Vol.14 No. 3 September 2007

Jurnal TEKNIK SIPIL

Kajian Teoritis terhadap Persamaan Gelombang Nonlinier

Syawaluddin H.[1)]

Abstrak

Paper ini menyajikan hasil perumusan persamaan gelombang nonlinier dengan prosedur yang lain. Dimana amplitudo gelombang, persamaan momentum dari Euler dan tekanan hidrodinamis dari Bernoulli sepenuhnya digunakan, tanpa pemotongan atau linierisasi. Potensial kecepatan dan persamaan dispersi yang dihasilkan menjadi persamaan gelombang linier bila digunakan amplitudo sangat kecil.

Pada persamaan potensial kecepatan terdapat fenomena breaking, dengan bentuk yang sama dengan kriteria breaking dari Miche. Panjang gelombang yang dihasilkan dari persamaan dispersi adalah lebih kecil dari panjang gelombang dari teori gelombang linier. Peranan amplitudo gelombang pada persamaan dispersi adalah memperpendek panjang gelombang. Semakin besar amplitudo gelombang, semakin panjang gelombang.

Kata-kata Kunci :

Persamaan gelombang linier : Teori gelombang yang diturunkan untuk amplitudo gelombang sangat kecil.
Teori gelombang nonlinier : Teori gelombang yang diturunkan untuk amplitudo gelombang yang cukup besar.

Abstract

This paper presents derivation of a nonlinear wave equation with different procedure. In which, wave amplitude, momentum Euler's equation and hydrodynamic pressure of Bernoulli are fully used and no linearization. The resulted potential and dispersion equation become equations of linier wave theory when small amplitude inserted to the equations.

Velocity potential equation gives breaking phenomena that the same as Miche's breaking criteria. Wave length resulted from the dispersion equation shorter than wave length resulted by linear wave theory. Existences of wave amplitude in dispersion equation make wave length shorter. Larger wave amplitude shorter wave length.

Keywords :

Linear wave theory : Wave theory derived for very small wave amplitude.
Nonlinear wave theory : Wave theory derived for large wave amplitude.

1. Pendahuluan

Nonlinieritas suatu teori gelombang adalah ditinjau dari perumusannya. Bila pada perumusannya diperhitungkan peranan amplitudo gelombang maka persamaan yang dihasilkan disebut dengan persamaan gelombang atau teori gelombang nonlinier. Sedangkan bila pada perumusannya digunakan amplitudo gelombang yang sangat kecil sehingga dapat diabaikan peranannya, maka persamaan yang dihasilkan adalah persamaan gelombang linier.

Pada penelitian ini dikembangkan suatu persamaan gelombang nonlinier. Dengan tujuan mendapatkan suatu persamaan gelombang nonlinier yang lebih sederhana dari persamaan gelombang nonlinier yang ada tanpa mengurangi ketelitiannya.

2. Persamaan Potensial Kecepatan

Perumusan persamaan potensial kecepatan diawali dengan penyelesaian persamaan Laplace

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0,$$

dengan metoda pemisahan variabel. Berdasarkan Dean [3], hasil penyelesaian persamaan tersebut setelah dimasukkan syarat batas lateral dan syarat batas kinematik dasar perairan dengan dasar datar adalah

1. Anggota KK Teknik Kelautan, FTSL-ITB, Jl. Ganesha No.10 Bandung 40132.

ϕ = $G \cosh (k (h + z)) \cos kx \sin \sigma t$ (2.1)

dimana :

ϕ = potensial kecepatan
k = bilangan gelombang
h = kedalaman perairan pada muka air diam
σ = frekuensi sudut = $2\pi / T$
T = perioda gelombang
G = adalah suatu konstanta yang perlu ditentukan harganya

Untuk mendapatkan G, digunakan persamaan kontinuitas yang terintegrasi terhadap kedalaman, yaitu

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\int_{-h}^{\eta} u\, dz \tag{2.2}$$

