

Pemodelan Dinamika Gelombang dengan Mengerjakan Persamaan Kekekalan Energi

Syawaluddin H¹⁾

Abstrak

Paper ini menyajikan pengerjaan hukum kekekalan energi pada pemodelan hidrodinamika gelombang pendek. Pengerjaan hukum kekekalan energi dilakukan dengan mensuperposisikan persamaan kontinuitas yang dihasilkan dari kekekalan masa dengan persamaan kekekalan energi dan menghasilkan persamaan kontinuitas baru yang sesuai dengan hukum kekekalan masa dan kekekalan energi. Penelitian secara numeris menunjukkan bahwa persamaan dapat digunakan untuk memodelkan gelombang dengan tinggi gelombang terbesar pada periodanya. Persamaan juga dapat memodelkan refraksi, difraksi dan shoaling dengan baik.

Kata-kata Kunci: Persamaan kontinuitas, hukum kekekalan masa dan hukum kekekalan energi.

Abstract

This paper presents application of energy conservation law for short wave modelling. The application is done by superimposing continuity equation that resulted from mass conservation and the equation of energy conservation. The superimposing gives a new form of continuity equation that agree with the mass and energy conservation law. The new equation can model wave with the height as high as the real wave in nature. The model also can simulate other wave dynamic such as refraction-diffraction and shoaling by bathymetry and diffraction in breakwater gap.

Keywords: Continuity equation, mass conservation and energy conservation law.

1. Latar Belakang

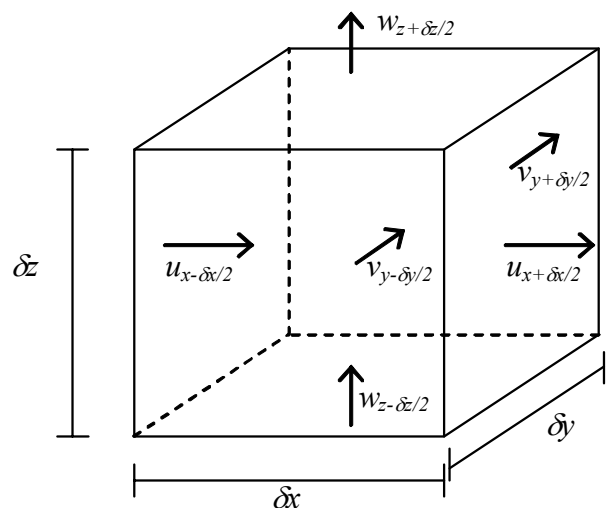
Persamaan gelombang Airy, walaupun dikenal sebagai persamaan gelombang panjang dapat digunakan juga untuk memodelkan gelombang pendek, walaupun dengan tinggi gelombang yang sangat kecil (Syawaluddin, H., dkk., 2005).

Persamaan kontinuitas pada persamaan gelombang panjang Airy diperoleh dari pengerjaan hukum kekekalan masa. Walaupun persamaan tersebut diturunkan dari hukum kekekalan masa, tetapi terdapat peristiwa transportasi energi pada persamaan ini, yaitu terjadinya perubahan energi kinetik menjadi energi potensial. Perubahan dari energi potensial dinyatakan pada perubahan elevasi muka air. Jadi persamaan kontinuitas selain mewakili hukum kekekalan masa, juga harus mewakili hukum kekekalan energi.

Dengan persamaan kontinuitas yang bersifat seperti ini maka diharapkan dapat digunakan untuk memodelkan gelombang untuk tinggi gelombang yang besar, sesuai dengan keadaan di alam.

2. Perumusan Persamaan

2.1 Bentuk umum



Gambar 2.1. Persamaan kekekalan energi

1. Staf Pengajar KK Kelautan, Fakultas Teknik Sipil dan Lingkungan-ITB.

Catatan : Usulan makalah dikirimkan pada 15 Desember 2006 dan dinilai oleh peer reviewer pada tanggal 13 Februari 2007 - 13 Maret 2007. Revisi penulisan dilakukan antara tanggal 6 Maret 2007 hingga 16 Maret 2007.

Energi kinetik pada satu satuan masa air pada aliran

$$\text{air adalah } E_{kx} = \rho \frac{u^2}{2g}, \quad E_{ky} = \rho \frac{v^2}{2g}, \quad E_{kz} = \rho \frac{w^2}{2g}$$

dimana ρ adalah rapat masa air, u , v dan w adalah kecepatan arus pada arah x , y dan z . Pada ruang tinjauan pada **Gambar 2.1**, terdapat input-output energi kinetik pada selang waktu δt , yaitu:

$$\begin{aligned} \text{IO} = & \rho \delta y \delta z \delta t \left(u_{x-\delta x/2} E_{x-\delta x/2}^{kx} - u_{x+\delta x/2} E_{x+\delta x/2}^{kx} \right) + \\ & \rho \delta x \delta z \delta t \left(v_{y-\delta y/2} E_{y-\delta y/2}^{ky} - v_{y+\delta y/2} E_{y+\delta y/2}^{ky} \right) + \\ & \rho \delta x \delta y \delta t \left(w_{z-\delta z/2} E_{z-\delta z/2}^{kz} - w_{z+\delta z/2} E_{z+\delta z/2}^{kz} \right) \end{aligned}$$

