

Model Numerik 2-Dimensi Perambatan Gelombang pada Perairan Dalam Sampai Perairan Dangkal Menggunakan Persamaan Boussinesq

M. Cahyono¹⁾
Alwafi Pujiraharjo²⁾

Abstrak

Pada penelitian ini telah dikembangkan suatu model numerik 2-dimensi perambatan gelombang pada perairan relatif dalam sampai perairan dangkal. Model numerik didasarkan pada persamaan Boussinesq yang diturunkan oleh Nwogu [1993]. Persamaan Boussinesq diselesaikan dengan teknik pemisahan operator untuk menyederhanakan penyelesaian masalah perambatan gelombang yang kompleks menjadi lebih sederhana dengan beberapa nilai awal yang meliputi masalah konveksi, propagasi, dan dispersi satu dimensi. Persamaan konveksi dan propagasi diselesaikan dengan skema beda hingga eksplisit MacCormack, sedangkan untuk suku-suku dispersi diselesaikan dengan skema beda hingga terpusat orde empat.

Model diujikan untuk beberapa simulasi transformasi gelombang yaitu shoaling, refraksi, dan difraksi gelombang reguler pada beberapa kondisi batimetri hasil percobaan laboratorium oleh peneliti sebelumnya, seperti percobaan pengaruh perubahan kedalaman terhadap refraksi-difraksi gelombang oleh Berkhoff dkk pada tahun 1982 [lihat Wei dan Kirby, 1998], percobaan refraksi-difraksi oleh Whalin pada tahun 1971 [lihat Wei dan Kirby, 1998] dan percobaan shoaling oleh Chawla [1995]. Perbandingan antara hasil-hasil simulasi model dengan data percobaan menunjukkan kemiripan. Hal ini membuktikan bahwa model yang dikembangkan mampu memprediksi transformasi gelombang akibat pengaruh pendangkalan dengan baik.

Kata-kata Kunci : Persamaan Boussinesq, dua-dimensi, pemisahan operator, shoaling, refraksi, difraksi, gelombang reguler.

Abstract

Two-Dimensional model of wave propagation from relatively deep water to shallow water has been developed in this study. The model was based on the extended Boussinesq equations derived by Nwogu [1993]. The Equations were solved using a time splitting technique in which the two-dimensional Boussinesq equations were split into several one-dimensional initial value problems including convection, propagation and dispersion problems respectively. The convection and propagation problems were solved using Explicit MacCormack scheme while dispersion problems were solved using fourth order central scheme.

The model has been used to simulate shoaling, refraction and diffraction of regular wave setup in laboratories by previous authors, including, effect of bathymetric variation to wave refraction-diffraction by Berkhoff et al in 1982 [Wei and Kirby, 1998], wave refraction-diffraction by Whalin in 1971 [Wei and Kirby, 1998] and shoaling experiment by Chawla [1995]. Comparisons between the model predictions and data show good agreement. Thus, the model is capable of predicting wave transformation due to varying bathymetry.

Keyword : Boussinesq equation, two-dimensional, time splitting, shoaling, refraction, diffraction, regular wave.

1. Pendahuluan

Gelombang yang merambat dari perairan dalam menuju perairan dangkal/pantai akan mengalami transformasi yang diakibatkan oleh kombinasi adanya pengaruh pendangkalan, refraksi, difraksi, dan refleksi. Untuk mempelajari proses yang terjadi di

pantai diperlukan kemungkinan memprediksi transformasi gelombang tersebut. Untuk memprediksi proses-proses yang terjadi di pantai dapat dilakukan dengan membuat model. Pemodelan dapat dilakukan secara fisik melalui uji laboratorium maupun secara matematik. Untuk memodelkan secara matematik diperlukan persamaan pengatur yang mampu

-
1. Staf Pengajar Departemen Teknik Sipil FTSP-ITB dan Ketua Kelompok Riset Eko-Hidraulik, Pusat Rekayasa Industri LPPM ITB.
 2. Staf Pengajar Departemen Teknik Sipil, Fakultas Teknik Universitas Brawijaya, Malang.

Catatan : Usulan makalah dikirimkan pada 07 September 2005 dan dinilai oleh peer reviewer pada tanggal 16 September 2005 - 30 September 2005. Revisi penulisan dilakukan antara tanggal 01 Oktober 2005 hingga 04 Oktober 2005.

memodelkan fenomena yang terjadi di pantai sehingga model sedapat mungkin harus memasukkan seluruh unsur-unsur fisik yang terjadi di pantai.

Pemodelan matematik gelombang dengan menggunakan persamaan gelombang panjang sampai saat ini masih sangat populer untuk memodelkan masalah-masalah tersebut. Namun dalam beberapa kasus pemodelan dengan menggunakan persamaan gelombang panjang masih menghasilkan kesalahan-kesalahan yang signifikan terhadap fase gelombang, terutama jika gelombang yang dimodelkan tidak cukup panjang untuk dapat dikelompokkan sebagai gelombang panjang. Kesalahan tersebut menyebabkan ketidak-akuratan dalam mensimulasikan perambatan gelombang

Untuk memodelkan perambatan gelombang dari perairan dalam ke perairan dangkal dimungkinkan dengan menggunakan persamaan Boussinesq. Persamaan Boussinesq termasuk persamaan gelombang panjang yang mengandung orde paling rendah terhadap pengaruh dispersi dan ketidaklinieran. Dengan menggunakan persamaan Boussinesq yang diturunkan oleh Peregrine pada tahun 1967 [Nwogu, 1993] – persamaan ini untuk selanjutnya disebut bentuk standar persamaan Boussinesq - yang mengambil kecepatan rata-rata kedalaman sebagai variabel tak bebas, Freilich dan Guza pada tahun 1984 [Nwogu, 1993] menunjukkan bahwa persamaan mampu memodelkan evolusi spektrum daya gelombang dengan akurat. Pemodelan selanjutnya juga dilakukan oleh Elgar dan Guza pada tahun 1986 [Nwogu, 1993], dan Elgar pada tahun 1990 [Nwogu, 1993] memberikan hasil yang baik. Liu dkk. Pada tahun 1985 dan Rygg pada tahun 1988 [Nwogu, 1993] menunjukkan bahwa model juga mampu memprediksikan refraksi dan pemusatan gelombang pada batimetri pengujian fisik oleh Whalin [Wei, Kirby, 1998].

Keterbatasan dari bentuk standar persamaan Boussinesq adalah bahwa persamaan hanya mampu memodelkan perambatan gelombang di perairan dangkal. Untuk itu pengembangan dari persamaan tersebut telah dilakukan oleh Witting pada tahun 1984, Murray pada tahun 1989 [Madsen dkk, 1991], Madsen dkk. [1991], dan Nwogu [1993] sehingga persamaan diharapkan mampu juga memodelkan pergerakan gelombang pada perairan transisi dan perairan dalam. Dua persamaan yang disebutkan terakhir adalah yang sangat populer saat ini. Sedangkan persamaan Boussinesq order tinggi non-linier diturunkan oleh Wei dan Kirby [1995] dengan mengambil kecepatan partikel pada elevasi sembarang sebagai variabel tak bebas sama dengan yang digunakan oleh Nwogu [1993]. Dalam penelitian ini, penulis telah mengembangkan suatu model numerik 2-D perambatan gelombang berdasarkan persamaan

Boussinesq yang dikembangkan oleh Nwogu [1993].

2. Persamaan Pengatur

Persamaan pengatur yang digunakan adalah persamaan Boussinesq [Nwogu, 1993] yang terdiri dari persamaan kontinuitas dan persamaan momentum berikut:

$$\eta_t + \nabla \cdot [(h + \eta)\mathbf{u}] + \nabla \cdot \left[\left(\frac{z_\alpha^2}{2} - \frac{z_\alpha^2}{2} \right) h \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \left(z_\alpha + \frac{h}{2} \right) h \nabla [\nabla \cdot (h\mathbf{u})] \right] \quad (1)$$

$$\mathbf{u}_t + g \nabla \eta + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \left[\frac{z_\alpha^2}{2} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_t) + z_\alpha \nabla [\nabla \cdot (h\mathbf{u}_t)] \right] \quad (2)$$

dimana η = elevasi muka air, h = kedalaman lokal, $\mathbf{u} = (u, v)$ = kecepatan pada kedalaman sembarang z_α , g = percepatan gravitasi, dan $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ = gradien operator. Jika dibandingkan dengan bentuk standar persamaan Boussinesq yang diturunkan oleh Peregrine [1967] yang menggunakan kecepatan rata-rata kedalaman sebagai variabel kecepatan maka terdapat penambahan suku dispersi pada persamaan kontinuitas. Perbedaan penggunaan variabel kecepatan tersebut memperbaiki komponen dispersi linier dan membuat persamaan ini dapat digunakan pada perairan yang relatif dalam [Nwogu, 1993]. Linierisasi persamaan pengatur untuk satu-dimensi dan dengan menganggap kedalaman adalah konstan, maka persamaan menjadi:

$$\eta_t + h u_x + (\eta u)_x + \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) h^3 u_{xxx} = 0 \quad (3)$$

$$u_t + g \eta_x + u u_x + \alpha h^2 u_{xxt} = 0 \quad (4)$$

$$\text{dimana } \alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{z_\alpha}{h} \right)^2 + \frac{z_\alpha}{h}$$

Dicoba penyelesaian persamaan di atas dengan menganggap penyelesaian sebagai gelombang periodik dengan frekuensi ω dan angka gelombang k berikut:

$$\eta = a_o \exp[i(kx - \omega t)] \quad (5.a)$$

dan

$$u = u_o \exp[i(kx - \omega t)] \quad (5.b)$$

Substitusi persamaan (5.a) dan (5.b) ke persamaan (3) dan (4) diperoleh :

$$C^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = gh \left(\frac{1 - (\alpha + \frac{1}{3})(kh)^2}{1 - \alpha(kh)^2} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \omega^2 = ghk^2 \left(\frac{1 - (\alpha + \frac{1}{3})(kh)^2}{1 - \alpha(kh)^2} \right) \quad (6)$$