Perumusan **Persamaan (2.2)** tersebut dapat dilihat pada Lampiran I.A. Substitusi $u = -\partial\phi/\partial x$ dan $\eta = A \cos kx \sin \sigma t$ (Lampiran I.B), dimana A = amplitudo gelombang, ke **Persamaan (2.2)** diperoleh

$$G = \frac{\sigma A}{k \cosh\left(k\left(h+\frac{A}{2}\right)\right)\left(\tanh\left(k\left(h+\frac{A}{2}\right)\right) - \frac{kA}{2}\right)} \tag{2.3}$$

$$\phi = \frac{\sigma A \cosh k(h+z) \cos kx \sin \sigma t}{k \cosh\left(k\left(h+\frac{A}{2}\right)\right)\left(\tanh\left(k\left(h+\frac{A}{2}\right)\right) - \frac{kA}{2}\right)} \tag{2.4}$$

3. Persamaan Dispersi

Untuk mendapatkan persamaan dispersi digunakan persamaan momentum dari Euler dengan tekanan hidrodinamis dari Bernoulli. Perumusan persamaan dapat dilihat pada **Lampiran I.C.** Bentuk persamaan momentum tersebut adalah

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(u_\eta^2 + w_\eta^2\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi_\eta}{\partial t}\right) = -g\frac{\partial \eta}{\partial x} \tag{3.1}$$

Substitusi $\eta = A \cos kx \sin \sigma t$, $u = -\partial\phi/\partial x$, dengan ϕ dari **Persamaan (2.4)** diperoleh persamaan dispersi yaitu (Lampiran I.D)

$$\left(\frac{\sigma^2 Ak}{2F} + \frac{\sigma^2 A^2 k}{4F}\tanh kH + \frac{\sigma^2 A^2 k}{4F}\frac{\tanh kH}{\cosh kH} - \frac{\sigma^2 A^2}{4F}\frac{\tanh kH}{\cosh kH}\right) + \left(-\frac{\sigma^2 Ak}{2F}\tanh^2 kH + \frac{\sigma^2 Ak^3}{4F}\tanh^3 kH\right) + \left(\sigma^2 - \frac{\sigma^2 Ak^2}{2}\tanh^2 kH + \frac{\sigma^2 Ak}{2}\tanh kH\right) = gkF \tag{3.2}$$

dimana $F = \tanh\left(k\left(h+\frac{A}{2}\right)\right) - \frac{A}{2}$ dan $H = h + \frac{A}{2}$

4. Analisis Persamaan

a. Persamaan dispersi

Pada amplitudo gelombang yang sangat kecil, maka **Persamaan (3.2)** menjadi

$\sigma^2 = g\,k\,F$

Dimana $F = \tanh k(k(k + A/2)) - A/2$. Untuk amplitudo gelombang yang sangat kecil, maka $F = \tanh kh$. Persamaan dispersi menjadi $\sigma^2 = gk \tanh kh$ yang merupakan persamaan dispersi dari teori gelombang linier.

Jadi persamaan dispersi yang dihasilkan sama dengan persamaan dispersi dari teori gelombang linier pada amplitudo gelombang yang sangat kecil.

b. Panjang gelombang

Hasil perhitungan panjang gelombang dengan menggunakan persamaan dispersi (**Persamaan 3.2**) untuk perioda gelombang 6 detik, disajikan pada **Tabel 1**. Pada amplitudo gelombang 0.0 m, dihasilkan panjang gelombang yang sama dengan panjang gelombang dari teori gelombang linier. Sedangkan pada amplitudo yang besar, panjang gelombang yang dihasilkan oleh **Persamaan (3.2)** lebih pendek dari panjang gelombang dari teori gelombang linier.

