DASAR METODA SUBSTRUKTUR

B. Sutjiatmo *

RINGKASAN

Pemecahan masalah struktur dengan jumlah elemen besar seringkali tidak dapat dilakukan dengan bantuan komputer kecil. Metoda substruktur merupakan metoda yang memungkinkan analisa struktur melalui analisa substrukturnya. Dengan metoda ini persamaan simultan struktur keseluruhan dikondensasikan menjadi beberapa persamaan simultan kecil sehingga memungkinkan penyelesaian masalah struktur kompleks dengan bantuan komputer kecil. Tulisan ini membahas dasar metoda substruktur tersebut dengan disertai contoh penerapannya.

1. Pendahuluan

Pemecahan masalah statika struktur yang mempunyai jumlah elemen besar merupakan masalah berukuran besar. Metoda substruktur merupakan salah satu cara untuk menangani masalah berukuran besar tersebut. Dengan metoda substruktur tersebut, struktur dibagi-bagi menjadi beberapa bagian yang disebut substruktur. Masing-masing substruktur dianalisa dan kemudian dibuat analisa gabungannya. Melalui analisa gabungan tersebut, sebagian besaran simpul pada substruktur, yaitu simpul batas antar substruktur dapat dihitung. Kemudian besaran simpul lain dihitung dengan analisa setiap substruktur. Dengan demikian pemecahan statika struktur besar dilakukan dengan memecahnya menjadi pemecahan struktur kecil-kecil. Metoda ini memungkinkan penyelesaian masalah struktur kompleks dengan bantuan komputer kecil.

Tulisan ini membahas dasar metoda substruktur yang meliputi prosedur pengolahan matematik dan penerapannya. Untuk mengikuti pembahasan ini pembaca hendaknya telah menguasai dasar metoda lendutan untuk memperjelas metoda substruktur ini, dalam tulisan ini diberikan pula contoh penerapannya. Sebagai contoh dipilih masalah struktur yang sederhana dengan maksud supaya perhitungannya tidak terlalu rumit dan prosedurnya dapat diikuti dengan mudah.

2. Metoda Substruktur

Gambar 1 menunjukkan suatu struktur yang tidak digambarkan pembebanannya. Struktur tersebut dibagi-bagi misalnya menjadi tiga buah substruktur, yaitu substruktur A, B dan C seperti terlihat pada Gambar 1a. Pada setiap substruktur akan terdapat sejumlah simpul batas antar substruktur dan sejumlah simpul dalam. Gambar 1b, menunjukkan simpul-simpul batas dan simpul-simpul dalam dari substruktur B.

Untuk substruktur B, dapat dituliskan hubungan antara lendutan simpul dan gaya simpul sebagai :

$$\left[K^B\right]\left\{D^B\right\} = \left\{P^B\right\} \tag{1}$$

di mana :

$\left[K^B\right]$ = matriks kekakuan substruktur B

$\left\{D^B\right\}$ = matriks lendutan substruktur B

$\left\{P^B\right\}$ = matriks gaya substruktur B

Urutan matriks lendutan dapat diubah dengan menuliskan terlebih dulu lendutan simpul dalam dan kemudian baru dituliskan lendutan simpul batasnya. Dengan urutan tersebut, dan dengan manipulasi matematik persamaan (1) dituliskan sebagai :

$$\left[\begin{array}{c:c} K_{dd}^B & K_{db}^B \\ \hdashline K_{db}^B & K_{bb}^B \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} D_d^B \\ \hdashline D_b^B \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} P_d^B \\ \hdashline P_b^B \end{array}\right\} \tag{2}$$

Persamaan (2) dapat dituliskan :