Perubahan energi kinetik pada sistim adalah

$$\Delta E = \rho \delta x \delta y \delta z \left(\delta E_{kx} + \delta E_{ky} + \delta E_{kz} \right)$$

Berdasarkan hukum kekekalan, maka

$$\text{IO} = \Delta E$$

Dengan membagi ruas kiri dan kanan persamaan kekekalan dengan $\rho \delta x \delta y \delta z$ dan δt serta dengan mengambil $\delta x \delta y \delta z$ dan δt mendekati nol, maka diperoleh persamaan kekekalan energi adalah

$$\frac{\partial E_{kx}}{\partial t} + \frac{\partial E_{ky}}{\partial t} + \frac{\partial E_{kz}}{\partial t} + \frac{\partial u E_{kx}}{\partial x} + \frac{\partial v E_{ky}}{\partial y} + \frac{\partial w E_{kz}}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

Persamaan (1) adalah persamaan kekekalan energi dalam bentuk umum.

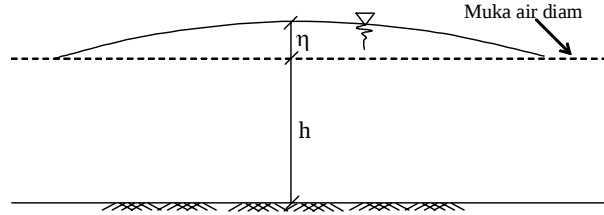
2.2 Bentuk terintegrasi terhadap kedalaman

Analisis hidrodinamik akan lebih mudah bila dilakukan dengan analisis terintegrasi terhadap kedalaman, terutama untuk analisis pada perairan dangkal. Pada metoda ini digunakan kecepatan rata-rata kedalaman dimana kecepatan vertikal (w) tereliminir sehingga hanya ada dua kecepatan yaitu kecepatan horizontal arah x dan y yaitu $\bar{u}$ dan $\bar{v}$.

Sebagai contoh dari persamaan yang terintegrasi terhadap kedalaman adalah persamaan gelombang panjang dari Airy (Dean, Robert G., and Dalrymple). Agar persamaan kekekalan energi dapat diaplikasikan pada analisis hidrodinamika yang terintegrasi terhadap kedalaman, maka diperlukan bentuk persamaan kekekalan energi yang juga terintegrasi terhadap kedalaman yang akan dirumuskan pada bagian berikut. **Persamaan (1)** diintegrasikan terhadap kedalaman,

η = fluktuasi muka air terhadap muka air diam

$$\int_{-h}^{\eta} \left(\frac{\partial E_{kx}}{\partial t} + \frac{\partial E_{ky}}{\partial t} + \frac{\partial E_{kz}}{\partial t} + \frac{\partial u E_{kx}}{\partial x} + \frac{\partial v E_{ky}}{\partial y} + \frac{\partial w E_{kz}}{\partial z} \right) dz = 0$$



Gambar 2.2. Sket muka air akibat gelombang

Aturan Leibniz (Dean, Robert G., and Dalrymple),

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial f}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{\alpha}^{\beta} f dz - f_{\beta} \frac{\partial \beta}{\partial x} + f_{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \quad (2)$$

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial E_{kx}}{\partial t} dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\eta} E_{kx} dz - E_{kx}^{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + E_{kx}^{-h} \frac{\partial (-h)}{\partial t} \quad (3)$$

Berdasarkan persamaan Euler, persamaan pada permukaan adalah

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=\eta} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{\eta}}{\partial x}$$

Syarat batas dinamik adalah bahwa tekanan pada permukaan adalah sama pada semua permukaan yaitu bekerja tekanan atmosfer. Fluktuasi muka air memberikan perbedaan tekanan atmosfer yang sangat kecil, sehingga pada seluruh permukaan mempunyai tekanan atmosfer yang sama yaitu $p_{\eta} = p_{atm}$, sehingga $\partial p_{\eta} / \partial x = 0$. Dengan demikian persamaan Euler pada permukaan menjadi

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=\eta} = 0$$

Perhitungan dengan persamaan ini akan menghasilkan kecepatan permukaan u_{η} yang sangat kecil, hampir mendekati nol. Oleh karena itu energi kinetik pada permukaan (E_{kx}^{η}) dikalikan dengan $\partial \eta / \partial t$.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}, \left(E_{kx}^{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right)$$

pada **Persamaan (3)** adalah bilangan yang sangat kecil yang dapat diabaikan. Selanjutnya, pada analisis ini kedalaman adalah suatu harga yang konstan terhadap waktu, sehingga

$$\frac{\partial (-h)}{\partial t} = 0.$$

Dengan demikian **Persamaan (3)** menjadi

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial E_{kx}}{\partial t} dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\eta} E_{kx} dz = \frac{1}{2g} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\eta} u^2 dz$$

Sesuai dengan formulasi persamaan gelombang panjang dari Airy (Dean, Robert G., and Dalrymple),

didefinisikan $\int_{-h}^{\eta} u^2 dz = \alpha (\eta + h) \bar{u}^2$

dimana $\bar{u}$ adalah kecepatan rata-rata kedalaman pada arah x , sedangkan α adalah suatu koefisien yang berharga 0.5 – 1, dalam hal ini digunakan $\alpha = 1$.