Pada amplitudo 0.5 m dan 0.80 m, pada kedalaman 22 m sampai dengan 40 m, terlihat terjadi pengurangan panjang gelombang dengan bertambahnya kedalaman. Fenomena ini mencerminkan peristiwa wave setdown, yaitu berkurangnya kedalaman rata-rata akibat adanya gelombang. Pada hasil perhitungan tersebut juga terlihat perbedaan panjang gelombang dengan panjang gelombang dari teori gelombang linier mengecil, seiring dengan semakin dangkalnya perairan. Peristiwa ini mencerminkan fenomena wave setup. Kemampuan persamaan memodelkan fenomena wave setup dan wave setdown tersebut memang masih memerlukan penelitian lebih lanjut, tetapi fenomenanya sudah terlihat.

Pada hasil perhitungan tersebut juga terlihat pengaruh amplitudo gelombang yaitu bahwa semakin besar amplitudo semakin pendek panjang gelombang.

Tabel 1. Perbandingan panjang gelombang, antara teori gelombang linier dengan teori gelombang nonlinier, perioda gelombang 6 detik

h (m)	L-linier (m)	L-0.0 (m)	L-0.5 (m)	L-0.8 (m)
40.00	56.19	56.19	52.78	50.21
38.00	56.18	56.18	52.78	50.23
36.00	56.17	56.17	52.79	50.26
34.00	56.15	56.15	52.80	50.30
32.00	56.12	56.12	52.81	50.35
30.00	56.07	56.07	52.81	50.40
28.00	56.00	56.00	52.80	50.46
26.00	55.88	55.88	52.77	50.52
24.00	55.71	55.71	52.71	50.58
22.00	55.44	55.44	52.58	50.60
20.00	55.05	55.05	52.35	50.56
18.00	54.47	54.47	51.96	50.41
16.00	53.62	53.62	51.33	50.05
14.00	52.42	52.42	50.36	49.36
12.00	50.73	50.73	48.90	48.18
10.00	48.41	48.41	46.78	46.30
8.00	45.22	45.22	43.75	43.43
6.00	40.87	40.87	39.47	39.20
4.00	34.77	34.77	33.31	32.91
2.00	25.58	25.58	23.75	22.89

Catatan:

L-linier : panjang gelombang dari teori gelombang linier

L-0.0 : panjang gelombang dari teori gelombang nonlier dengan amplitudo 0.0

L-0.5 : panjang gelombang dari teori gelombang nonlier dengan amplitudo 0.5 m

L-0.8 : panjang gelombang dari teori gelombang nonlier dengan amplitudo 0.8 m

c. Persamaan potensial aliran

Persamaan potensial aliran (**Persamaan (2.2)**),

$$\phi = \frac{\sigma\, A \cosh(k\,(h+z)) \cos kx \sin \sigma t}{k \cosh\left(k\left(h+\frac{A}{2}\right)\right)\left(\tanh\left(k\left(h+\frac{A}{2}\right)\right) - \frac{k\,A}{2}\right)}$$

Pada amplitudo gelombang yang sangat kecil persamaan potensial aliran menjadi

$$\phi = \frac{\sigma\, A}{k}\, \frac{\cosh(k\,(h+z))}{\cosh kh\;\; \tanh(kh)} \cos kx \sin \sigma t$$

Pada amplitudo yang kecil, persamaan dispersi menjadi $\sigma^2 = g\ k \tanh(kh)$ atau $k = \sigma^2 / g \tanh(kh)$. Substitusi *k* pada persamaan potensial aliran, diperoleh

$$\phi = \frac{g\ A}{\sigma}\, \frac{\cosh(k\,(h+z))}{\cosh(kh)} \cos kx \sin \sigma t$$

yang merupakan persamaan potensial aliran dari teori gelombang linier.

d. *Breaking*

Pada persamaan potensial aliran terdapat factor pembagi $\tanh(\, k\,(h + A/2)\,) - kA/2$. Bila $\tanh$

$$\left(k\left(h + \frac{A}{2}\right)\right) - \frac{k\,A}{2} = 0 \text{, maka}$$

$$\frac{k\,A}{2} = \tanh\left(k\left(h + \frac{A}{2}\right)\right)$$

$$\frac{2\,\pi\,A}{2\,L} = \tanh\left(k\left(h + \frac{A}{2}\right)\right)$$

$$\frac{2\,A}{L} = \frac{2}{\pi} \tanh\left(k\left(h + \frac{A}{2}\right)\right) \qquad (4.1)$$

Kriteria breaking dari Miche,

$$\frac{2\,A}{L} = 0.142 \tanh kh \qquad (4.2)$$

Terlihat bahwa **Persamaan (4.1)** mempunyai bentuk yang sama dengan **Persamaan (4.2)**.