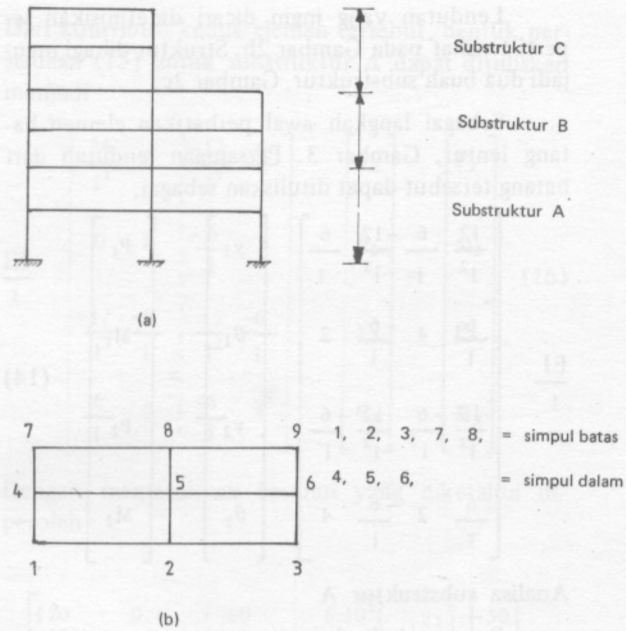
$$\left[K_{dd}^B\right]\left\{D_d^B\right\} + \left[K_{db}^B\right]\left\{D_b^B\right\} = \left\{P_d^B\right\} \tag{3a}$$

$$\left[K_{bd}^B\right]\left\{D_d^B\right\} + \left[K_{bb}^B\right]\left\{D_b^B\right\} = \left\{P_b^B\right\} \tag{3b}$$

Dari persamaan (3a) dapat diperoleh :

$$\left\{D_d^B\right\} = -\left[K_{dd}^B\right]^{-1}\left[K_{db}^B\right]\left\{D_b^B\right\} + \left[K_{dd}^B\right]^{-1}\left\{P_d^B\right\} \tag{4}$$

* Jurusan Mesin ITB.



Gambar 1. Analisa substruktur.

(a) Contoh pembagian struktur menjadi substruktur.

(b) Simpul batas dan simpul dalam dari substruktur.

Persamaan (4) dimasukkan ke persamaan (3b) diperoleh :

$$-\left[K^{B}_{bd}\right]\left[K^{B}_{dd}\right]^{-1}\left[K^{B}_{db}\right]\left\{D^{B}_{b}\right\}+\left[K^{B}_{bb}\right]\left[D^{B}_{b}\right]$$

$$=\left\{P_{b}\right\}^{B}-\left[K^{B}_{bd}\right]\left[K^{B}_{dd}\right]^{-1}\left\{P^{B}_{d}\right\} \qquad (5)$$

Misalkan :

$$\left[K^{B}_{bb}\right]-\left[K^{B}_{bd}\right]\left[K^{B}_{dd}\right]^{-1}\left[K^{B}_{db}\right]=\left[\bar{K}^{B}_{bb}\right] \qquad (6)$$

dan

$$\left\{P^{B}_{b}\right\}-\left[K^{B}_{bd}\right]\left[K^{B}_{dd}\right]^{-1}\left\{P^{B}_{d}\right\}=\left\{\bar{P}^{B}_{b}\right\} \qquad (7)$$

Dengan persamaan (6) dan (7), persamaan (5) dapat dituliskan :

$$\left[\bar{K}^{B}_{bb}\right]\left\{D^{B}_{b}\right\}=\left\{\bar{P}^{B}_{b}\right\} \qquad (8)$$

Persamaan (8) dikatakan sebagai kondensasi dari persamaan (2).
Dengan demikian ditunjukkan bahwa persamaan (2) selalu dapat diubah menjadi persamaan (8).
Dari persamaan (8) tersebut, $\left\{D^{B}_{b}\right\}$ dapat dihitung.

Dari persamaan (7) dan (8), dapat dituliskan :

$$\left[\bar{K}^{B}_{bb}\right]\left\{D^{B}_{b}\right\}=\left\{P^{B}_{b}\right\}\left[K^{B}_{bd}\right]\left[K^{B}_{dd}\right]^{-1}\left\{P^{B}_{d}\right\} \qquad (9)$$

Misalkan :

$$\left[K^{B}_{bd}\right]\left[K^{B}_{dd}\right]^{-1}\left\{P^{B}_{d}\right\}=\left\{R^{B}_{b}\right\} \qquad (10)$$

Sehingga persamaan (9) dapat dituliskan :

$$\left[\bar{K}^{B}_{bb}\right]\left\{D^{B}_{b}\right\}=\left\{P^{B}_{b}\right\}-\left\{R^{B}_{b}\right\} \qquad (11)$$

Dari persamaan (11) terlihat bahwa matriks kekakuan terkondensir $\left[\bar{K}^{B}_{bb}\right]$ menghubungkan lendutan simpul batas $\left\{D^{B}_{b}\right\}$ dengan gaya yang bekerja pada simpul batas $\left\{P^{B}_{b}\right\}$ ditambah dengan gaya ekivalen pada simpul dalam, $\left(-\left\{R^{B}_{b}\right\}\right)$.