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial E_{kx}}{\partial t} dz = \frac{1}{2g} \frac{\partial}{\partial t} (\eta + h) \bar{u}^2$$

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial E_{kx}}{\partial t} dz = \frac{\partial}{\partial t} (\eta + h) \bar{E}_{kx} = (\eta + h) \frac{\partial \bar{E}_{kx}}{\partial t} + \bar{E}_{kx} \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (4a)$$

dimana $\bar{E}$ adalah energi kinetik pada kecepatan rata-rata kedalaman.

Dengan cara yang sama akan diperoleh

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial E_{ky}}{\partial t} dz = (\eta + h) \frac{\partial E_{ky}}{\partial t} + E_{ky} \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (4b)$$

Selanjutnya, akan diselesaikan $\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial E_{kz}}{\partial t} dz$

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial E_{kz}}{\partial t} dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\eta} E_{kz} dz - E_{kz}^{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

Syarat batas kinematik

$$w_{\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + v_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

Dengan menggunakan anggapan u_{η} dan v_{η} adalah bilangan yang sangat kecil (seperti telah dibahas pada bagian terdahulu), maka

$$u_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \text{ dan } v_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \text{ adalah}$$

bilangan yang sangat kecil yang dapat diabaikan, sehingga syarat batas kinematik permukaan menjadi

$$w_{\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (5)$$

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial E_{kz}}{\partial t} dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\eta} E_{kz} dz - E_{kz}^{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

dengan $E_{kz}^{\eta} = \frac{w_{\eta}^2}{2g}$ dimana seperti pada persamaan

$$(5) w_{\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial t}, \text{ maka}$$

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial E_{kz}}{\partial t} dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\eta} E_{kz} dz - \frac{1}{2g} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^3$$

Selanjutnya didefinisikan

$$\int_{-h}^{\eta} w^2 dz = \frac{w_{\eta}^2 + w_{-h}^2}{2} (\eta + h)$$

dimana untuk perairan dangkal pendekatan ini masih cukup baik.

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial E_{kz}}{\partial t} dz = \frac{1}{2g} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\eta} w^2 dz - \frac{1}{2g} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^3$$

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial E_{kz}}{\partial t} dz = \frac{\partial}{\partial t} \frac{(\eta + h)}{2} (E_{kz}^{\eta} + E_{kz}^{-h}) - \frac{1}{2g} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^3$$

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial E_{kz}}{\partial t} dz = \frac{(\eta + h)}{2} \frac{\partial E_{kz}^{\eta}}{\partial t} + \left(\frac{\eta + h}{2} \right) \frac{\partial E_{kz}^{-h}}{\partial t} + \frac{1}{2} (E_{kz}^{\eta} + E_{kz}^{-h}) \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{1}{2g} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^3$$

Selanjutnya pada bagian berikut diselesaikan

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial u E_{kx}}{\partial x} dz \text{ dan } \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial v E_{ky}}{\partial y} dz$$

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial u E_{kx}}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u E_{kx} dz - u_{\eta} E_{kx}^{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} - u_{-h} E_{kx}^{-h} \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

Dengan u_{η} bilangan yang sangat kecil, maka

$$u_{\eta} E_{kx}^{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{u_{\eta}^3}{2g} \frac{\partial \eta}{\partial x} \approx 0$$

Didefinisikan

$$\int_{-h}^{\eta} u^3 dz = \beta (\eta + h) \bar{u}^3, \text{ dimana } \beta \text{ adalah suatu konstanta.}$$

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial u E_{kx}}{\partial x} dz = \beta \frac{\partial}{\partial x} (\eta + h) \bar{u} \bar{E}_{kx} - u_{-h} E_{kx}^{-h} \frac{\partial h}{\partial x} \quad (7a)$$

Dengan cara yang sama akan diperoleh

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial v E_{ky}}{\partial y} dz = \beta \frac{\partial}{\partial y} (\eta + h) \bar{v} \bar{E}_{ky} - v_{-h} E_{ky}^{-h} \frac{\partial h}{\partial y} \quad (7b)$$

$$\text{Selanjutnya } \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial w E_{kz}}{\partial z} dz = \int_{-h}^{\eta} \partial w E_{kz}$$

$$\int_{-h}^{\eta} \partial w E_{kz} = \frac{w_{\eta}^3}{2g} - \frac{w_{-h}^3}{2g}$$

$$\int_{-h}^{\eta} \partial w E_{kz} = \frac{1}{2g} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^3 - \frac{1}{2g} w_{-h}^3 \quad (7c)$$