Pada $\tanh(\, k\,(h + A/2)) = 0$, maka ϕ menjadi ~, dapat dikatakan bahwa kondisi ini adalah kondisi breaking. Jadi persamaan potensial aliran yang dihasilkan mempunyai karakteristik breaking dengan bentuk yang sama dengan kriteria breaking dari Miche.

5. Kesimpulan

Potensial kecepatan dan persamaan dispersi yang dihasilkan pada penelitian ini mempunyai karakteristik linier pada amplitudo kecil. Bagi sejumlah peneliti [1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15] kandungan karakteristik linier pada suatu persamaan gelombang nonlinier merupakan petunjuk untuk validitas suatu teori gelombang nonlinier.

Persamaan potensial aliran yang dihasilkan mempunyai kondisi breaking yang sama dengan kriteria breaking dari Miche.

Dari hal-hal tersebut, maka dapat disimpulkan bahwa persamaan gelombang yang dihasilkan pada penelitian ini cukup valid.

Pada proses perumusan terdapat hal-hal yang diabaikan, karena itu persamaan masih perlu disempurnakan untuk mendapatkan persamaan yang lebih baik.

Daftar Pustaka

Bredmese, H., Schaffer, H.A., and Madsen, P.A., 2004, Boussinesq Evolution Equations : *"Numerical Efficiency, Breaking and Amplitude Dispersion"*, Coastal Engineering. [1]

Chen, Y., and Liu, P.L.-F., 1995, "*Modified Boussinesq Equations and Associated Parabolic Models for Water Wave Propagation"*, J. Fluid Mech., 288. [2]

Dean, Robert G., and Dalrymple, "*Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists"*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey. [3]

Gobbi, M.F., and Kirby, J.T., 1998, "*A New Boussinesq Type Model for Surface Water Wave"*, Ph.D. Dissertation of the First Author. University of Delaware. [4]

Kirby, J.T., and Wei, G., 1994, "*Derivation and Properties of A Fully Nonlinear, Extended Boussinesq Model"*. In Proc. IAHR Symposium: Waves – Phys. and Num. Model, Vancouver. [5]

Li, Y.S., Liu, S.-X., Yu, Y.-X., and Lai, G.-Z. 1999, "*Numerical Modeling of Boussinesq Equations By Finite Element Method"*, J. Coastal Engineering, Elsevier. [6]

Madsen, P. A., Murray, R., and Sørensen, O.R., 1991, *"A New Form of Boussinesq Equation with Improved Linear Dispersion Characteristics"*, Coastal Engineering 15. [7]

Madsen, P. A., and Sørensen, O.R., 1992, *"A New Form Of Boussinesq Equation With Improved Linear Dispersion Characteristics"*, Part 2. A Slowly-Varying Bathymetry, Coastal Engineering 18. [8]

McCowan, A.D., 1987, *"The Range of Application of Boussinesq Type Numerical Short Wave Models"*, In Proc. 22nd IAHR Congr. [9]

Meftah, Sorgent, P., and Gami P., 2004, "*Linear Analysis of A New Type of Extended Boussinesq Model"*. Coastal Engineering. [10]

Nwogu, O., 1993, *"An Alternative Form of The Boussinesq Equations for Nearshore Wave Propagation"*. J. Waterway, Port, Coast.. Ocean Engng. 119. [11]