Selanjutnya, dengan cara seperti di atas, matriks kekakuan terkondensir dari seluruh substruktur yang lain dapat disusun. Dari matriks kekakuan tersebut, persamaan lendutan untuk seluruh substruktur yang melibatkan lendutan batas dapat disusun sebagai:

$$\left[\bar{K}_{bb}\right]\left\{D_{b}\right\}=\left\{P_{b}\right\}-\left\{R_{b}\right\} \qquad (12)$$

Lendutan simpul batas dapat dihitung dari persamaan (12), yaitu :

$$\left\{D_{b}\right\}=\left[\bar{K}_{bb}\right]^{-1}\left\{P_{b}-R_{b}\right\} \qquad (13)$$

Lendutan $\left\{D_{b}\right\}$ merupakan seluruh lendutan batas dari struktur. Lendutan batas dari setiap substruktur dapat diambil langsung dari $\left\{D_{b}\right\}$ yaitu merupakan bagian dari $\left\{D_{b}\right\}$.

Akhirnya lendutan simpul dalam dari setiap substruktur dapat dihitung dengan persamaan (4), yaitu misalnya untuk substruktur B :

$$\left\{D^{B}_{d}\right\}=-\left[K^{B}_{dd}\right]^{-1}\left[K^{B}_{db}\right]\left\{D^{B}_{b}\right\}+\left[K^{B}_{dd}\right]^{-1}\left\{P^{B}_{d}\right\}$$

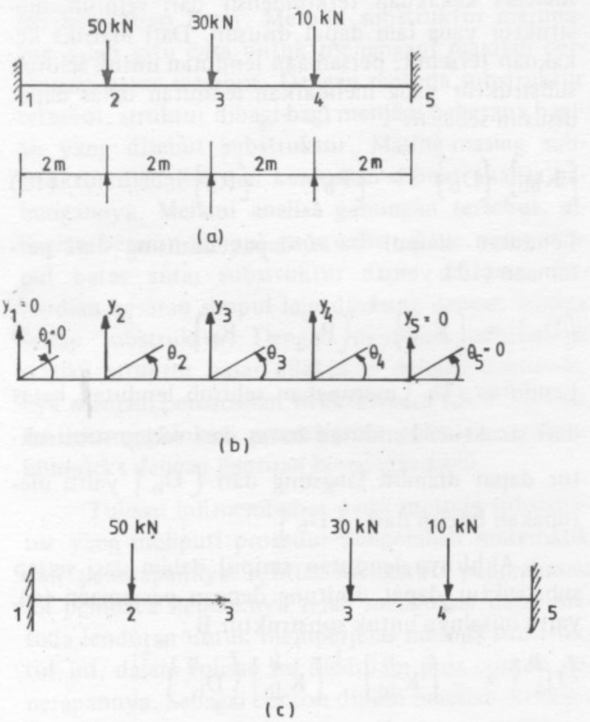
Dengan demikian seluruh lendutan simpul telah dapat dihitung. Dengan telah diketahuinya seluruh lendutan simpul, gaya simpul pada setiap elemen dan gaya rekasi dapat dihitung.

Dalam analisa di atas ditunjukkan bagaimana statika struktur dipecahkan dengan metoda substruktur. Cara substruktur ini akan sangat bermanfaat dalam penyelesaian struktur yang kompleks, yang mempunyai banyak elemen. Dengan cara substruktur, perhitungan dapat disederhanakan dengan menghitung terlebih dahulu lendutan simpul batas menjadi jauh lebih kecil dibandingkan dengan penyelesaian langsung seluruh struktur. Dengan demikian cara ini dapat diterapkan untuk menyelesaikan struktur yang besar dengan bantuan komputer yang kecil.