Dari **Persamaan-persamaan (4a), (4b), (6), (7a), (7b) dan (7c)**, maka

$$\int_{-h}^{\eta} \left(\frac{\partial E_{kx}}{\partial t} + \frac{\partial E_{ky}}{\partial t} + \frac{\partial E_{kz}}{\partial t} + \frac{\partial u E_{kx}}{\partial x} + \frac{\partial v E_{ky}}{\partial y} + \frac{\partial w E_{kz}}{\partial z} \right) dz = 0$$

menjadi

$$(\eta + h) \frac{\partial \bar{E}_{kx}}{\partial t} + \bar{E}_{kx} \frac{\partial \eta}{\partial t} + (\eta + h) \frac{\partial \bar{E}_{ky}}{\partial t} + \bar{E}_{ky} \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

$$\frac{\eta + h}{2} \left(\frac{\partial E_{kz}^{\eta}}{\partial t} + \frac{\partial E_{kz}^{-h}}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} (E_{kz}^{\eta} + E_{kz}^{-h}) \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{1}{2g} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^3$$

$$+ \beta \frac{\partial}{\partial x} (\eta + h) \bar{u} \bar{E}_{kx} + \beta \frac{\partial}{\partial y} (\eta + h) \bar{v} \bar{E}_{ky} - u_{-h} E_{kx}^{-h} \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$- v_{-h} E_{kz}^{-h} \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{1}{2g} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^3 - \frac{1}{2g} w_{-h}^3 = 0$$

Didefinisikan kedalaman total $H = \eta + h$ dan persamaan dibagi dengan H , serta $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{E}_{kx}$ dan $\bar{E}_{ky}$, ditulis sebagai u , v , E_{kx} dan E_{ky} , persamaan menjadi

$$\left(\frac{E_{kx}}{H} + \frac{E_{ky}}{H} \right) \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial E_{kx}}{\partial t} + \frac{\partial E_{ky}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial E_{kz}^{\eta}}{\partial t} +$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial E_{kz}^{-h}}{\partial t} + \frac{\beta}{H} \frac{\partial u H E_{kx}}{\partial x} + \frac{\beta}{H} \frac{\partial v H E_{ky}}{\partial y}$$

$$- u_{-h} E_{kx}^{-h} \frac{\partial h}{\partial x} - v_{-h} E_{ky}^{-h} \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{1}{2g} w_{-h}^3 = 0$$

Penelitian menunjukkan bahwa persamaan akan menjadi lebih baik bila semua suku dibagi dengan β dan diambil harga $\beta = 1/3$.

$$\frac{3}{H} \left(E_{kx} + E_{ky} + \frac{1}{2} E_{kz}^3 + \frac{1}{2} E_{kz}^{-h} \right) \frac{\partial \eta}{\partial t} + 3 \frac{\partial E_{kx}}{\partial t} + 3 \frac{\partial E_{ky}}{\partial t}$$

$$+ \left(\frac{3}{2} \frac{\partial E_{kz}^{\eta}}{\partial t} + \frac{3}{2} \frac{\partial E_{kz}^{-h}}{\partial t} + \frac{1}{H} \frac{\partial u H E_{kx}}{\partial x} + \frac{1}{H} \frac{\partial v H E_{ky}}{\partial y} \right)$$

$$\frac{1}{H} \left(3 u_{-h} E_{kx}^{-h} \frac{\partial h}{\partial x} + 3 v_{-h} E_{ky}^{-h} \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{1}{2g} w_{-h}^3 \right) = 0 \quad (8)$$

Persamaan (8) adalah persamaan kekekalan energi yang terintegrasi terhadap kedalaman.

dengan $w_{\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial t}$ maka

$$\frac{\partial E_{kz}^{\eta}}{\partial t} = \frac{1}{2g} \frac{\partial}{\partial t} w_{\eta}^2 = \frac{1}{g} w_{\eta} \frac{\partial w_{\eta}}{\partial t} = \frac{1}{g} \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$$

Syarat batas kinematik dasar perairan

$$w_{-h} = - \left(u_{-h} \frac{\partial h}{\partial x} + v_{-h} \frac{\partial h}{\partial y} \right)$$

Pada perairan dangkal, dapat dilakukan pendekatan $u_{-h} = u$ dan $v_{-h} = v$. Pada perairan yang datar atau landai dimana

$$\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y} \approx 0$$

maka $w_{-h} \approx 0$, sehingga suku yang mengandung w_{-h} ataupun

$$\frac{\partial h}{\partial x} \text{ atau } \frac{\partial h}{\partial y} \text{ dapat diabaikan.}$$

3. Penggunaan Persamaan Kekekalan Energi

Dengan anggapan E_{kz}^{η} dan E_{kz}^{-h} , u_{-h} , v_{-h} serta w_{-h} adalah bilangan yang sangat kecil, maka **Persamaan (8)** menjadi

$$\frac{3}{H} (E_{kx} + E_{ky}) \frac{\partial \eta}{\partial t} + 3 \frac{\partial E_{kx}}{\partial t} + 3 \frac{\partial E_{ky}}{\partial t} +$$

$$\frac{1}{H} \frac{\partial u H E_{kx}}{\partial x} + \frac{1}{H} \frac{\partial v H E_{ky}}{\partial y} = 0$$

Dengan mengerjakan diferensial parsial pada

$$\frac{\partial u H E_{kx}}{\partial x} \text{ dan } \frac{\partial v H E_{ky}}{\partial y}, \text{ maka}$$

$$\frac{3}{H} (E_{kx} + E_{ky}) \frac{\partial \eta}{\partial t} + 3 \frac{\partial E_{kx}}{\partial t} + 3 \frac{\partial E_{ky}}{\partial t} +$$

$$\frac{E_{kx}}{H} \frac{\partial u H}{\partial x} + \frac{E_{ky}}{H} \frac{\partial v H}{\partial y}$$

$$+ u \frac{\partial E_{kx}}{\partial x} + v \frac{\partial E_{ky}}{\partial y} = 0 \quad (9)$$

Persamaan (9) akan digunakan untuk analisis hidrodinamika gelombang pendek, dengan mensuperposisikan dengan persamaan gelombang panjang dari Airy.