Sarpkaya T. and Iseacson, Micheal, 1981, "*Mechanics of Wave Forces on Offshore Structures"*, Van Nostrand Reinhold Company. [12]

Schäffer, H. A., Madsen, P.A., 1995, *"Further Enhancements of Boussinesq Type Equations"*. Coastal Engineering (26). [13]

Sørensen, O.R., Schäffer, H.A., and Sørensen, L.A., 2004, "*Boussinesq Modelling Using Unstructural Finite Element Technique"*. Coastal Engineering. [14]

Wei, G., Kirby, J.T., Grilli, S.T., and Subramanya, R., 1995, "*A Fully Nonlinear Boussinesq Model For Surface Waves"*, Part 1, Highly Nonlinear Unsteady Waves. J. Fluid Mech. 294. [15]

Lampiran I

Perumusan Persamaan

I.A Persamaan kontinuitas yang terintegrasi terhadap kedalaman

Persamaan kontinuitas pada aliran fluida dalam bentuk 2 dimensi yaitu arah x – z adalah

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

dimana u adalah kecepatan arus pada arah horizontal x sedangkan w adalah kecepatan arus pada arah vertikal z, persamaan dikalikan dz dan diintegrasikan terhadap kedalaman,

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_{-h}^{\eta} dw = 0 \;;\; w_{\eta} - w_{-h} = -\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial u}{\partial x} dz$$

Dengan mengerjakan aturan Leibniz pada integral ruas kanan persamaan, diperoleh

$$w_{\eta} - w_{-h} = -\left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u\, dz - u_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} - u_{-h} \frac{\partial h}{\partial x} \right)$$

Syarat batas kinematik permukaan adalah [3]

$$w_{\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

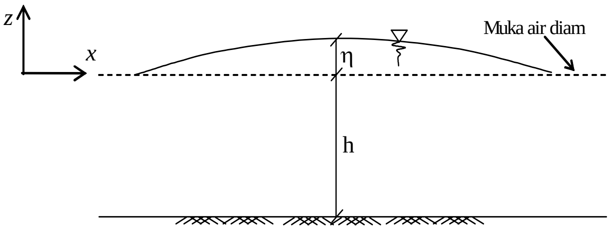
dan syarat batas kinematik dasar perairan adalah [3]

$$w_{-h} = -u_{-h} \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

Dengan menggunakan kedua syarat batas tersebut, persamaan kontinuitas yang terintegrasi terhadap kedalaman menjadi

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u\, dz$$

dimana η adalah fluktuasi muka air terhadap muka air diam (**Gambar A.1**).



Gambar A.1. Fluktuasi muka air akibat gelombang

I.B Potensial kecepatan

Dengan $\phi = G \cosh(k(h+z)) \cos kx \sin \sigma t$, maka

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = G k \cosh(k(h+z)) \sin kx \sin \sigma t$$

$$\int_{-h}^{\eta} u\, dz = G \sinh(k(h+\eta)) \sin kx \sin \sigma t$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u\, dz = G k \sinh(k(h+\eta)) \cos kx \sin \sigma t$$

$$+ G k \cosh(k(h+\eta)) \sin kx \sin \sigma t \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\eta = A \cos kx \cos \sigma t \;;\; \frac{\partial \eta}{\partial x} = -k A \sin kx \cos \sigma t$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u\, dz = G k \sinh(k(h+\eta)) \cos kx \sin \sigma t$$

$$- G k^2 \cosh(k(h+\eta)) \sin kx \sin kx \sin \sigma t \cos \sigma t$$

Dengan mengambil $\cos kx = \sin kx = \cos \sigma t = \sin \sigma t =$

$\frac{1}{2}\sqrt{2}$ maka

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u\, dz = \frac{Gk}{2} \sinh(k(h+\eta)) - \frac{Gk^2 A}{4} \cos k(h+\eta)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u\, dz = \frac{Gk}{2} \cosh(k(h+\eta)) \left(\tanh k(h+\eta) - \frac{kA}{2} \right)$$