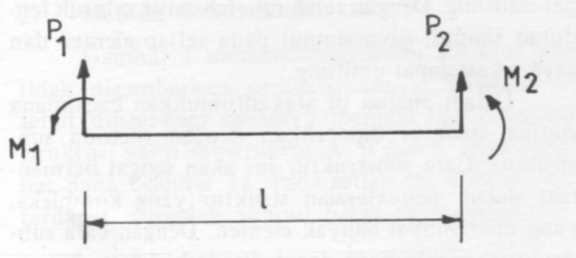
3. Contoh

Sebagai contoh diperlihatkan di sini penyelesaian dengan cara substruktur untuk struktur batang kontinu. Contoh sederhana ini dimaksudkan supaya perhitungan tidak menjadi terlalu rumit dan proses metoda substruktur dapat diikuti dengan mudah.

Contoh soal diperlihatkan pada Gambar 2a. Sebuah batang dengan panjang 8 m, I = 200.10^6 mm^4 dan E = 200 kN/mm^2 dijepit di kedua ujungnya. Batang dibebani dengan tiga buah gaya seperti terlihat pada Gambar 2a. Ingin diketahui lendutan di titik tangkap beban.



Gambar 2. Contoh Soal.



Gambar 3. Elemen batang lentur.

perti terlihat pada Gambar 2b. Struktur dibagi menjadi dua buah substruktur, Gambar 2c.

Sebagai langkah awal perhatikan elemen batang lentur, Gambar 3. Persamaan lendutan dari batang tersebut dapat dituliskan sebagai,

$$\frac{EI}{l}\begin{bmatrix} \frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} & -\frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} \\ \frac{6}{l} & 4 & -\frac{6}{l} & 2 \\ -\frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} & \frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} \\ \frac{6}{l} & 2 & -\frac{6}{l} & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ y_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ M_1 \\ P_2 \\ M_2 \end{bmatrix} \qquad (14)$$

Analisa substruktur A

Pertama kali akan disusun persamaan (2) untuk substruktur A. Yaitu,

$$\begin{bmatrix} K_{dd}^A & K_{db}^A \\ K_{bd}^A & K_{bb}^A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_d^A \\ D_b^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_d^A \\ P_b^A \end{bmatrix} \qquad (15)$$

Dalam persamaan (15) lendutan tumpuan jepit yang merupakan simpul dalam tidak perlu dilibatkan, karena lendutan mereka nol semua (y_1 = 0 dan θ = 0). Persamaan (15) akan tersusun dari elemen batang 1-2 dan batang 2-3. Kontribusi elemen batang 1-2 dalam persamaan (15) dapat dituliskan, dengan mengingat persamaan (14),

$$\frac{EI}{l}\begin{bmatrix} \frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} & 0 & 0 \\ -\frac{6}{l} & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_2 \\ \theta_2 \\ y_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_2 \\ M_2 \\ P_3 \\ M_3 \end{bmatrix}$$

Sedang kontribusi elemen batang 2-3 dalam persamaan (15) dapat dituliskan :

$$\frac{EI}{l}\begin{bmatrix} \frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} & -\frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} \\ \frac{6}{l} & 4 & -\frac{6}{l} & 2 \\ -\frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} & \frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} \\ \frac{6}{l} & 2 & -\frac{6}{l} & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_2 \\ \theta_2 \\ y_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_2 \\ M_2 \\ P_3 \\ M_3 \end{bmatrix}$$

Dari kontribusi kedua elemen tersebut, bentuk persamaan (15) untuk substruktur A dapat dituliskan menjadi :

$$\frac{EI}{l}\left[\begin{array}{cc|cc} \frac{24}{l^2} & 0 & \frac{-12}{l^2} & \frac{6}{l} \\ 0 & 8 & \frac{-6}{l} & 2 \\ \hline \frac{-12}{l^2} & \frac{-6}{l} & \frac{12}{l^2} & \frac{-6}{l} \\ \frac{6}{l} & 2 & \frac{-6}{l} & 4 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} y_2 \\ \theta_2 \\ \hline y_3 \\ \theta_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} P_2 \\ M_2 \\ \hline P_3 \\ M_3 \end{array}\right] \qquad (16)$$

Dengan memasukkan besaran yang diketahui diperoleh :

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 120 & 0 & -60 & 6.10^4 \\ 0 & 16.10^7 & -6.10^4 & 4.10^7 \\ \hline -60 & -6.10^4 & 60 & -6.10^4 \\ 6.10^4 & 4.10^7 & -6.10^4 & 8.10^7 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} y_1 \\ \theta_1 \\ \hline y_2 \\ \theta_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} -50 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right] \qquad (17)$$