Persamaan gelombang panjang dari Airy adalah (Dean, Robert G., and Dalrymple),

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial (uH)}{\partial x} + \frac{\partial (vH)}{\partial y} = 0 \quad (10a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (10b)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0 \quad (10c)$$

Keterbatasan persamaan ini adalah bahwa untuk gelombang pendek persamaan hanya dapat digunakan pada amplitudo gelombang yang sangat kecil, $A < 0.1$ m (Syawaluddin, H., dkk., 2005).

Persamaan kontinuitas, **Persamaan (10a)**, diturunkan berdasarkan hukum kekekalan masa saja. Sementara itu fluktuasi muka air η adalah merupakan perubahan energi potensial. Oleh karena itu pada saat muka air naik ($\partial \eta / \partial t > 0$) diperlukan suplai energi, sedangkan pada saat air turun terjadi pelepasan energi. Pada **Persamaan (10a)**, tidak terlihat adanya suplai energi maupun tempat pelepasan energi. $\partial uH / \partial x$ dan $\partial vH / \partial y$ hanyalah sumber masa air saja. Oleh karena itu dengan mensuperposisikan **Persamaan (9)** dengan **Persamaan (10a)**, akan diperoleh persamaan yang dapat mensuplai masa dan energi. **Persamaan (9)** dijumlahkan dengan **Persamaan (10a)** diperoleh

$$\begin{aligned} & \left(I + \frac{3E_{kx} + 3E_{ky}}{H} \right) \frac{\partial \eta}{\partial t} + \left(I + \frac{E_{kx}}{H} \right) \frac{\partial uH}{\partial x} + \\ & \left(I + \frac{E_{ky}}{H} \right) \frac{\partial vH}{\partial y} + \frac{\partial E_{kx}}{\partial t} + \frac{\partial E_{ky}}{\partial t} \\ & + u \frac{\partial E_{kx}}{\partial x} + v \frac{\partial E_{ky}}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Dengan menggunakan persamaan kontinuitas yang baru **Persamaan (11)**, sedangkan persamaan momentum tetap seperti **Persamaan (10b)** dan **(10c)** dikembangkan model numeris.

4. Metoda Numeris

Metoda numeris yang digunakan untuk diskritisasi ruang adalah metoda selisih hingga berbasis pada polinomial Lagrange (Syawaluddin, H., 2006). Sedangkan diferensial waktu diselesaikan dengan metoda integrasi atau dapat disebut juga dengan metoda prediktor-korektor (Syawaluddin, H., dkk., 2005).

Persamaan kontinuitas, **Persamaan (11)** dapat ditulis dalam bentuk

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = P(t) \frac{3}{k} \frac{\partial E_{kx}}{\partial t} - \frac{3}{k} \frac{\partial E_{ky}}{\partial t} \quad (12a)$$

$$\begin{aligned} P(t) = & -\frac{1}{c} \left(\left(I + \frac{E_{kx}}{H} \right) \frac{\partial uH}{\partial x} + \left(I + \frac{E_{ky}}{H} \right) \frac{\partial vH}{\partial y} \right) + \\ & \cdot u \frac{\partial E_{kx}}{\partial x} + v \frac{\partial E_{ky}}{\partial y} \\ k = & I + \left(\frac{3E_{kx}}{H} + \frac{3E_{ky}}{H} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Q(t) \quad (12b)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = R(t) \quad (12c)$$

$$Q(t) = - \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)$$

$$R(t) = - \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)$$

Selanjutnya **Persamaan (12a)**, **(12b)** dan **(12c)** diintegrasikan terhadap waktu, diperoleh

$$\eta^{t2} = \eta^{t1} + \int_{t1}^{t2} P(t) dt - \frac{3}{k} (E_{kx}^{t2} - E_{kx}^{t1}) - \frac{3}{k} (E_{ky}^{t2} - E_{ky}^{t1})$$

$$u^{t2} = u^{t1} + \int_{t1}^{t2} Q(t) dt$$

$$v^{t2} = v^{t1} + \int_{t1}^{t2} R(t) dt$$

$$\int_{t1}^{t2} P(t) dt, \quad \int_{t1}^{t2} Q(t) dt \quad \text{dan} \quad \int_{t1}^{t2} R(t) dt$$

dapat diselesaikan secara numerik dengan mendekati $P(t)$, $Q(t)$ dan $R(t)$ dengan polinomial Lagrange [Syawaluddin, H., dkk., 2005]. Untuk integrasi dari $t_1 = t - \delta t$ sampai $t_2 = t + \delta t$, dimana terdapat 3 titik integrasi yaitu $t - \delta t$, t dan $t + \delta t$, maka

$$\int_{t-\delta t}^{t+\delta t} P(t) dt = \delta t (c_1 P^{t-\delta t} + c_2 P^t + c_3 P^{t+\delta t})$$

dimana $c_1 = 1/3$, $c_2 = 4/3$ dan $c_3 = 1/3$. Begitu juga

$$\int_{t+\delta t}^{t+\delta t} Q(t) dt \quad \text{dan} \quad \int_{t-\delta t}^{t+\delta t} R(t) dt$$