Substitusi persamaan terakhir ke **Persamaan (1)**, diperoleh

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{Gk}{2} \cosh(k(h+\eta)) \left(\tanh k(h+\eta) - \frac{kA}{2} \right)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\sigma A \cos kx \sin \sigma t$$

Dengan $\cos kx = \sin \sigma t = \frac{\sqrt{2}}{2}$, maka $\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\sigma A}{2}$

$$-\frac{\sigma A}{2} = -\frac{Gk}{2} \cosh(k(h+\eta)) \left(\tanh(k(h+\eta)) - \frac{kA}{2} \right)$$

$$G = \frac{\sigma A}{k \cosh(k(h+\eta)) \left(\tanh(k(h+\eta)) - \frac{kA}{2} \right)}$$

Dengan $\cos kx = \cos \sigma t = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\eta = A/2$

$$G = \frac{\sigma A}{k \cosh\left(k\left(h+\frac{A}{2}\right)\right)\left(\tanh\left(k\left(h+\frac{A}{2}\right)\right)-\frac{kA}{2}\right)} \quad \text{(B.1)}$$

Dengan demikian potensial aliran menjadi

$$\phi = \frac{\sigma A \cosh k(h+z) \cos kx \sin \sigma t}{k \cosh\left(k\left(h+\frac{A}{2}\right)\right)\left(\tanh\left(k\left(h+\frac{A}{2}\right)\right)-\frac{kA}{2}\right)} \quad \text{(B.2)}$$

I.C Persamaan momentum

C.1 Persamaan Bernoulli

$$\frac{p}{\rho}+\frac{u^2+w^2}{2}+g\,z-\frac{\partial \phi}{\partial t} = c\,(t) \quad \text{(C.1)}$$

Bernoulli (z = z) = Bernoulli (z = η)

$$\frac{p}{\rho}+\frac{u^2+w^2}{2}+g\,z-\frac{\partial \phi}{\partial t}=\frac{p_\eta}{\rho}+\frac{u_\eta^2+w_\eta^2}{2}+g\,\eta-\frac{\partial \phi_\eta}{\partial t}$$

Syarat batas dinamik permukaan $p_\eta = 0$

$$\frac{1}{\rho}\,p=\frac{u_\eta^2+w_\eta^2}{2}-\frac{u^2+w^2}{2}+g\left(\eta-z\right)-\frac{\partial \phi_\eta}{\partial t}+\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(u_\eta^2+w_\eta^2\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(u^2+w^2\right)+$$

$$g\frac{\partial \eta}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \phi_\eta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial z} \quad \text{(C.2)}$$

C.2 Persamaan momentum fluida ideal

Persamaan momentum arah *x* dari Euler,

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

Fluida ideal $\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial x}$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial w^2}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

Dengan menggunakan $\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$ dari **Persamaan (C.2)**

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(u^2+w^2\right)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(u^2+w^2\right)=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(u_\eta^2+w_\eta^2\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(u^2+w^2\right)$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \phi_\eta}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial t}-g\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(u_\eta^2+w_\eta^2\right)-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \phi_\eta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial t}=-g\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

C.3 Persamaan momentum yang digunakan

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)$$

Dari teori kalkulus $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)$

Dengan demikian $\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)$

Pada persamaan momentum terdapat suku,

$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)$ Dengan sifat fungsi tersebut maka

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = 0,$$

sehingga persamaan momentum menjadi

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(u_\eta^2+w_\eta^2\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi_\eta}{\partial t}\right)=-g\frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \text{(C.4)}$$

I.D Persamaan Dispersi

Untuk mempermudah penulisan didefinisikan $H = h + \eta$; $P = h + z$,

$$F=\tanh\left(k\left(h+\frac{A}{2}\right)\right)-\frac{kA}{2}$$

D.1 $\frac{1}{2}\frac{\partial u_\eta^2}{\partial x} = u_\eta \frac{\partial u_\eta}{\partial x}$