Dengan persamaan (6) dan memperhatikan persamaan (15) dan persamaan (17) diperoleh :

$$\left[\bar{K}_{bb}^{A}\right] = \begin{bmatrix} 60 & -6.10^4 \\ -6.10^4 & 8.10^7 \end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix} -60 & -6.10^4 \\ 6.10^4 & 4.10^7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 120 & 0 \\ 0 & 16.10^7 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} -60 & 6.10^4 \\ -16.10^4 & 4.10^7 \end{bmatrix}$$

atau

$$\left[\bar{K}_{bb}^{A}\right] = \begin{bmatrix} 7{,}5 & -15.000 \\ -15.000 & 4.10^7 \end{bmatrix}$$

Kemudian dengan persamaan (10) dan memperhatikan persamaan (15) dan persamaan (17) akan diperoleh :

$$\left\{R_b^{A}\right\} = \begin{bmatrix} -60 & -6.10^4 \\ 6.10^4 & 4.10^7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 120 & 0 \\ 0 & 16.10^7 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} -50 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 25 \\ -25.000 \end{bmatrix}$$

Analisa substruktur B

Dengan cara yang sama, seperti substruktur A, disusun bentuk persamaan (15) untuk substruktur B, yaitu :

$$\left[\begin{array}{c|c} K_{dd}^{B} & K_{db}^{B} \\ \hline K_{bd}^{B} & K_{bb}^{B} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} D_d^{B} \\ \hline D_b^{B} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} P_d^{B} \\ \hline P_b^{B} \end{array}\right] \qquad (18)$$

Kontribusi elemen batang 3-4 dalam persamaan adalah :

$$\frac{EI}{l}\left[\begin{array}{cc|cc} \frac{12}{l^2} & \frac{-6}{l} & \frac{-12}{l^2} & \frac{-6}{l} \\ \frac{-6}{l} & 4 & \frac{6}{l} & 2 \\ \hline \frac{-12}{l^2} & \frac{6}{l} & \frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} \\ \frac{-6}{l} & 2 & \frac{-6}{l} & 4 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} y_4 \\ \theta_4 \\ \hline y_3 \\ \theta_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} P_4 \\ M_4 \\ \hline P_3 \\ M_3 \end{array}\right]$$

dan kontribusi elemen batang 4-5 dalam persamaan (18) adalah :

$$\frac{EI}{l}\left[\begin{array}{cc|cc} \frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} & 0 & 0 \\ \frac{6}{l} & 4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} y_4 \\ \theta_4 \\ \hline y_3 \\ \theta_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} P_4 \\ M_4 \\ \hline P_3 \\ M_3 \end{array}\right]$$

Dengan demikian bentuk persamaan (18) untuk substruktur B menjadi :

$$\frac{EI}{l}\left[\begin{array}{cc|cc} \frac{24}{l^2} & 0 & \frac{-12}{l^2} & \frac{-6}{l} \\ 0 & 8 & \frac{6}{l} & 2 \\ \hline \frac{-12}{l^2} & \frac{6}{l} & \frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} \\ \frac{-6}{l} & 2 & \frac{6}{l} & 4 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} y_4 \\ \theta_4 \\ \hline y_3 \\ \theta_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} P_4 \\ M_4 \\ \hline P_3 \\ M_3 \end{array}\right]$$

Dengan memasukkan besaran yang diketahui diperoleh :

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 120 & 0 & -60 & -6.10^4 \\ 0 & 16.10^7 & 6.10^4 & 4.10^7 \\ \hline -120 & 6.10^4 & 60 & 6.10^4 \\ -6.10^4 & 4.10^7 & 6.10^4 & 8.10^7 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} y_4 \\ \theta_4 \\ \hline y_3 \\ \theta_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} -10 \\ 0 \\ \hline -30 \\ 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\bar{K}_{bb}^{B}\right] = \begin{bmatrix} 7,5 & 15.000 \\ 15.000 & 4.10^7 \end{bmatrix}$$

dan dengan persamaan (10) dapat diperoleh :

$$\left\{R_b^B\right\} = \begin{bmatrix} 50 \\ 5.000 \end{bmatrix}$$

Penggabungan kedua substruktur

Untuk gabungan kedua substruktur berlaku persamaan (12), yaitu:

$$\left[\bar{K}_{bb}\right]\left\{D_b\right\} = \left\{P_b\right\} - \left\{R_b\right\} \quad (19)$$