Persamaan (6) adalah persamaan dispersi linier untuk persamaan pengatur (1) dan (2) dengan mengambil kecepatan pada kedalaman z_α sebagai variabel kecepatan. Seperti diungkapkan oleh Madsen dkk. [1991], perbedaan variabel kecepatan yang digunakan atau nilai α yang digunakan akan menghasilkan hubungan dispersi yang berbeda. Jika digunakan kecepatan di dasar perairan sebagai variabel kecepatan maka diambil $\alpha = -1/2$, sedangkan jika digunakan kecepatan pada muka air tenang, maka diambil $\alpha = 0$. Persamaan Boussinesq standar yang menggunakan kecepatan rata-rata kedalaman sebagai variabel kecepatan mengambil $\alpha = -1/3$. Dengan persamaan dispersi linier (6) dicoba-coba beberapa nilai α untuk memperoleh pendekatan terbaik dibandingkan dengan persamaan dispersi linier eksak dari teori gelombang Airy (teori gelombang linier) yang mengambil $\alpha = -2/5$. Dari hubungan dispersi linier tersebut Nwogu [1993] memperoleh nilai $\alpha = -0,390$ yang paling mendekati penyelesaian eksak teori gelombang linier, yaitu dengan mengambil kecepatan partikel pada kedalaman $z_\alpha = -0.531 h$ sebagai variabel tak bebas kecepatan.

3. Skema Numerik

Pemilihan skema numerik untuk penyelesaian **Persamaan (1)** dan (2) didasarkan pada dua faktor. Pertama, harus dipikirkan bahwa pada semua sistem persamaan Boussinesq, skema beda hingga turunan orde satu dibuat dengan akurasi minimal orde dua untuk mengurangi kesalahan pemotongan. Kesalahan pemotongan tersebut secara matematik sebagai suku-suku dispersi yang terlihat pada model. Kesalahan pemotongan ini dapat diatasi dengan mengambil Δx , Δy , dan Δt sekecil mungkin (mendekati nol). Namun hal ini tentunya akan memerlukan jumlah *grid* yang banyak sehingga model tidak efisien. Wei dan Kirby [1995] mengatasi hal tersebut dengan mengambil skema beda hingga orde empat untuk turunan orde satu. Sedangkan untuk suku dispersi sendiri diselesaikan dengan akurasi orde dua. Faktor kedua adalah karena pada suku dispersi persamaan momentum bersifat implisit sehingga perlu diselesaikan dengan teknik tertentu supaya mudah diselesaikan. Untuk mengatasi masalah tersebut, maka digunakan variabel baru yang merupakan fungsi kecepatan sebagai pengganti variabel kecepatan. Dalam paper ini variabel baru tersebut adalah P , Q , R , dan S , sehingga persamaan pengatur (1) dan (2) disusun ulang dalam bentuk berikut:

$$\eta_t + [(h + \eta)u]_x + [(h + \eta)v]_y + [a_1 h^3 (u_{xx} + v_{xy}) + a_2 h^2 [(hu)_{xx} + (hv)_{xy}]]_x + [a_1 h^3 (u_{xy} + v_{yy}) +$$

$$a_2 h^2 [(hu)_{xy} + (hv)_{yy}]]_y = 0 \quad (7)$$

$$P_t + g\eta_x + uu_x + vv_y + R_t - F_{sp} = 0 \quad (8)$$

$$Q_t + g\eta_y + uv_x + vv_y + S_t - G_{sp} = 0 \quad (9)$$

dimana:

$$P = u + h[b_1 hu_{xx} + b_2 (hu)_{xx}] \quad (10)$$

$$Q = v + h[b_1 hv_{yy} + b_2 (hv)_{yy}] \quad (11)$$

$$R = h[b_1 hv_{xy} + b_2 (hv)_{xy}] \quad (12)$$

$$S = h[b_1 hu_{xy} + b_2 (hu)_{xy}] \quad (13)$$

$$\beta = z_\alpha / h ; a_1 = \frac{\beta^2}{2} - 1/6 ; b_1 = \frac{\beta^2}{2} ;$$

$$a_2 = (\beta - \frac{1}{2}) ; b_2 = \beta \quad (14)$$

F_{sp} dan G_{sp} adalah suku tambahan untuk penyerap energi gelombang (*sponge layer*).

Persamaan (7), **(8)**, dan **(9)** diselesaikan secara numerik menggunakan metode beda hingga dengan teknik pemisahan operator. Persamaan pengatur dipisahkan waktu penyelesaiannya menjadi persamaan konveksi, propagasi, dan dispersi. Teknik pemisahan operator dilakukan dengan mengadopsi teknik pemisahan yang dilakukan oleh Benque dkk. [1982] dan teknik pemisahan operator oleh Abarbanel dan Gottlieb [1981]. Dengan menggunakan teknik pemisahan operator, maka permasalahan yang sulit dalam dua-dimensi dapat disederhanakan dalam formasi satu-dimensi dengan beberapa masalah nilai awal. Disamping itu masing-masing persamaan dapat diselesaikan tersendiri dengan skema beda hingga yang sesuai sehingga menjadi lebih mudah. Pemisahan **Persamaan (7)**, **(8)**, dan **(9)** adalah sebagai berikut:

Suku konveksi arah-x:

$$P_t + uu_x = 0$$

$$Q_t + uv_x = 0 \quad (15)$$

Suku konveksi arah-y:

$$P_t + vu_y = 0$$

$$Q_t + vv_y = 0 \quad (16)$$

Suku propagasi arah-x:

$$\eta_t + ((h + \eta)u)_x = 0$$

$$P_t + g\eta_x = 0 \quad (17)$$

Suku propagasi arah-y:

$$\eta_t + ((h + \eta)v)_y = 0$$

$$Q_t + g\eta_y = 0 \quad (18)$$

Suku dispersi:

$$\eta_t + [a_1 h^3 (u_{xx} + v_{xy}) + a_2 h^2 [(hu)_{xx} + (hv)_{xy}]]_x + [a_1 h^3 (u_{xy} + v_{yy}) + a_2 h^2 [(hu)_{xy} + (hv)_{yy}]]_y = 0 \quad (19.a)$$

$$P_t + R_t = 0 \quad (19.b)$$

$$Q_t + S_t = 0 \quad (19.c)$$

Masing-masing persamaan di atas dapat diselesaikan dengan menerapkan metoda yang sesuai. Dalam model ini persamaan konveksi dan propagasi diselesaikan dengan skema beda hingga MacCormack. Sedangkan untuk suku-suku dispersi diselesaikan dengan skema beda hingga terpusat orde empat. Untuk mendapatkan akurasi orde dua, teknik pemisahan operator optimal dapat digunakan [Cahyono and Falconer, 1997]. Dengan menggunakan teknik ini, **Persamaan (7) – (9)** diselesaikan mengikuti algoritma di bawah ini.

$$\Phi^{n+2} = L_{kx} L_{ky} L_{px} L_{py} L_d * L_d L_{py} L_{px} L_{ky} L_{kx} \Phi^n \quad (20)$$

dimana : $\Phi = (\eta, P, Q)$

L_{kx} adalah penyelesaian beda hingga persamaan konveksi arah-x **(15)**. **Persamaan (15)** diselesaikan dengan skema beda hingga eksplisit MacCormack sebagai berikut:

Langkah Prediktor:

$$\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}_{i,j}^* = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}_{i,j}^n - u_{i,j}^n \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{i+1,j}^n - \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{i,j}^n \right\} \quad (21.a)$$

Langkah Korektor: L_{ky} adalah penyelesaian beda

$$\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}_{i,j}^n + \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}_{i,j}^* - v_{i,j}^* \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{i,j}^* - \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{i-1,j}^* \right\} \right] \quad (21.b)$$

hingga persamaan konveksi arah-y **(16)**. **Persamaan (16)** diselesaikan dengan skema beda hingga eksplisit MacCormack sebagai berikut :

Langkah Prediktor:

$$\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}_{i,j}^* = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}_{i,j}^n - v_{i,j}^n \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{i,j+1}^n - \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{i,j}^n \right\} \quad (22.a)$$

adalah penyelesaian beda hingga persamaan propagasi

$$\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}_{i,j}^n + \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}_{i,j}^* - v_{i,j}^* \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{i,j}^* - \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{i,j-1}^* \right\} \right] \quad (22.b)$$

gelombang arah-x **(17)**. Digunakan skema beda hingga explist MacCormack sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} \eta \\ P \end{pmatrix}_{i,j}^* = \begin{pmatrix} \mu \\ P \end{pmatrix}_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \begin{pmatrix} (h+\eta)u \\ g\eta \end{pmatrix}_{i+1,j}^n - \begin{pmatrix} (h+\eta)u \\ g\eta \end{pmatrix}_{i,j}^n \right\} \quad (23.a)$$

Langkah Korektor:

$$\begin{pmatrix} \eta \\ P \end{pmatrix}_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} \eta \\ P \end{pmatrix}_{i,j}^n + \begin{pmatrix} \eta \\ P \end{pmatrix}_{i,j}^* - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \begin{pmatrix} (h+\eta)u \\ g\eta \end{pmatrix}_{i,j}^* - \begin{pmatrix} (h+\eta)u \\ g\eta \end{pmatrix}_{i-1,j}^* \right\} \right] \quad (23.b)$$

