\phi\}} = \left(\int_{V^{(e)}} \{ B^{(e)} \}^T [D^{(e)}] \{ B^{(e)} \} dV \right) \{ \phi \} - \int_{V^{(e)}} \{ G \theta \} \{ N^{(e)} \}^T dV \quad (22)$$

atau

$$\frac{\partial I^{(e)}}{\partial \{\phi\}} = \{k^{(e)}\} \{ \phi \} + \{f^{(e)}\} \quad (23)$$

di mana

$$[k^{(e)}] = \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV \quad (24)$$

$$\{f^{(e)}\} = - \int_{V^{(e)}} (G\theta) [N^{(e)}]^T dV \quad (25)$$

Persamaan simultan diperoleh dengan mencari kondisi fungsi I minimum, yaitu pers. (18). Dengan memasukkan pers. (23) ke pers. (18) diperoleh

$$\frac{\partial I}{\partial \{\phi\}} = \sum_{e=1}^E ([k^{(e)}] \{\phi\} + \{f^{(e)}\}) = 0 \quad (26)$$

atau

$$[K] \{\phi\} = \{F\} \quad (27)$$

di mana

$$[K] = \sum_{e=1}^E [k^{(e)}] \quad (28)$$

dan

$$\{F\} = - \sum_{e=1}^E \{f^{(e)}\} \quad (29)$$

Dalam pers. (27), matriks K dapat diinterpretasikan sebagai matriks kekakuan dan matriks F sebagai matriks gaya.

Penyelesaian persamaan simultan pers. (27) menghasilkan harga ϕ di setiap simpul. Tegangan geser yang dicari dihitung dengan pers. (2). Karena fungsi interpolasi yang dipilih adalah linear, maka gradien di seluruh elemen adalah konstan sehingga tegangan geser di seluruh elemen juga konstan. Untuk mendapatkan harga tegangan di simpul diperlukan teknik perata-rataan. Teknik yang dapat dipakai untuk perata-rataan, antara lain, adalah teknik pendekatan konjugasi (segerlind, 1976). Menurut cara ini, tegangan simpul dihitung dengan hubungan,

$$[C] [\tau] = [R]$$

di mana [C] dan [R] merupakan jumlah matriks elemen yang didefinisikan sebagai

$$[c^{(e)}] = \int_V [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] dV$$

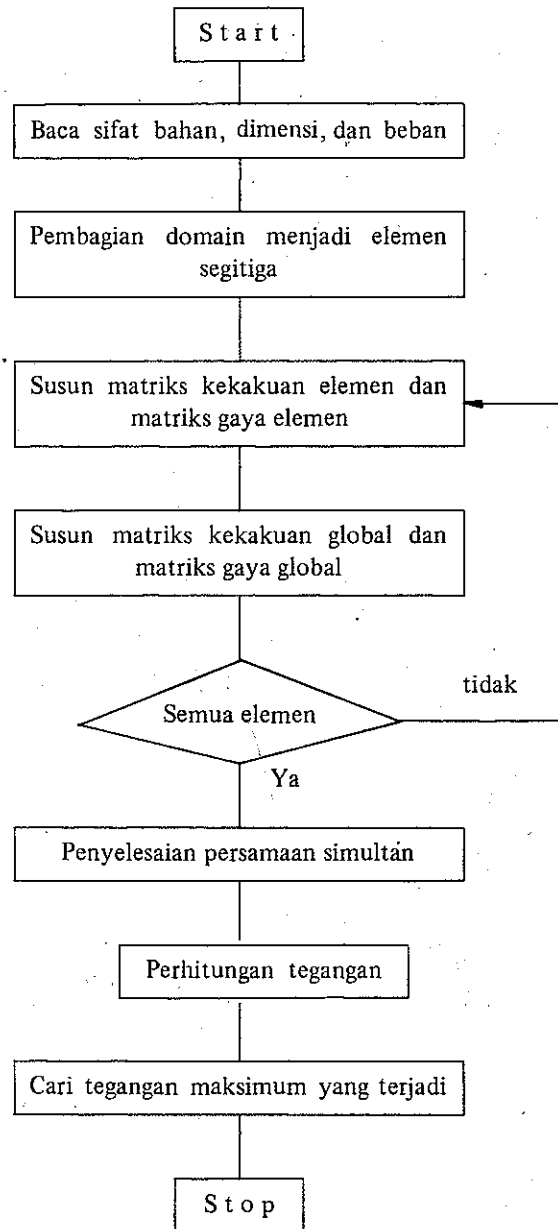
dan

$$[r^{(e)}] = \int_V \bar{\tau} [N^{(e)}]^T dV$$

di mana $\bar{\tau}$ adalah 'resultan tegangan' di elemen.

2.3. Program Komputasi

Prosedur MEH, seperti yang diterangkan pada paragraf 2.2., dapat dibuat program komputasinya. Gaftar alir program komputasi ini dapat dilihat pada Gb. 4. Program komputasinya sendiri dapat dilihat, misalnya, dalam buku Mulyadi, 1983.