Pada saat $t = t$, dimana $\eta^{t+\delta t}$, $u^{t+\delta t}$ dan $v^{t+\delta t}$ tidak diketahui, maka $P^{t+\delta t}$, $Q^{t+\delta t}$ dan $R^{t+\delta t}$ juga belum diketahui. Oleh karena itu pada tahap awal dilakukan prediksi

$$P^{t+\delta t} = P^t + \frac{\partial P}{\partial t} \delta t$$

$$Q^{t+\delta t} = Q^t + \frac{\partial Q}{\partial t} \delta t$$

$$R^{t+\delta t} = R^t + \frac{\partial R}{\partial t} \delta t$$

Dengan harga-harga hasil prediksi tersebut dapat dihitung harga $\eta^{t+\delta t}$, $u^{t+\delta t}$ dan $v^{t+\delta t}$ prediksi. Karena itu tahap ini dapat disebut dengan tahap prediksi.

Dengan harga $(\eta, u, v)^{t+\delta t}$ yang baru tersebut dihitung lagi harga $(P, Q, R)^{t+\delta t}$ yang baru dan dengan menyelesaikan integrasi diperoleh $(\eta, u, v)^{t+\delta t}$ yang lebih baru lagi dan dilakukan pemeriksaan konvergensi yaitu

$$|\eta_{old}^{t+\delta t} - \eta_{new}^{t+\delta t}| = \varepsilon \text{ begitu juga pada } u \text{ dan } v.$$

Dalam hal syarat konvergensi terpenuhi

$$\eta_{new}^{t+\delta t}, u_{new}^{t+\delta t} \text{ dan } v_{new}^{t+\delta t}$$

adalah hasil yang dicari, bila belum konvergen, maka dengan harga $(\eta, u, v)^{t+\delta t}$ yang baru dilakukan perhitungan $(\eta, u, v)^{t+\delta t}$ yang lebih baru lagi, karena itu tahap ini disebut dengan tahap korektor.

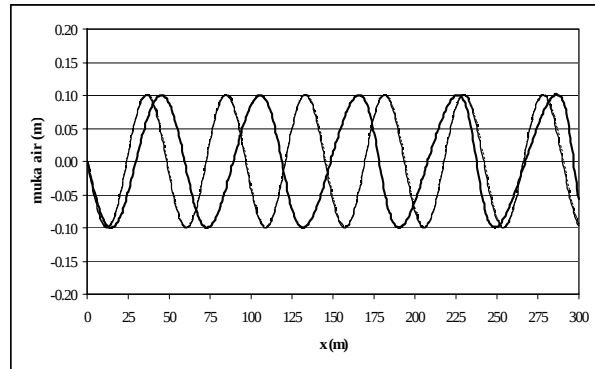
5. Hasil Model

5.1 Panjang gelombang

Pada **Gambar (4.1)** disajikan perbandingan antara panjang gelombang dari teori gelombang linier, panjang gelombang model dan panjang gelombang dari persamaan gelombang Airy. Hal ini dikarenakan penggunaan tekanan hidrodinamis gelombang panjang

$$\left(g \frac{\partial \eta}{\partial x} \text{ dan } g \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)$$

yang dianggap merata pada seluruh kedalaman. Apabila tekanan tersebut dikalikan dengan suatu bilangan yang lebih kecil dari satu, maka akan diperoleh panjang gelombang yang lebih pendek, semakin kecil bilangan pengali tersebut, maka akan semakin kecil panjang gelombangnya. (Syawaluddin, H., 2006).



Gambar 4.1. Perbandingan panjang gelombang

5.2 Tinggi gelombang

Salah satu tujuan dari pengembangan model adalah agar diperoleh persamaan yang dapat mensimulasikan gelombang pendek dengan tinggi gelombang yang besar. Tinggi gelombang terbesar untuk suatu periode gelombang pada perairan dalam diberikan oleh persamaan Pierson-Moskowitz (Sarpkaya T. and Iseacson, Micheal, 1981), yaitu $T^2 / 2A = 19.66$, dimana $2A$ = tinggi gelombang. Jadi untuk periode gelombang 6 detik, tinggi gelombang terbesarnya $(2A)_{\max} = 0.81$ m. Pada **Gambar (4.2)** ditunjukkan bahwa model dapat mensimulasikan gelombang tersebut dengan baik.

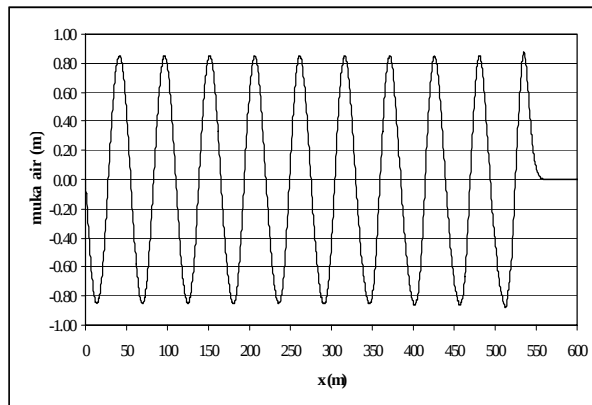
5.3 Shoaling

Pengujian shoaling dilakukan pada perairan dengan kemiringan dasar perairan 0.02, dengan kedalaman mula-mula 10 m. Gelombang yang digunakan adalah gelombang dengan perioda 6 detik, dengan tinggi gelombang mula-mula 0.2 m. Pada **Gambar (4.3)** disajikan perbandingan antara hasil model dengan hasil shoaling dari teori gelombang linier, terlihat bahwa hasil model lebih tinggi dari hasil teori gelombang linier.