L_{py} adalah penyelesaian beda hingga persamaan propagasi gelombang arah-y **(18)**. Digunakan skema beda hingga explist MacCormack sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} \eta \\ Q \end{pmatrix}_{i,j}^* = \begin{pmatrix} \mu \\ Q \end{pmatrix}_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \begin{pmatrix} (h+\eta)v \\ g\eta \end{pmatrix}_{i,j+1}^n - \begin{pmatrix} (h+\eta)v \\ g\eta \end{pmatrix}_{i,j}^n \right\} \quad (24.a)$$

Langkah Korektor :

$$\begin{pmatrix} \eta \\ Q \end{pmatrix}_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} \eta \\ Q \end{pmatrix}_{i,j}^n + \begin{pmatrix} \eta \\ Q \end{pmatrix}_{i,j}^* - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \begin{pmatrix} (h+\eta)v \\ g\eta \end{pmatrix}_{i,j}^* - \begin{pmatrix} (h+\eta)v \\ g\eta \end{pmatrix}_{i,j-1}^* \right\} \right] \quad (24.b)$$

L_d adalah penyelesaian beda hingga persamaan dispersi **(19.a)**, **(19.b)** dan **(19.c)**. Persamaan dispersi **(19.a)**, **(19.b)** dan **(19.c)** diselesaikan dengan skema beda hingga terpusat sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \eta_{i,j}^{n+1} = & \eta_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[a_1 h^3 (u_{xx} + v_{xy})_{i+1,j}^n \right. \\ & - (a_1 h^3 (u_{xx} + v_{xy}))_{i-1,j}^n + \{ a_2 h^2 ((hu)_{xx} + (hv)_{xy})_{i+1,j}^n \\ & - \{ a_2 h^2 ((hu)_{xx} + (hv)_{xy})_{i-1,j}^n \} \\ & - \frac{\Delta t}{2\Delta y} \left[a_1 h^3 (u_{xy} + v_{yy})_{i,j+1}^n - (a_1 h^3 (u_{xy} + v_{yy}))_{i,j-1}^n \right. \\ & + (a_2 h^2 ((hu)_{xy} + (hv)_{yy}))_{i,j+1}^n - (a_2 h^2 ((hu)_{xy} \\ & \left. \left. + (hv)_{yy})_{i,j-1}^n \right] + f(x, y, t) \end{aligned} \quad (25.a)$$

$$P_{i,j}^{n+1} = P_{i,j}^n - R_{i,j}^n + R_{i,j}^{n-1} \quad (25.b)$$

$$Q_{i,j}^{n+1} = Q_{i,j}^n - S_{i,j}^n + S_{i,j}^{n-1} \quad (25.c)$$

Subskrip x dan y masing-masing menunjukkan turunan terhadap x dan y dengan skema beda hingga untuk masing-masing turunan adalah:

Turunan pertama arah-x:

$$(\varphi_x)_{1,j} = \frac{1}{12\Delta x} (-25\varphi_{1,j} + 48\varphi_{2,j} - 36\varphi_{3,j} + 16\varphi_{4,j} - 3\varphi_{5,j}) \quad (27.a)$$

$$(\varphi_x)_{2,j} = \frac{1}{12\Delta x} (-3\varphi_{1,j} - 10\varphi_{2,j} + 18\varphi_{3,j} - 6\varphi_{4,j} + \varphi_{5,j}) \quad (27.b)$$

$$(\varphi_x)_{i,j} = \frac{1}{12\Delta x} (\varphi_{i-2,j} - 8\varphi_{i-1,j} + 8\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i+2,j}), i=3,4,\dots,M-2 \quad (27.c)$$

$$(\varphi_x)_{M-1,j} = \frac{1}{12\Delta x} (3\varphi_{M,j} + 10\varphi_{M-1,j} - 18\varphi_{M-2,j} + 6\varphi_{M-3,j} - \varphi_{M-4,j}) \quad (27.d)$$

φ adalah symbol untuk u , v , hu dan hv .

Untuk turunan pertama dalam arah-y pembagunan beda hingga dilakukan dengan cara yang sama. Sedangkan untuk turunan kedua digunakan skema beda hingga:

$$(\varphi_{xx})_{1,j} = \frac{1}{(\Delta x)^2} (2\varphi_{1,j} - 5\varphi_{2,j} + 4\varphi_{3,j} - \varphi_{4,j}) \quad (28.a)$$

$$(\varphi_{xx})_{i,j} = \frac{1}{(\Delta x)^2} (\varphi_{i-1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i+1,j}), i=2,3,\dots,M-1 \quad (28.b)$$

$$(\varphi_{xx})_{M,j} = \frac{1}{(\Delta x)^2} (2\varphi_{M,j} - 5\varphi_{M-1,j} + 4\varphi_{M-2,j} - \varphi_{M-3,j}) \quad (28.c)$$

Untuk turunan silang digunakan skema beda hingga berikut:

Di titik sudut:

$$(\varphi_{xy})_{1,1} = \frac{1}{4\Delta x\Delta y} [9\varphi_{1,1} + 16\varphi_{2,2} + \varphi_{3,3} - 12(\varphi_{1,2} + \varphi_{2,1}) + 3(\varphi_{1,3} + \varphi_{3,1}) - 4(\varphi_{2,3} + \varphi_{3,2})] \quad (29.a)$$

Di titik batas

$$3(\varphi_{1,j+1} - \varphi_{1,j-1}) + 4(\varphi_{2,j+1} - \varphi_{2,j-1}) - (\varphi_{3,j+1} - \varphi_{3,j-1}) \quad (29.b)$$

Di titik dalam

$$(\varphi_{xy})_{i,j} = \frac{1}{4\Delta x\Delta y} (\varphi_{i+1,j+1} + \varphi_{i-1,j-1} - \varphi_{i-1,j+1} - \varphi_{i+1,j-1}), \quad (i=2,3,\dots,M-1; j=2,3,\dots,N-1) \quad (29.c)$$

Nilai variabel u dan v pada level $(n+1)$ diperoleh dengan menggunakan **Persamaan (10)** dan **(11)** yang menghasilkan sistem tridiagonal matrik. Skema numerik **Persamaan (10)** adalah:

$$P_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^{n+1} + b_1 (h_{i,j}^{n+1})^2 \left(\frac{u_{i-1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i+1,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \right) + b_2 h_{i,j}^{n+1} \left(\frac{(hu)_{i-1,j}^{n+1} - (hu)_{i,j}^{n+1} + (hu)_{i+1,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \right) \quad (30)$$

Persamaan (30) disusun ulang sehingga diperoleh sistem matrik tridiagonal di bawah ini.

$$A_{i,j} u_{i-1,j}^{n+1} + B_{i,j} u_{i,j}^{n+1} + C_{i,j} u_{i+1,j}^{n+1} = P_{i,j}^{n+1} \quad (31)$$

dimana:

$$A_{i,j} = \frac{h_{i,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2} (b_2 h_{i,j}^{n+1} + b_2 h_{i-1,j}^{n+1}) \quad (32.a)$$

$$B_{i,j} = 1 - 2(b_1 + b_2) \left(\frac{h_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} \right)^2 \quad (32.b)$$

$$C_{i,j} = \frac{h_{i,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2} (b_2 h_{i,j}^{n+1} + b_2 h_{i+1,j}^{n+1}) \quad (32.c)$$

Sistem matriks tridiagonal **(31)** diselesaikan secara efisien dengan metode sapuan ganda (Algoritma Thomas). Pengepungan yang serupa dilakukan juga untuk **Persamaan (11)**.

4. Syarat Batas

4.1 Syarat batas pembangkitan (*Incident Boundary*)

Untuk gelombang monokromatik, Nwogu [1993] melinierkan persamaan Boussinesq untuk memperoleh kecepatan horisontal pada pembangkitan gelombang apabila diketahui elevasi muka air η_l dan memperoleh:

$$u_I = \frac{\omega \eta_l}{kh_0 [1 - (\alpha + 1/3)(kh_0)^2]} \cos \theta \quad (33)$$

$$v_I = \frac{\omega \eta_l}{kh_0 [1 - (\alpha + 1/3)(kh_0)^2]} \sin \theta \quad (34)$$

dimana : k adalah angka gelombang, h_0 adalah kedalaman perairan, dan adalah sudut arah perambatan gelombang terhadap sumbu-x.

4.2 Syarat batas pemantulan (*Reflective Boundary*)

Syarat batas refleksi diperoleh dengan menyederhakan persamaan kontinuitas kemudian mengintegalkannya sepanjang domain dan beberapa anggapan sehingga secara umum dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\nabla \eta - n = 0 \quad (35)$$

Penjelasan selengkapnya tentang masalah ini dapat dibaca pada Wei dan Kirby [1995]. Selanjutnya untuk kasus papan vertikal yang sejajar dengan sumbu-x dan

ditempatkan pada lokasi $y = y_L$, syarat batas yang digunakan pada model adalah sebagai berikut:

$$v = 0; \quad \eta_y = 0; \quad u_y = 0; \quad \text{pada } y = y_L \quad (36)$$

4.3 Syarat batas penyerapan (Absorbing Boundary)

Syarat batas penyerapan sering disebut juga dengan syarat batas radiasi atau syarat batas terbuka (*radiating or open boundary*), dimana semua energi gelombang yang datang dari domain hitungan diserap semuanya tanpa pemantulan kembali. Untuk kasus satu dimensi dimana phase kecepatan gelombang C dan arah perambatan adalah θ , syarat batas yang diberikan pada $x = x_L$ adalah:

$$\eta_t + C \cos(\theta) \eta_x = 0 \quad (37)$$

Namun bagaimanapun persamaan pengatur yang digunakan pada dasarnya sangat dispersif sehingga tidak ada phase kecepatan tunggal C yang memenuhi karakteristik di atas. Lebih lagi untuk model dua-dimensi dimana arah perambatan gelombang, θ , belum diketahui terlebih dahulu. Oleh karena itu pada model ditambahkan *sponge layer* untuk menyerap energi gelombang sehingga tidak memantul kembali ke domain hitungan. Uraian lebih detail dapat dilihat pada Wei dan Kirby [1995].