Gb. 4. Gaftar alir program komputasi

3. PENERAPAN

Dalam prosedur yang dibahas pada paragraf 2.2., fungsi tegangan ϕ tidak dihitung langsung dari beban torsi T, melainkan dari sudut torsi per satuan panjang poros, θ . Dalam kasus torsi ini, kasus dipecahkan dengan memberikan satu satuan θ , yaitu sebesar

$$\theta = \frac{2\pi}{360.L}$$

di mana L adalah panjang poros. Kemudian, dihitung besar torsi yang diperlukan untuk menghasilkan sudut puntir sebesar satu satuan tersebut. Penghitungan T ini dilakukan dengan memakai pers. (3), yaitu

$$T = 2 \int \phi \, dA$$

luas

$$= 2 \sum_{e=1}^E (\phi_i(e) + \phi_j(e) + \phi_k(e)) A(e)$$

Tegangan sebenarnya yang terjadi dihitung dengan hubungan

$$\tau_s = \frac{T_s}{T} \tau$$

di mana

τ_s = Tegangan geser sebenarnya

T_s = Torsi sebenarnya

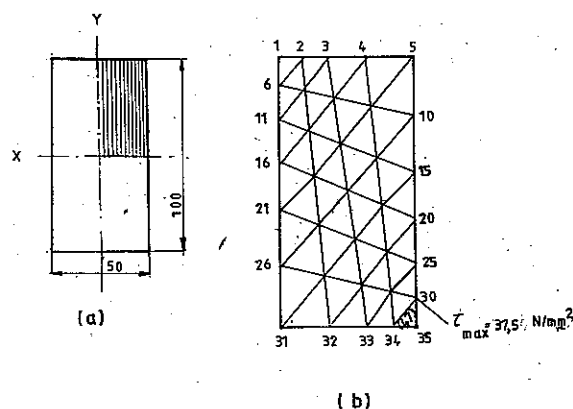
T = Torsi yang diperlukan untuk menghasilkan satu satuan θ

τ = Tegangan geser akibat satu satuan θ

Dalam kasus torsi berikut, beban torsi dipilih 2387 Nm, panjang batang 1 m, dan modulus elastisitas bahan 80.000 N/mm².

3.1. Torsi pada Penampang Segi Empat Panjang

Gambar 5a menunjukkan penampang segi empat panjang. Karena simetri, cukup seperempat bagiannya saja yang dianalisa, yaitu Gb. 5b. Pada Gb. 4b tersebut, terlihat pula pembagian elemennya. Elemen yang dipakai berjumlah 72 buah dan simpulnya 49 buah.

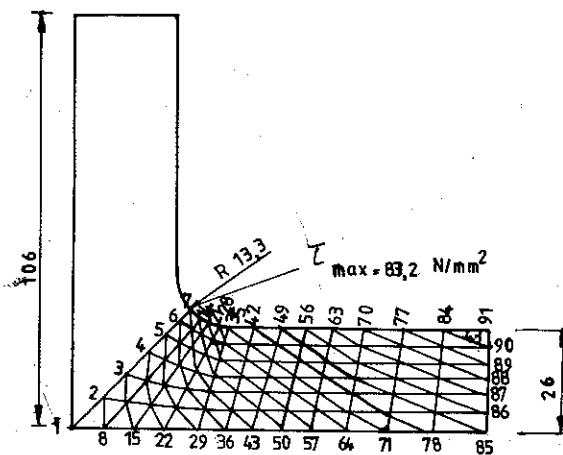


Gb. 5. Torsi pada penampang segi empat panjang

Perhitungan menghasilkan tegangan geser maksimum sebesar 37,5 N/mm² di simpul nomor 30. Dengan teori elastisitas (Timoshenko, 1970) di tempat yang sama diperoleh harga tegangan geser sebesar 38,4 N/mm². Disini terlihat bahwa harga yang diperoleh dengan MEH sangat dekat dengan harga yang diperoleh dengan cara analitik.