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x}=\frac{\sigma A}{F}\frac{\cosh kP}{\cosh kH}\sin kx \sin \sigma t$$

$$-\frac{\sigma A}{F k}\sin kP \cos kx \cos \sigma t\,\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\cosh kH}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\sigma A k}{F}\frac{\cosh kP}{\cosh kH}\cos kx \cos \sigma t$$

$$+ \frac{\sigma A}{F}\cos kP \sin kx \cos \sigma t \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\cosh kH}$$

$$+ \frac{\sigma A}{F}\cos kP \sin kx \cos \sigma t \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\cosh kH}$$

Pada persamaan $\frac{\partial u}{\partial x}$ tersebut $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\cosh kH}$

diabaikan. Pada kondisi $\cos kx = \sin kx = \cos \sigma t = \sin \sigma t = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sigma^2 A^2 k}{4F^2}\frac{\cosh^2 kP}{\cosh^2 kH} + \frac{\sigma^2 A^2}{4F^2}\frac{\cosh^2 kP}{\cosh^2 kH}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\cosh kH} + \frac{\sigma^2 A^2}{4F^2}\frac{\cosh^2 kP}{\cosh kH}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\cosh kH}$$

$$-\frac{\sigma^2 A^2}{4F^2 k}\frac{\cosh^2 kP}{\cosh kH}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\cosh kH}$$

Pada persamaan terakhir $\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\cosh kH}\right)^2$ diabaikan.

$$u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sigma^2 A^2 k}{4F^2}\frac{\cosh^2 kP}{\cosh^2 kH} + \frac{\sigma^2 A^3 k}{8F^2}\frac{\sinh kH}{\cosh^3 kH}$$

$$\cosh^2 kP + \frac{\sigma^2 A^3 k}{8F^2}\frac{\sinh kH}{\cosh^4 kH}\cosh^2 kP -$$

$$\frac{\sigma^2 A^3}{8F^2}\frac{\sinh kH}{\cosh^4 kH}\cosh^2 kP$$

$$u_\eta\frac{\partial u_\eta}{\partial x} = \frac{\sigma^2 A^2 k}{4F^2} + \frac{\sigma^2 A^3 k}{8F^2}\tanh kH +$$

$$\frac{\sigma^2 A^3 k}{8F^2}\frac{\tanh kH}{\cosh kH} - \frac{\sigma^2 A^3}{8F^2}\frac{\tanh kH}{\cosh kH} \quad \text{(D.1)}$$

D.2 $w_\eta \frac{\partial w_\eta}{\partial x}$

$$w = -\frac{\sigma A}{F}\frac{\sinh kP}{\cosh kH}\cos kx \sin \sigma t$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\sigma A k}{F}\frac{\sinh kP}{\cosh kH}\sin kx \sin \sigma t$$

$$-\frac{\sigma A}{F}\sin kP \sin kx \sin \sigma t \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\cosh kH}$$

Pada kondisi $\cos kx = \sin kx = \cos \sigma t = \sin \sigma t = \frac{\sqrt{2}}{2}$

maka

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\sigma A k}{2F}\frac{\sinh kP}{\cosh kH} - \frac{\sigma A^2 k^2}{4F}\frac{\sinh kH}{\cosh^2 kH}\sinh kP$$

$$w\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\sigma^2 A^2 k}{4F^2}\frac{\sinh^2 kP}{\cosh^2 kH} + \frac{\sigma^2 A^3 k^2}{8F^2}\frac{\sinh kH}{\cosh^3 kH}\sinh^2 kP$$

Pada $z = \eta$,

$$w_\eta\frac{\partial w_\eta}{\partial x} = -\frac{\sigma^2 A^2 k}{4F^2}\frac{\sinh^2}{\cosh^2 kH} - \frac{\sigma^2 A^3 k^2}{8F^2}\frac{\sinh^3 kH}{\cosh^3 kH} \quad \text{(D.2)}$$