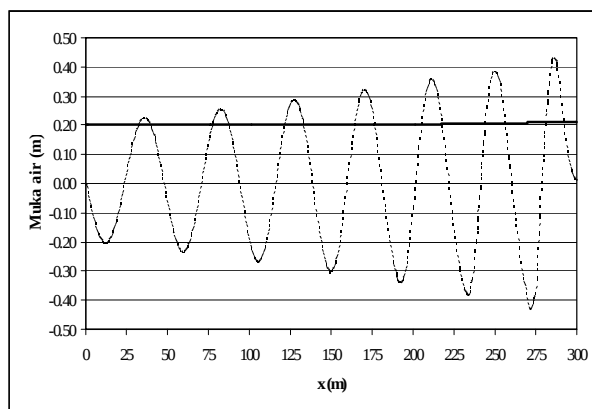
Hal ini dikarenakan penggunaan tekanan gelombang

$$\left(g \frac{\partial \eta}{\partial x} \text{ dan } g \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)$$

panjang yang bekerja sama besar pada seluruh kedalaman, sehingga energi gelombang pada persamaan yang digunakan menjadi terlalu besar. Oleh karena itu ketika gelombang (dari model) memasuki perairan yang lebih dangkal terjadi pemampatan energi yang besar baik akibat berkurangnya kedalaman maupun akibat pemendekan gelombang sehingga dihasilkan pembesaran tinggi gelombang yang lebih besar dari yang seharusnya.



Gambar 4.2. Performance model pada tinggi gelombang 0.85 m, periode 6 detik, kedalaman perairan 30 m



Gambar 4.3. Perbandingan *shoaling* antara teori gelombang linier dan model

Tekanan pada persamaan momentum diperoleh dengan mengintegrasikan persamaan Euler arah z yaitu

$$\frac{1}{\rho} p = \int_{-h}^{\eta} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} \right) dz + \int_{-h}^{\eta} \partial ww + \int_{-h}^{\eta} g dz$$

Analisis numerik penyelesaian persamaan Euler (Syawaluddin, H., 2006), memberikan hasil bahwa distribusi kecepatan horizontal terhadap kedalaman adalah seragam. Hal ini dikarenakan tekanan

hidrodinamis yang disebabkan oleh η hasil $\int_{-h}^{\eta} g dz$

bekerja sama besar pada seluruh kedalaman.

Tekanan hidrodinamis dari teori gelombang linier (Dean, Robert G., and Dalrymple) adalah $p_{hyd} = g\eta \cosh k(h+z) / \cosh kh$. Terlihat bahwa tekanan hidrodinamik $g\eta$ adalah berubah terhadap kedalaman. Oleh karena itu pada model yang dikembangkan hanya menggunakan tekanan hidrodinamik $g\eta$ yang dianggap bekerja pada seluruh kedalaman. Karena itu

panjang gelombang dari model menjadi terlalu panjang dan shoaling yang dihasilkan menjadi terlalu besar karena kelebihan energi.

5.4 Refraksi-difraksi

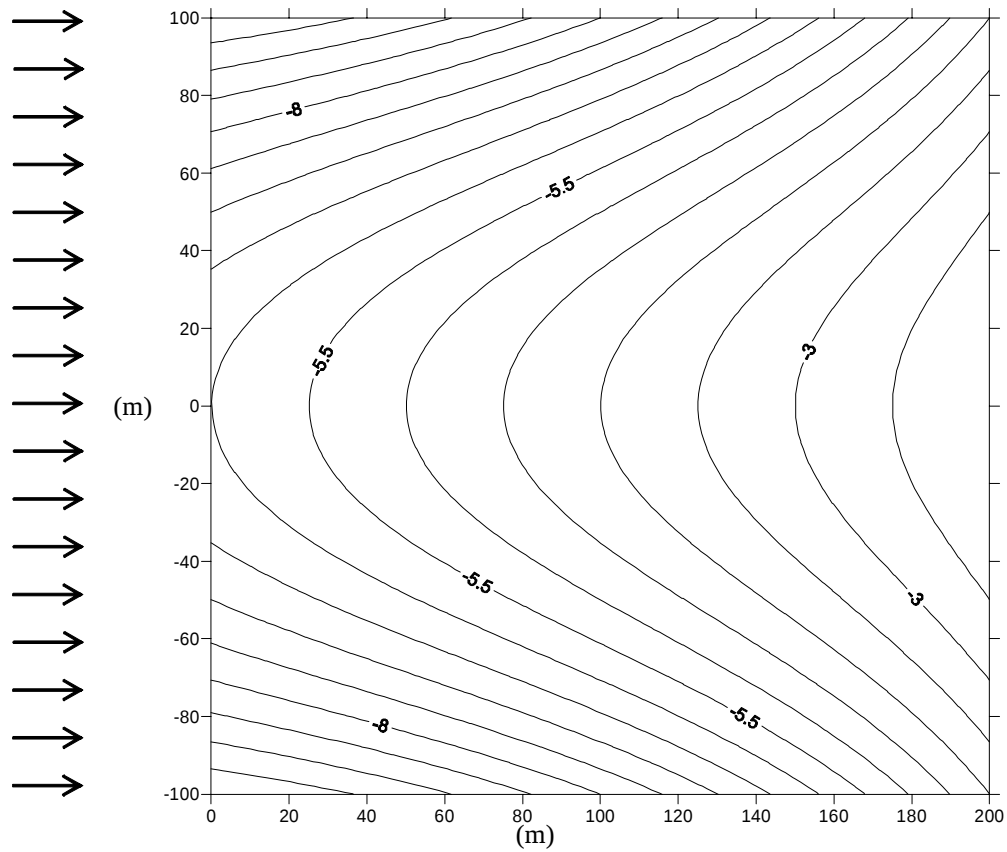
Untuk mengamati kemampuan model dalam mensimulasikan fenomena refraksi-difraksi, model dikerjakan pada suatu kawasan perairan dengan batimetri berpola seperti tanjung (**Gambar 4.4**). Gelombang yang digunakan adalah gelombang dengan periode 6 detik dengan tinggi gelombang mula-mula 1.2 m.