5. Simulasi Model

5.1 Simulasi pada Batimetri Berkhoff dkk.

Hasil percobaan oleh Berkhoff dkk. pada tahun 1982 [Wei and Kirby, 1998] sudah banyak digunakan bertahun-tahun sebagai pengujian standar untuk verifikasi model yang dikembangkan berdasarkan persamaan *mild slope*. Akurasi model tergantung dari beberapa faktor, antara lain apakah pengaruh

pendangkalan, refraksi, difraksi, dan interaksi pengaruh ketidak-linieran sudah masuk dalam model. Skema domain dan topografi dasar perairan percobaan Berkhoff dkk. pada tahun 1982 [Wei dan Kirby, 1998] disajikan pada **Gambar 1**.

Gelombang dibangkitkan pada kedalaman 0,45 m, pada lokasi $x = -10,0$ m. Domain hitungan dibatasi oleh dua dinding vertikal pada lokasi $y = -10,0$ m dan $y = 10,0$ m. Penyerap gelombang ditempatkan pada $x = 12,0$ m. Pada pengujian model digunakan *sponge layer* dengan lebar 3,0 m yang ditempatkan pada ujung akhir domain. Pada dasar batimetri terdapat pemusat gelombang berbentuk *ellips* yang terdapat pada dasar dengan kemiringan konstan 1/50. Kontur kemiringan dasar membentuk sudut 20° terhadap sumbu- y .

Kedalaman perairan didefinisikan sebagai berikut:

$$h = \begin{cases} 0.45, & x' < -5.82 \\ 0.45 - 0.02(5.82 + x'), & x' \geq -5.82 \end{cases} \quad \text{P a d a} \quad (38)$$

akhir domain, dasar perairan dibuat datar dengan kedalaman 0,07 meter.

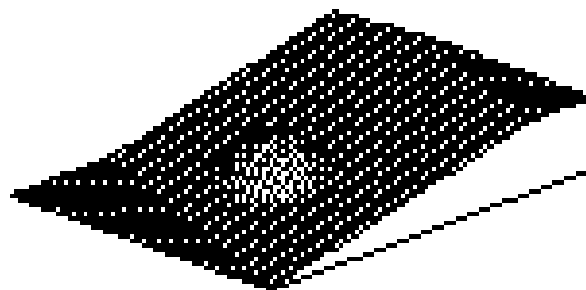
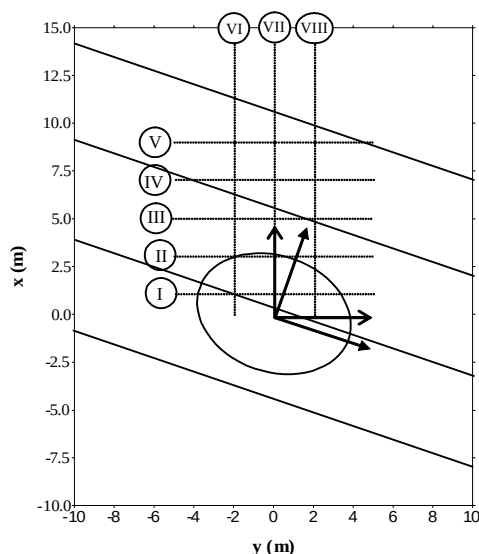
Batas pemusat gelombang berbentuk *ellips* diberikan dalam persamaan *ellips* berikut:

$$\left(\frac{x'}{3}\right)^2 + \left(\frac{y'}{4}\right)^2 = 1 \quad (39)$$

Sedangkan ketebalan pemusat gelombang yang berbentuk *ellips* adalah:

$$d = -0.3 + 0.5 \sqrt{1 - \left(\frac{y'}{5}\right)^2 + \left(\frac{x'}{3.75}\right)^2} \quad (40)$$

dimana : $x' = x / \sin 20^\circ$ dan $y' = y / \cos 20^\circ$.

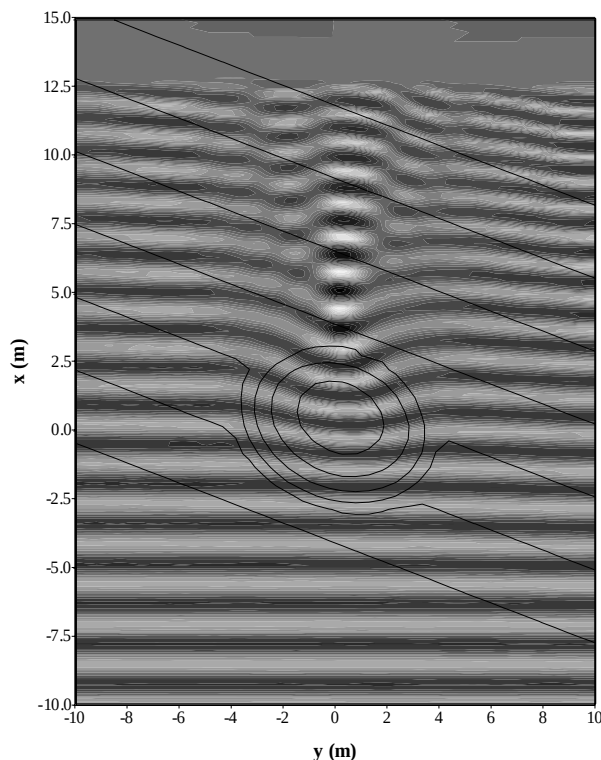


Gambar 1. Skema domain dan topografi dasar perairan percobaan Berkhoff dkk. pada tahun 1982 [Wei dan Kirby, 1998]

Wei dan Kirby [1998] telah mengujikan model FUNWAVE yaitu model yang telah dikembangkan dengan dasar metode prediktor-korektor skema Adams-Bashforth-Moulton, pada batimetri tersebut di atas dan memberikan hasil yang sangat baik. Pengujian pada model ini menggunakan ukuran *grid* dan *interval* iterasi yang sama dengan simulasi dengan FUNWAVE oleh Wei dan Kirby [1998].

Gelombang yang diujikan adalah gelombang reguler dengan periode, $T = 1,0$ detik, dan amplitudo, $a_0 = 0,0232$ m. Ukuran *grid* dalam simulasi diambil sama dengan pengujian oleh Wei dan Kirby, yaitu $\Delta x = 0,05$ m, $\Delta y = 0,1$ m dan $\Delta t = 0,01$ detik.

Gambar 2 menampilkan elevasi muka air hasil simulasi dalam tiga-dimensi tampak atas pada iterasi ke 3501 yaitu pada $t = 35$ detik. Gambar gelap menunjukkan elevasi muka air negatif dan gambar terang menunjukkan elevasi muka air positif. Dari gambar dapat dilihat bahwa gelombang mengalami refraksi dan memusat pada satu lokasi tertentu di belakang elip serta mampu menunjukkan pengaruh difraksi sebagai akibat pengaruh ketidak-linieran. Akibat difraksi maka gelombang setelah terpusat akan kembali menyebar. Gambar gelap agak terang pada daerah *sponge layer* menunjukkan elevasi muka air sekitar nol. Hal ini memperlihatkan bahwa *sponge layer* mampu menyerap energi dengan baik pada batas penyerapan.



Gambar 2. Elevasi muka air hasil simulasi pada iterasi ke-3501 ($t = 35$ detik)

Pencatatan tinggi gelombang dilakukan pada titik-titik sepanjang potongan I-I sampai potongan VIII-VIII pada **Gambar 1**. Untuk memperoleh tinggi gelombang, dicatat serangkaian data *time-series* elevasi muka air dari $t = 35$ detik sampai $t = 45$ detik. Dari data tersebut tinggi gelombang diperoleh dengan mengurangi elevasi muka air maksimum dengan elevasi muka air minimum setiap gelombang dari data *time-series* dan dirata-ratakan. **Gambar 3** menyajikan perbandingan tinggi gelombang relatif antara hasil simulasi model dengan hasil percobaan pada titik-titik yang diukur. Tinggi gelombang relatif adalah tinggi gelombang pada titik hitungan dibagi dengan tinggi gelombang datang.

5.2 Pengujian refraksi-difraksi gelombang

Whalin pada tahun 1971 [Wei dan Kirby, 1998] telah melakukan percobaan refraksi-difraksi non-linear akibat pendangkalan pada dasar setengah lingkaran untuk gelombang yang merambat dari perairan dalam menuju perairan transisi dan perairan dangkal. Kedalaman perairan yang digunakan ditulis dalam persamaan berikut:

$$h(x, y) = \begin{cases} 0.4572 \\ 0.4572 + \frac{1}{25}(10.67 - G - x), \\ 0.1524, \end{cases}$$

$$0 \leq x \leq 10.67 - G$$

$$10.67 - G \leq x \leq 18.29 - G$$

$$18.29 - G \leq x \leq 21.34 \quad (41)$$

dimana:

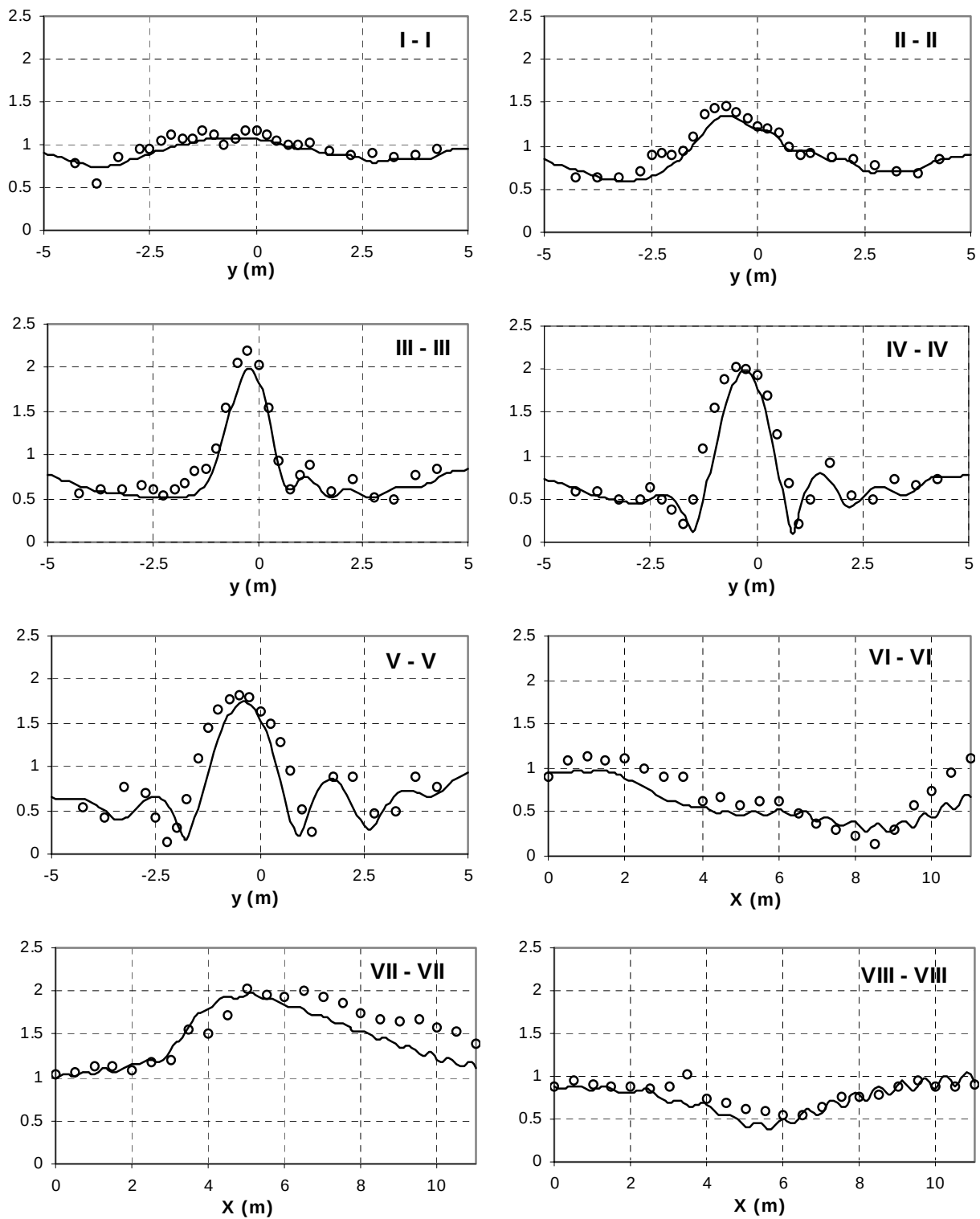
$$G(y) = \sqrt{y(6.096 - y)}$$

Topografi dasar perairan tersebut simetris terhadap garis $y = 3,048$ m, dan lebar domain adalah 6,096 m. Kedalaman perairan bervariasi antara 0,4572 m sampai 0,1524 m. Gambar topografi dasar perairan tersebut disajikan pada **Gambar (4)**.

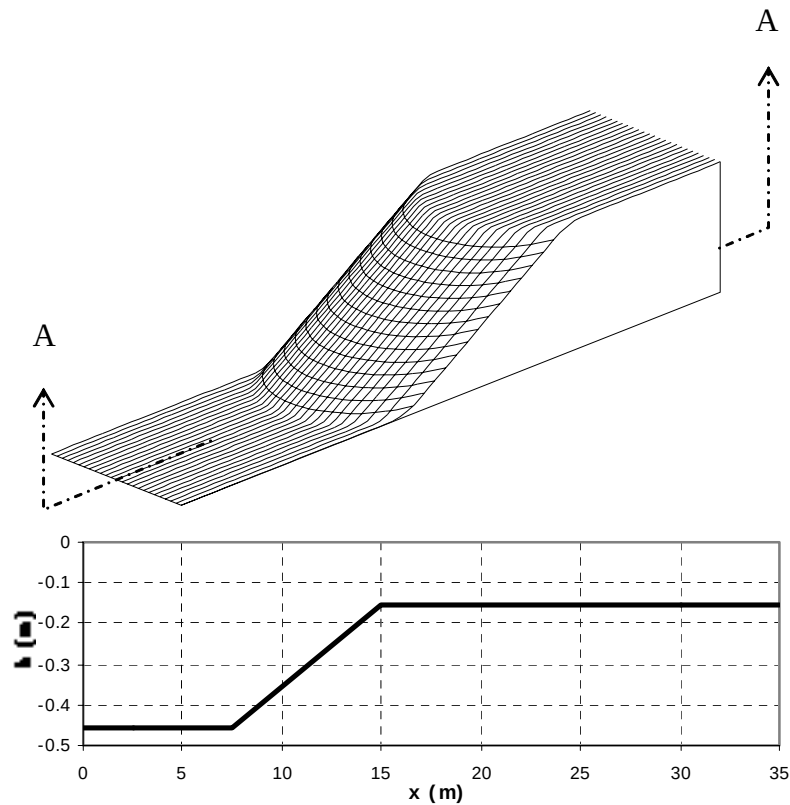
Whalin menggunakan tiga periode gelombang untuk pengujian, yaitu periode 1 detik, 2 detik dan 3 detik. **Tabel 1** menyajikan kriteria gelombang yang digunakan dalam percobaan oleh Whalin pada tahun 1971 [Wei dan Kirby, 1998].

Tabel 1. Data gelombang percobaan Whalin [1971]

Periode (detik)	Amplitudo (m)	h/L_0
1.0	0.0097	0.29
1.0	0.0195	0.29
2.0	0.0075	0.073
2.0	0.0106	0.073
2.0	0.0149	0.073
3.0	0.0068	0.033
3.0	0.0098	0.033
3.0	0.0146	0.033



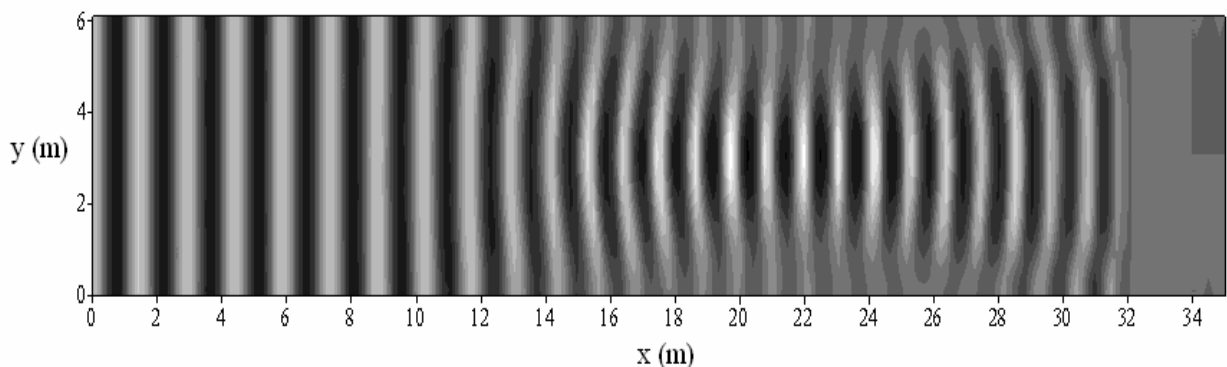
Gambar 3. Perbandingan tinggi gelombang relatif hasil simulasi (—) dengan data pengukuran. (o o o o)



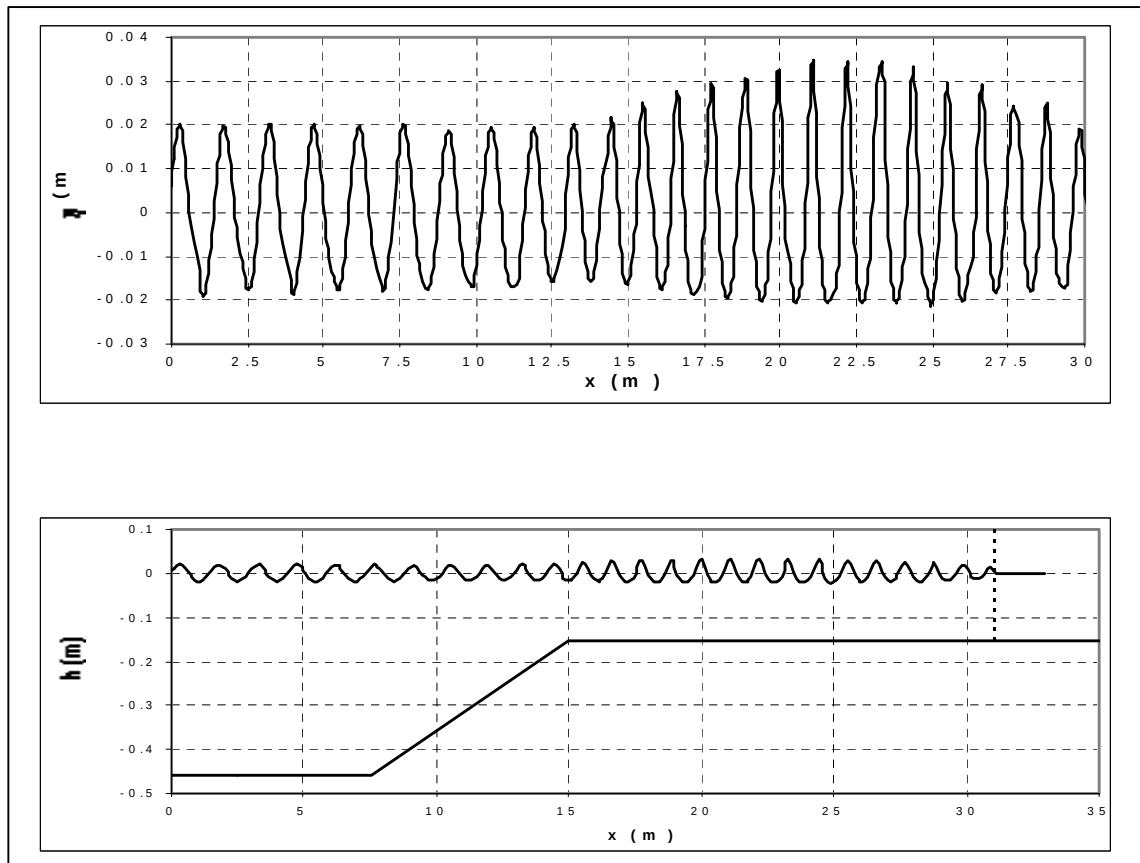
Gambar 4. Dasar perairan uji refraksi dan difraksi Whalin [1971]