D.3 $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi_\eta}{\partial t}\right)$

$$\phi = \frac{\sigma A}{F k}\frac{\cosh kP}{\cosh kH}\cos kx \sin \sigma t$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\sigma^2 A}{F k}\frac{\cosh kP}{\cosh kH}\cos kx \cos \sigma t +$$

$$\frac{\sigma A}{F k}\cosh kP \cos kx \sin \sigma t \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\cosh kH}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\sigma^2 A}{F}\frac{\cosh kP}{\cosh kH}\frac{\sigma^2 A}{F}\frac{\cosh kP}{\cosh kH}\sin kx \cos \sigma t$$

$$+ \frac{\sigma^2 A}{F k}\cos kP \cos kx \cos \sigma t \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\cosh kH}$$

$$- \frac{\sigma A}{F}\cos kP \sin kx \cos \sigma t \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\cosh kH}$$

Dalam hal ini $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\cosh kH}$

dianggap sangat kecil dan dapat diabaikan.

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\sigma^2 A}{2F}\frac{\cosh kP}{\cosh kH} + \frac{\sigma^2 A^2 k}{4F}\frac{\sinh kH}{\cosh^2 kH}\cos kP$$

$$-\frac{\sigma^2 A^2 k}{4F}\frac{\sinh kH}{\cosh^2 kH}\cos kP$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \phi_\eta}{\partial t} = -\frac{\sigma^2 A}{2F} + \frac{\sigma^2 A^2 k}{4F}\frac{\sigma^2 A}{2F} + \frac{\sigma^2 A^2 k}{4F}\tanh kH -$$

$$\frac{\sigma^2 A^2 k}{4\,F}\ tanh\ kH \qquad \text{(D.3)}$$

Substitusi persamaan (D.1), (D.2) dan (D.3) ke persamaan (C.4)

$$\left(\frac{\sigma^2\ A^2\ k}{4\,F^2} + \frac{\sigma^2\ A^3\ k}{8\,F^2}\ tanh\ kH + \frac{\sigma^2\ A^3\ k}{8\,F^2}\ \frac{tanhkH}{coshkH}\right.$$

$$\left. - \frac{\sigma^2\ A^3}{8\,F^2}\ \frac{tanh kH}{cosh kH}\right) + \left(-\frac{\sigma^2 A^2 k}{4\,F^2}\ tanh^2\ kH +\right.$$

$$\left.\frac{\sigma^2 A^2 k^3}{8\,F^2} tanh^3\ kH\right) + \left(\frac{\sigma^2 A}{2\,F} - \frac{\sigma^2 A^2 k^2}{4\,F}\ tanh^2\ kH\right.$$

$$\left. + \frac{\sigma^2 A^2 k}{4\,F} tanh\,kH\right) \frac{\sigma^2 A^2 k}{4\,F} tanh\,kH\bigg) = g\ k\ \frac{A}{2}$$

Persamaan dikalikan dengan $\frac{2\,F}{A}$

$$\left(\frac{\sigma^2\ A\,k}{2\,F} + \frac{\sigma^2\ A^2\ k}{4\,F}\ tanh\ kH + \frac{\sigma^2\ A^2\ k}{4\,F} - \frac{tanhkH}{coshkH}\right.$$

$$\left.\frac{\sigma^2\ A^2}{4\,F}\ \frac{tanh kH}{cosh kH}\right)$$

$$+ \left(-\frac{\sigma^2 A k}{2\,F}\ tanh^2\ kH + \frac{\sigma^2 A\,k^3}{4\,F} tanh^3\ kH\right) +$$

$$\left(\sigma^2 - \frac{\sigma^2 A\,k^2}{2}\ tanh^2\ kH \quad + \frac{\sigma^2 A\,k}{2} tanh\ kH\right)$$

$$= g\ k\ F \qquad \text{(D.4)}$$

Persamaan (D.4) tersebut adalah persamaan dispersi.