3.2. Torsi pada Penampang Siku

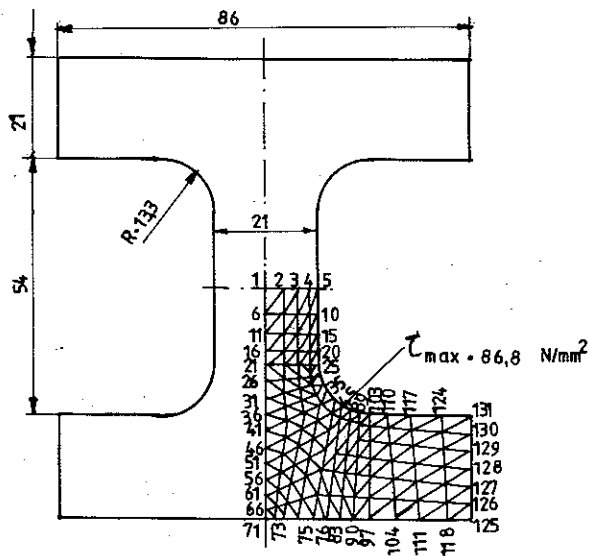
Gb. 6 menunjukkan penampang siku beserta pembagian elemennya. Karena penampang ini mempunyai sumbu simetri, cukup setengah penampang saja yang dianalisa. Elemen yang dipakai berjumlah 144 buah dan simpulnya 91 buah. Perhitungan menghasilkan harga tegangan geser maksimum sebesar 83,2 N/mm² di simpul nomor 7. Lokasi tegangan geser maksimum sesuai dengan analisa menurut teori elastisitas (Timoshenko, 1970). Tegangan geser di simpul no. 4 mendekati nol. Ini pun sesuai dengan teori.



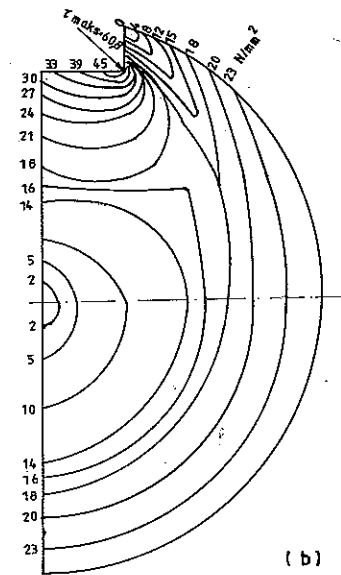
Gb. 6. Torsi pada penampang siku.

3.3. Torsi pada Penampang I

Penampang I mempunyai dua sumbu simetri, karena itu cukup seperempat penampang saja yang dianalisa (Gb. 7). Elemen yang dipakai berjumlah 208 buah dan simpulnya 131 buah. Perhitungan menghasilkan tegangan geser maksimum sebesar 86,8 N/mm² di simpul nomor 40. Lokasi tegangan geser maksimum ini sesuai dengan metoda lapisan sabun (Timoshenko, 1970). Begitu pula, harga tegangan geser yang kecil di simpul nomor 1 dan 46 sesuai dengan metoda lapisan sabun.



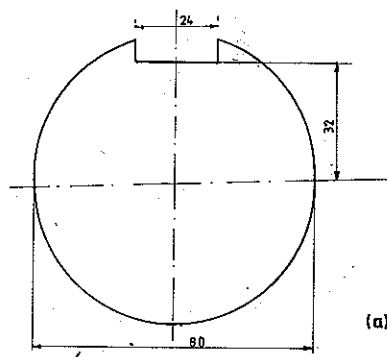
Gb. 7. Torsi pada penampang 1.



Gb. 8. Torsi pada poros pejal beralur.

3.4. Torsi pada Poros Pejal Beralur

Poros ini merupakan model poros dengan sambungan pasak. Karena poros mempunyai satu sumbu simetri, cukup setengah penampang saja yang dianalisa (Gb. 8). Elemen yang dipakai berjumlah 816 buah dan simpulnya 450 buah. Dari hasil yang diperoleh dibuat garis isotegangannya (Gb. 8). Tegangan maksimum yang terjadi adalah $60,8 \text{ N/mm}^2$ di sudut alur. Di titik yang terjauh dari alur diperoleh tegangan geser sebesar $24,6 \text{ N/mm}^2$. Harga ini dekat dengan harga tegangan untuk poros tanpa alur yaitu sebesar $16 T_s / (\pi d^3)$ atau $23,7 \text{ N/mm}^2$. Hasil yang diperoleh memuaskan.



4. PENUTUP

Dengan memilih fungsi interpolasi sederhana dan membuat pembagian elemen yang baik dengan jumlah elemen yang cukup banyak, hasil yang diperoleh dengan MEH cukup memuaskan.

Pembaca yang menginginkan program komputasi yang lengkap untuk kasus torsi ini dan untuk kasus pelat dengan beban gaya yang sebidang dengan pelat tersebut dapat melihatnya misalnya pada buku Mulyadi, 1983. Untuk menerapkan MEH pada berbagai kasus, pembaca harus menambah pengetahuannya tentang penentuan sifat elemen melalui teori elastisitas, cara variasi, cara "weighted residual", dan cara balans energi yang dapat ditemui dalam buku-buku standar tentang metoda elemen hingga.

LITERATUR

1. Mulyadi, Perhitungan tegangan pada beberapa kasus elastomekanik berdimensi dua dengan metoda Elemen Hingga, Tugas Sarjana, Jurusan Mesin ITB, 1983.
2. Segerlind, Applied Finite Element Analysis, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1976.
3. Huebner, The finite element method for engineers, John Wiley & Sons, New York, 1975.
4. Zienkiewics, The finite element method, 3rd Ed. Tata Mc. Graw-Hill Publ. Co. Ltd, New Delhi, 1979.