Pengujian model difokuskan pada gelombang dengan periode 1 detik. Hal ini disebabkan karena kurangnya data hasil percobaan. Untuk gelombang dengan periode 1 detik dan amplitudo 0,0195 m diujikan pada model dengan menggunakan ukuran *grid* $\Delta x = 0.04064$ m, $\Delta y = 0.4064$ m, dan $\Delta t = 0.0075$ detik. Untuk menyerap energi, *sponge layer* selebar 4.0 meter ditempatkan di ujung akhir domain. **Gambar 5** menampilkan elevasi muka air hasil simulasi pada iterasi ke-3501, yaitu pada $t = 35$ detik. Gambar gelap memperlihatkan elevasi muka air negatif sedangkan gambar terang memperlihatkan elevasi muka air positif. Dari gambar dapat dilihat bahwa gelombang memusat akibat pengaruh pendangkalan dan difraksi kemudian kembali menyebar (terdifraksi) akibat pengaruh ketidak-linieran.

Sedangkan **Gambar 6** menyajikan elevasi muka air sesaat pada sumbu simetri domain $y = 3,048$ m. Elevasi muka air maksimum dan minimum sepanjang sumbu simetri dapat dilihat dengan jelas. Dari hasil pengujian tersebut dan dari beberapa pengujian lain, diperoleh kenyataan bahwa model mampu mensimulasikan fenomena refraksi-difraksi akibat perubahan kedalaman dasar perairan dengan cukup baik. Elevasi muka air hasil simulasi dengan model menunjukkan kemiripan dengan hasil pengujian model Madsen [1992]. Untuk lebih menggambarkan keadaan sebenarnya, gambar elevasi muka air dan dasar perairan pada sumbu simetri juga ditampilkan pada **Gambar 7**.



Gambar 5. Elevasi muka air hasil simulasi pada $t = 35$ detik. Uji refraksi-difraksi Whalin pada tahun 1971 [Wei dan Kirby, 1998]. Data running : $T = 1$ detik, $a = 0,0195$ m.



Gambar 6. Dasar perairan dan elevasi muka air di sumbu simetri $y = 3,048$ m simulasi model pada batimetri Whalin tahun 1971 [Wei dan Kirby, 1998]

5.3 Percobaan Shoaling

Chawla [1995] melakukan percobaan pemusatan gelombang akibat refraksi. Percobaan dimaksudkan sebagai verifikasi model numerik **Ref/Dif 1** yang dikembangkan oleh Kirby dan Dalrymple pada tahun 1994 [Wei dan Kirby, 1998] dan **Ref/Dif S** yang dikembangkan oleh Kirby dan Ozkan pada tahun 1992 [lihat Wei dan Kirby, 1998]. Kedua model dikembangkan berdasarkan persamaan *mild-slope*. Pengujian dilakukan untuk gelombang reguler maupun gelombang acak. Wei dan Kirby [1995] juga telah mengujikan model **FUNWAVE** dan membandingkannya dengan data hasil percobaan. Pengujian dengan **FUNWAVE** memberikan hasil yang lebih mendekati kemiripan dengan data hasil percobaan jika dibandingkan dengan model **Ref/Dif 1** dan **Ref/Dif S**.

Denah percobaan disajikan pada **Gambar 7**. Sebuah benda berbentuk setengah bola dengan jari-jari 2,57 m digunakan untuk memusatkan gelombang. Ukuran kolam percobaan yang digunakan adalah 18,2 m x 20,0 m. Ketebalan benda pemusat didefinisikan :

$$\delta_{shoal} = \sqrt{(9.1)^2 - r^2} - 8.73$$

dimana :

$$r = \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2}$$

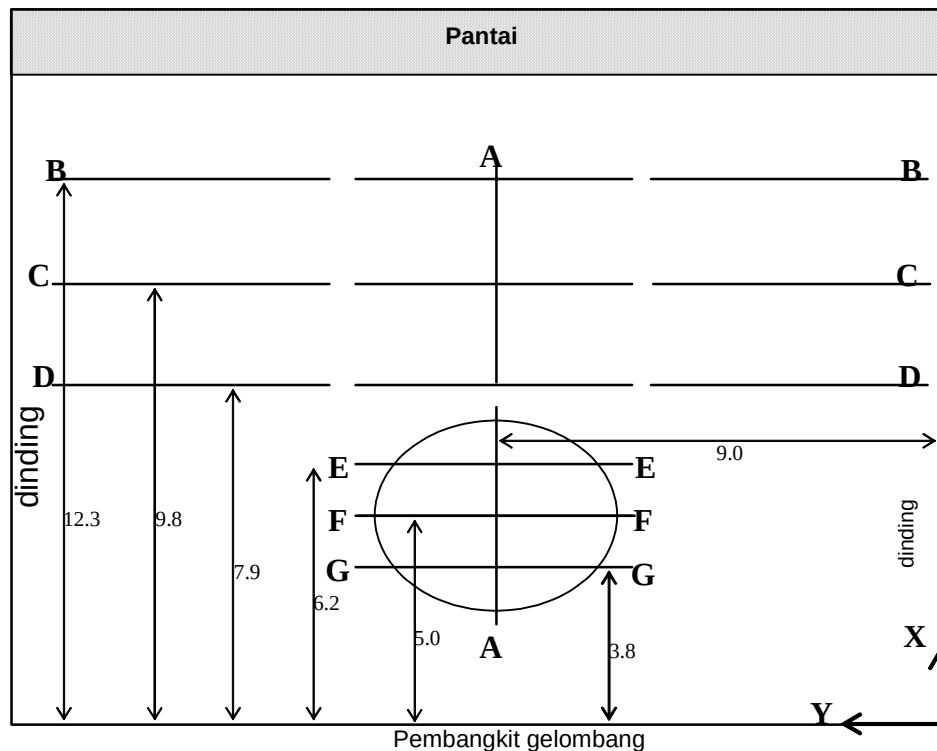
adalah jarak horisontal dari pusat shoaling yaitu ($x_c = 5.0$ m, $y_c = 9.0$ m). Jadi titik y_c bukanlah sumbu simetri kolam.

Gelombang dibangkitkan pada sisi kiri kolam. Pengukuran dilakukan pada titik-titik sepanjang potongan A – A, B – B, C – C, D – D, E – E, F – F, dan G – G.

Pengujian gelombang reguler (tak pecah) menggunakan empat jenis gelombang yang dinamakan TEST1, TEST 2, TEST 3, dan TEST 4. Namun untuk pengujian TEST 3 terjadi kontaminasi data sehingga tidak digunakan. Data gelombang pengujian disajikan pada **Tabel 2**.

Tabel 2. Kriteria gelombang pengujian Chawla [1995]

	Tinggi gelombang (cm)	Periode (detik)	kh
TEST 1	0.98	0.75	3.18
TEST 2	2.01	0.75	3.18
TEST 4	1.18	1.0	1.90



Gambar 7. Denah percobaan shoaling oleh Chwla [1995]

Pengujian model dilakukan dengan menggunakan ukuran grid yang sama dengan Wei dan Kirby dalam menguji modelnya. Ukuran *grid* adalah $\Delta x = 0.05$ m, $\Delta y = 0.05$ m, dan $\Delta t = 0.01$ detik. Total jumlah iterasi adalah 4501 kali. **Gambar 11** menyajikan contoh elevasi muka air hasil simulasi TEST 1 pada iterasi ke 4001 yaitu pada $t = 40$ detik. Gambar terang menunjukkan elevasi muka air positif sedangkan gambar gelap menunjukkan elevasi muka air negatif. Dari gambar dapat dilihat bahwa gelombang memusat pada satu titik kemudian terdifraksi kembali (menyebar). Tinggi gelombang diperoleh dengan melakukan *zero-upcrossing* terhadap data *time-series* elevasi muka hasil simulasi.

Perbandingan antara tinggi gelombang pada titik-titik hitungan hasil percobaan dengan hasil hitungan TEST 1, TEST 2, dan TEST 3 disajikan pada **Gambar 8** sampai **Gambar 10**. Dari gambar dapat dilihat bahwa data hasil simulasi menunjukkan perbedaan yang cukup besar dengan data pengukuran terutama pada lokasi yang jauh pengan benda pemusat gelombang. Hal ini menunjukkan bahwa difraksi hasil simulasi model lebih besar jika dibandingkan dengan data pengukuran. Perbedaan yang cukup besar antara hasil simulasi dan pengukuran kemungkinan juga disebabkan karena penggunaan skema MacCormack untuk menyelesaikan persamaan konveksi dan propagasi yaitu karena skema MacCormack hanya mempunyai akurasi orde dua. Kemungkinan lain yaitu disebabkan karena kesalahan dalam pemisahan suku-

suku turunan silang dan turunan terhadap waktu pada persamaan momentum (suku-suku tersebut dipisahkan dan dimasukkan ke dalam suku dispersi). Untuk pengembangan lebih lanjut perlu diperiksa ulang apakah pemisahan tersebut dapat dibenarkan.