Dengan menggabungkan kontribusi kedua substruktur ke dalam persamaan (19) diperoleh :

$$\begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 8.10^7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 30 \\ -20.000 \end{bmatrix} \quad (20)$$

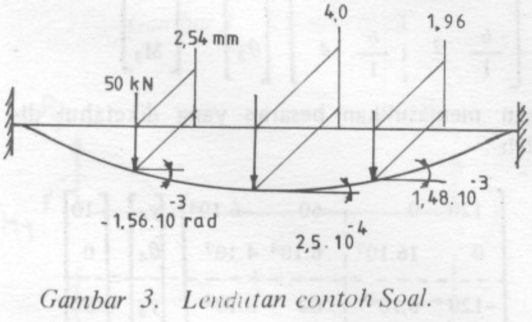
Dari persamaan (20) lendutan y_3 dan θ_3 dapat dicari, yaitu :

$$\begin{bmatrix} y_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 8.10^7 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -60 \\ 20.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4,0 \text{ mm} \\ 0,25.10^{-3} \text{ rad} \end{bmatrix}$$

Lendutan simpul dalam masing-masing substruktur dihitung dengan persamaan (4), dan akan diperoleh:

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 120 & 0 \\ 0 & 16.10^7 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -60 & 6.10^4 \\ -6.10^4 & 4.10^7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 0,25.10^{-3} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 120 & 0 \\ 0 & 16.10^7 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -50 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,54 \text{ mm} \\ -1,56.10^{-3} \text{ rad} \end{bmatrix}$$



Gambar 3. Lendutan contoh Soal.

dan dengan cara yang sama dapat diperoleh :

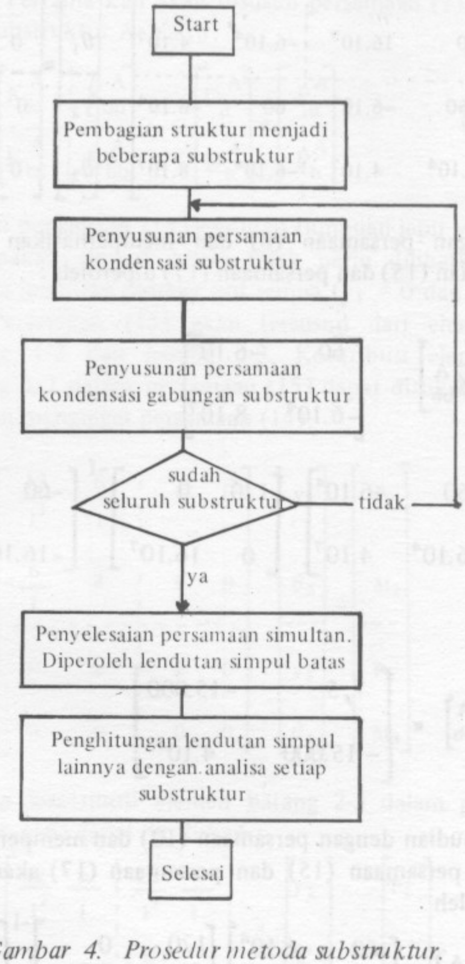
$$\begin{bmatrix} \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,48.10^{-3} \text{ Rad.} \end{bmatrix}$$

Hasil tersebut di atas dapat digambarkan seperti terlihat pada Gambar 3.

4. Kesimpulan

Sebagai kesimpulan, aliran penghitungan dalam metoda substruktur dapat digambarkan seperti terlihat pada Gambar 4.

Dengan metoda substruktur, masalah berukuran besar dapat dipecah-pecah menjadi beberapa masalah berukuran kecil. Cara ini memungkinkan pemecahan masalah struktur kompleks dengan bantuan komputer kecil. Metoda ini dapat diterapkan pada semua macam struktur, baik pada truss bidang, truss ruang, rangka bidang, maupun pada rangka ruang.



Gambar 4. Prosedur metoda substruktur.

Daftar Pustaka

1. McGuire and Gallagher, Matrix Structural Analysis, John Wiley & Sons, New York, 1979.
2. Weaver and Gere, Matrix Analysis of Framed Structure, 2