6. Kesimpulan

Dari hasil simulasi model numerik yang dikembangkan, dapat ditarik beberapa kesimpulan berikut:

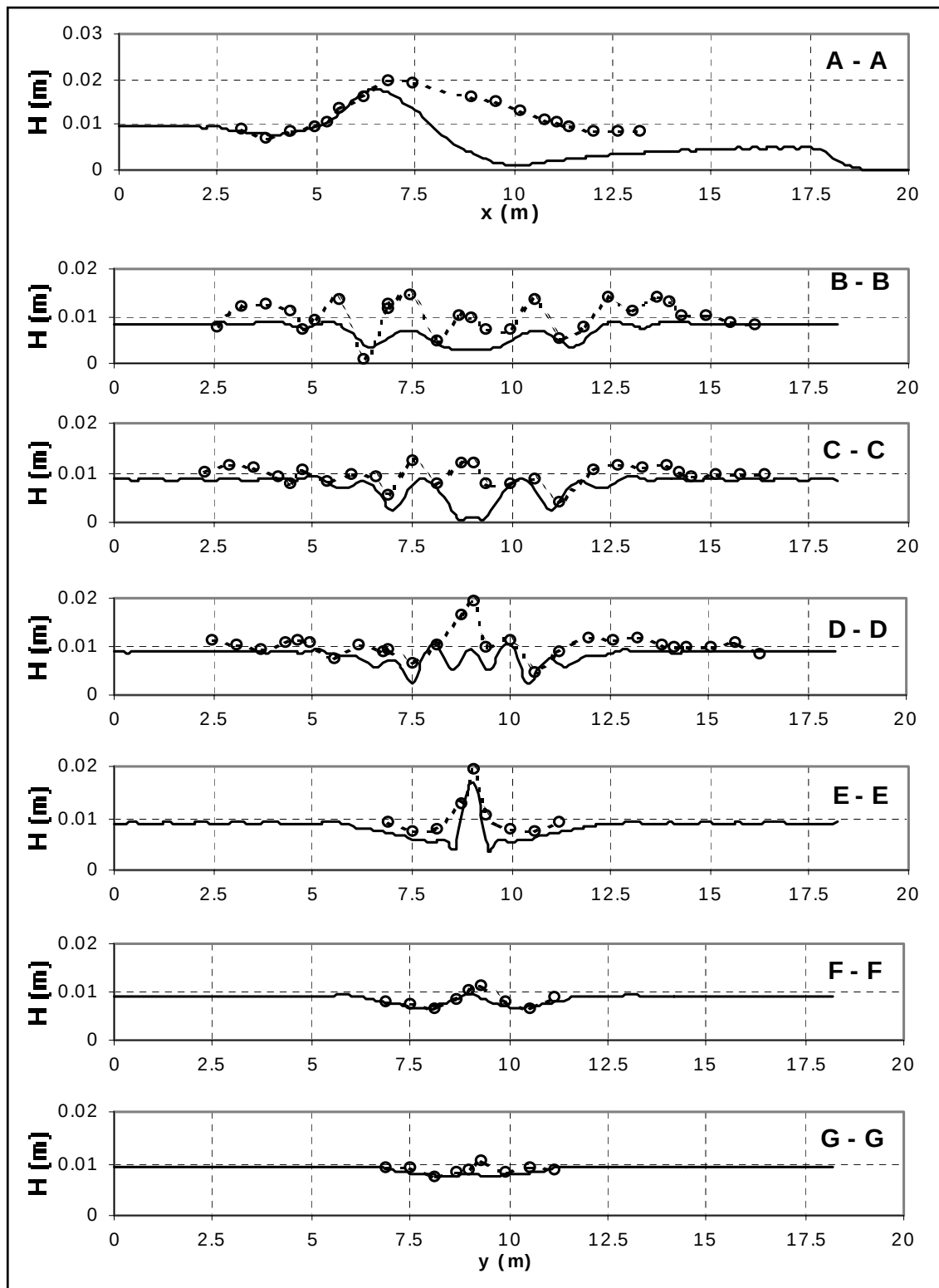
- Model numerik dua-dimensi transformasi gelombang menggunakan persamaan Boussinesq [Nwogu, 1993] yang telah dikembangkan mampu memodelkan perambatan gelombang di perairan dalam maupun perairan dangkal..
- Penggunaan teknik *splitting* untuk penyelesaian persamaan Boussinesq dua-dimensi dapat meningkatkan efisiensi perhitungan karena masalah kompleks dua dimensi dapat dirubah menjadi penyelesaian masalah satu-dimensi yang lebih sederhana, disamping itu langkah waktu perhitungan dapat ditingkatkan karena batasan kemandapan perhitungan selanjutnya bergantung pada kemandapan perhitungan masalah satu-dimensi.
- Pengujian model pada kasus pemusatan gelombang pada percobaan Berkhoff dkk. pada

tahun 1982 dan uji refraksi-difraksi pada percobaan Whalin pada tahun 1971 seperti yang dijelaskan oleh Wei dan Kirby [1998] memberikan hasil yang cukup baik, namun pada pengujian shoaling pada batimetri Chawla [1995] hasil simulasi agak jauh bebrbeda dengan hasil pengukuran meskipun sudah menunjukkan pola gelombang yang sama.

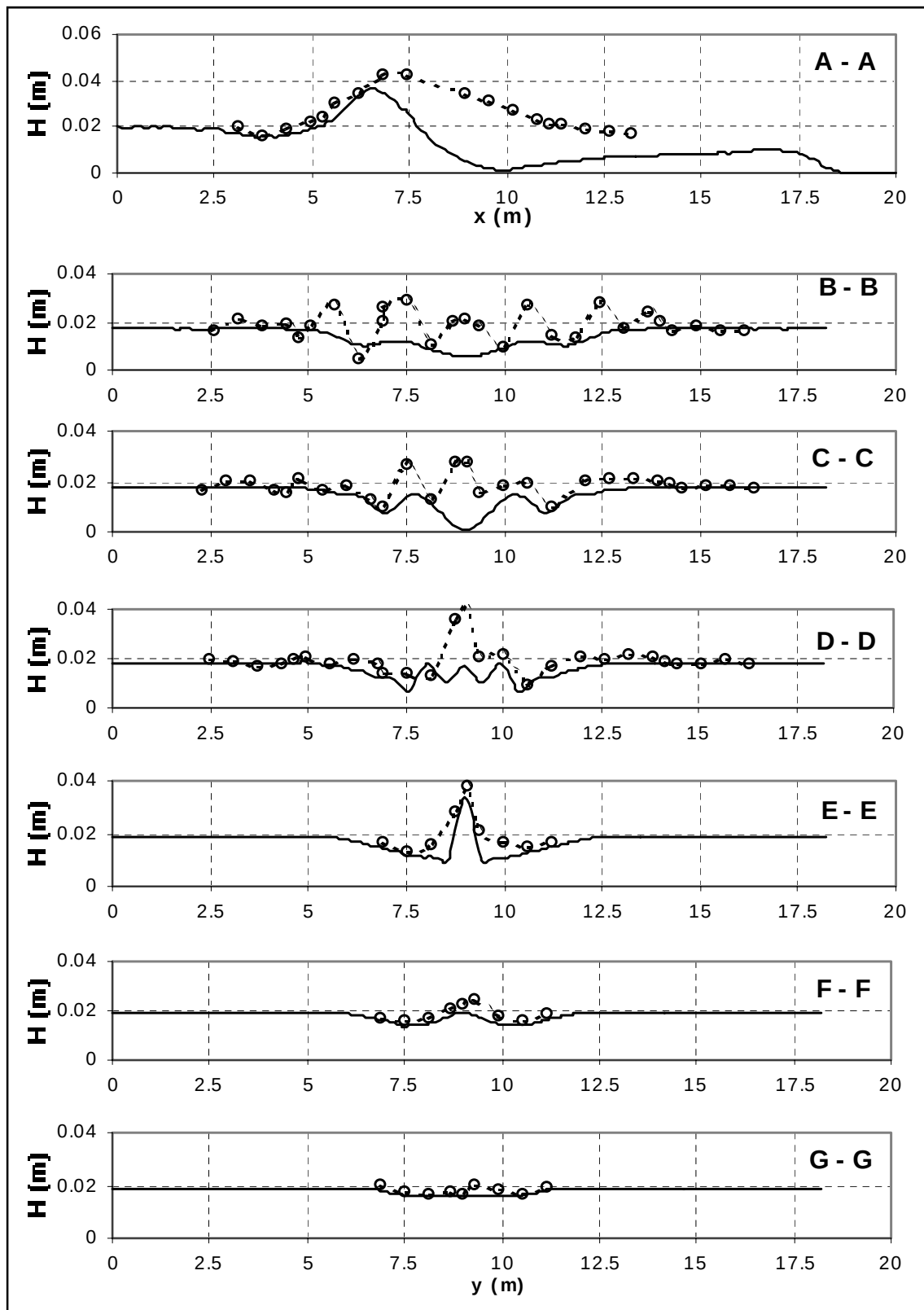
- Model numerik yang dikembangkan dapat lebih disempurnakan dan digunakan untuk memprediksi transformasi gelombang pada perairan yang sebenarnya.

Daftar Pustaka

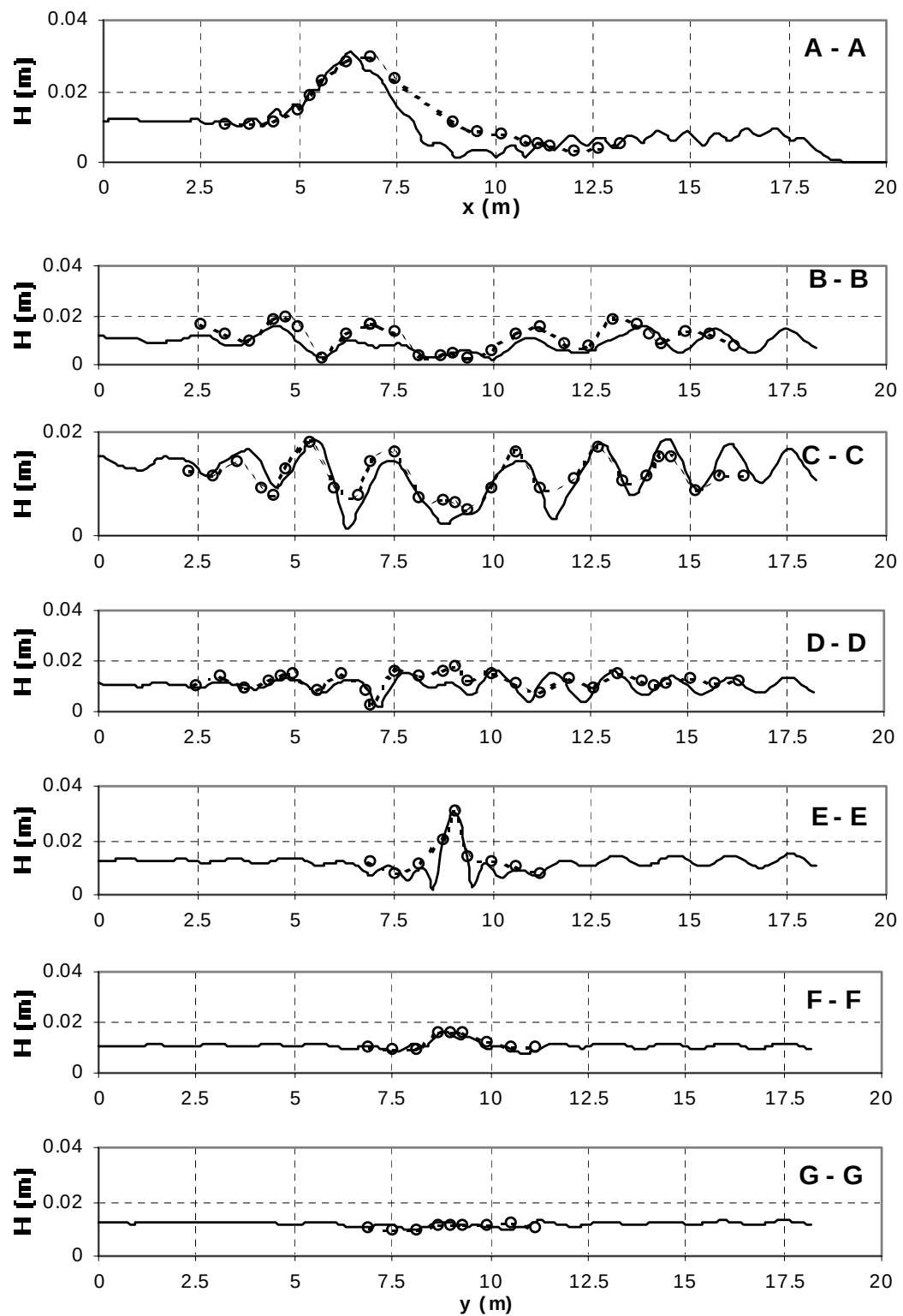
- Abarbanel, S., Gottlieb, D., 1981, "*Optimal Time Splitting for Two-and Three-Dimensional Navier-Stokes Equations with Mixed Derivatives*". Journal of Computational Physics. Vol. 41, 1 – 33.
- Benque, J.P., Cunge, J.A., Feuillet, J., Hauguel, A., and Holly, Jr., F.M., 1982, "*New Method for Tidal Current Computation*", Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering Vol. 108, 397 – 417.
- Cahyono, M., Falconer, R.A., 1997, "*Optimal Time Splitting for Two- and Three-Dimensional Adjective-Diffusion Simulations Using Higher Order Finite Different Schemes*", In: Proc. Regional Seminar on Computational Method and Simulations in Engineering (CMSE'97), Institute Teknologi Bandung, pp.VII.C.5 1 - 10
- Chawla. A., 1995, "*Wave Transformation Over A Submerged Shoal*", A Thesis Submitted to the Faculty of The University of Delaware in partial fulfillment of The Requirement for the Degree of Master of Civil Engineering.
- Madsen, P.A., Murray, R., and Sorensen, O.R., 1991, "*A New Form of The Boussinesq Equations with Improved Linear Dispersion Characteristics*". Coastal Engineering Vol. 15, 371 – 388.
- Nwogu, O., 1993, "*Alternative Form of Boussinesq Equations for Nearshore Wave Propagation*", Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering Vol. 119 (6), 618 – 638.
- Wei, G., Kirby, J.T., 1995, "*Time-Dependent Numerical Code for Extended Boussinesq Equations*", Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering Vol. 121 (5), 251 – 261.
- Wei, G., Kirby, J.T., 1998, "*Simulation of Water Waves by Boussinesq Models*", Research Report CACR-98-02. Center for Applied Coastal Research. Ocean Engineering Laboratory. University of Delaware.



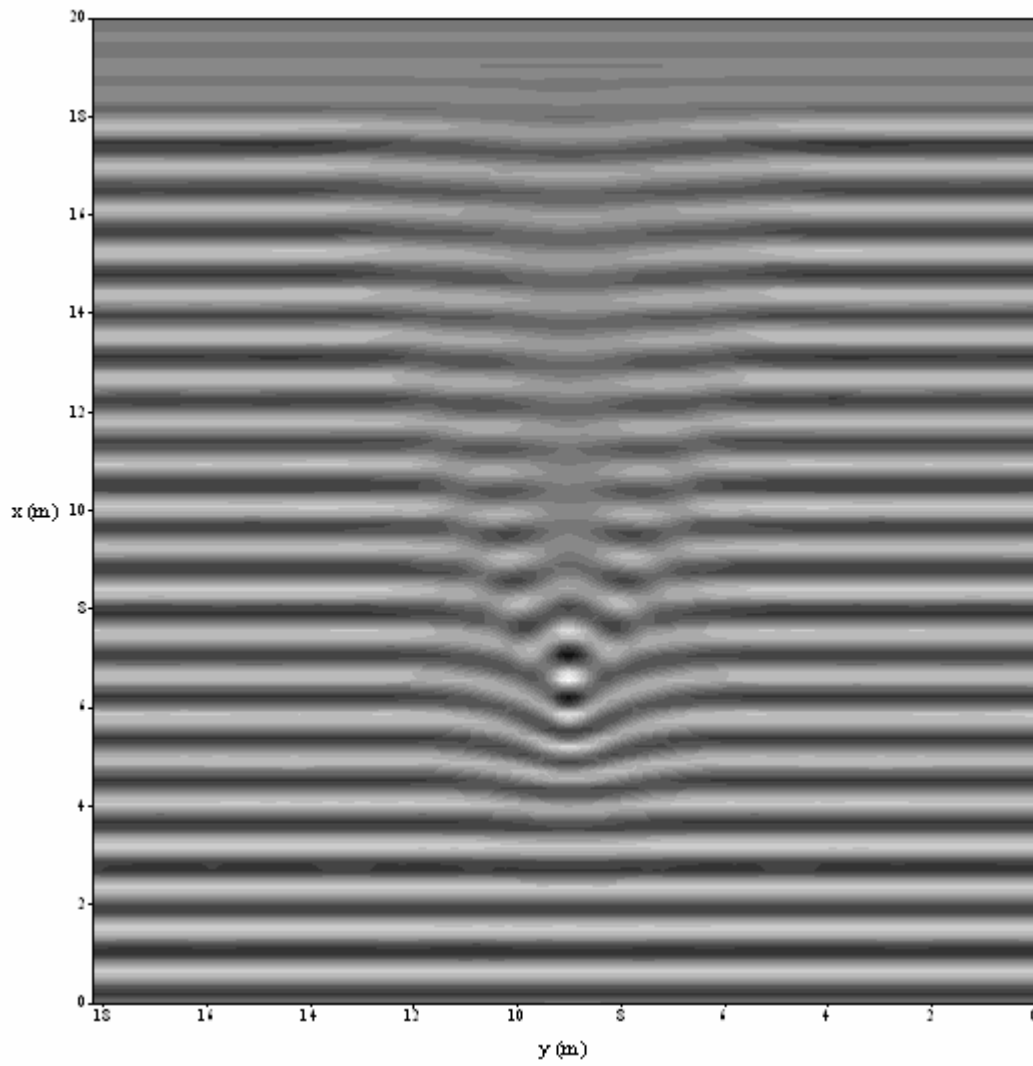
Gambar 8. Perbandingan tinggi gelombang hasil simulasi dan data TEST1 uji shoaling Chawla [1995] (____ = model) dan ooo = percobaan)



Gambar 9. Perbandingan tinggi gelombang hasil simulasi dan data TEST2 uji shoaling Chawla [1995] (— = model) dan ooo = percobaan)



Gambar 10. Perbandingan tinggi gelombang hasil simulasi dan data TEST4 uji shoaling Chawla [1995] (____ = model) dan ooo = percobaan)



Gambar 11. Elevasi muka air tampak atas hasil simulasi model pada batimetri uji shoaling Charla et al [1995] TEST 1