Telah diketahui bahwa pada batimetri seperti ini gelombang akan terefraksi ke arah pusat tanjung, sehingga akibat refraksi yang konvergen ini disertai dengan shoaling, pada pusat tanjung akan terjadi pembesaran gelombang. Kondisi gelombang pada detik ke 24, terlihat bahwa tinggi gelombang pada pusat tanjung jauh lebih besar dari yang lainnya. Pada **Gambar (4.6)** diperlihatkan kontur tinggi gelombang terbesar pada daerah yang telah dilewati gelombang. Gambar-gambar tersebut menunjukkan terjadinya refraksi konvergen atau pemusatan energi gelombang pada pusat tanjung.

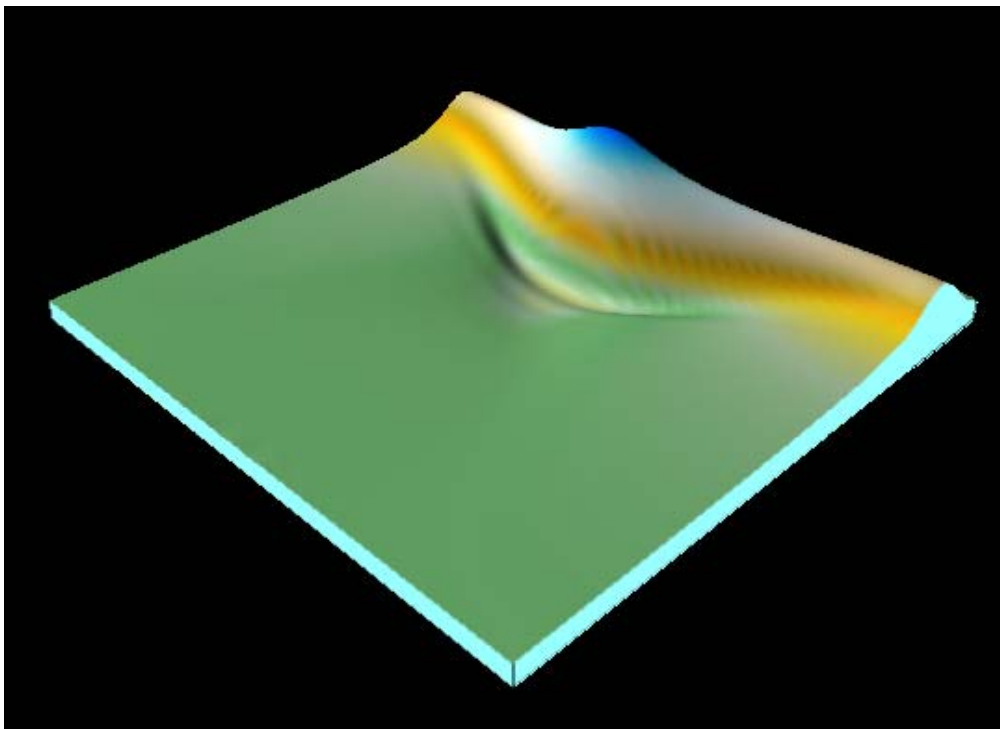
6. Kesimpulan dan Saran

Berdasarkan hasil model numeris yang dikembangkan, maka dapat disimpulkan bahwa pada pengembangan persamaan hidrodinamika sebaiknya dikerjakan juga persamaan kekekalan energi. Hal ini terbukti bahwa pengerjaan hukum kekekalan energi pada persamaan gelombang panjang dari Airy menjadikan persamaan dapat memodelkan gelombang pendek dengan baik. Contoh lain dari penggunaan hukum kekekalan energi pada pengembangan model hidrodinamika adalah teori gelombang linier, dimana pada formulasinya dikerjakan persamaan kekekalan energi dari Bernoulli (Dean, Robert G., and Dalrymple).

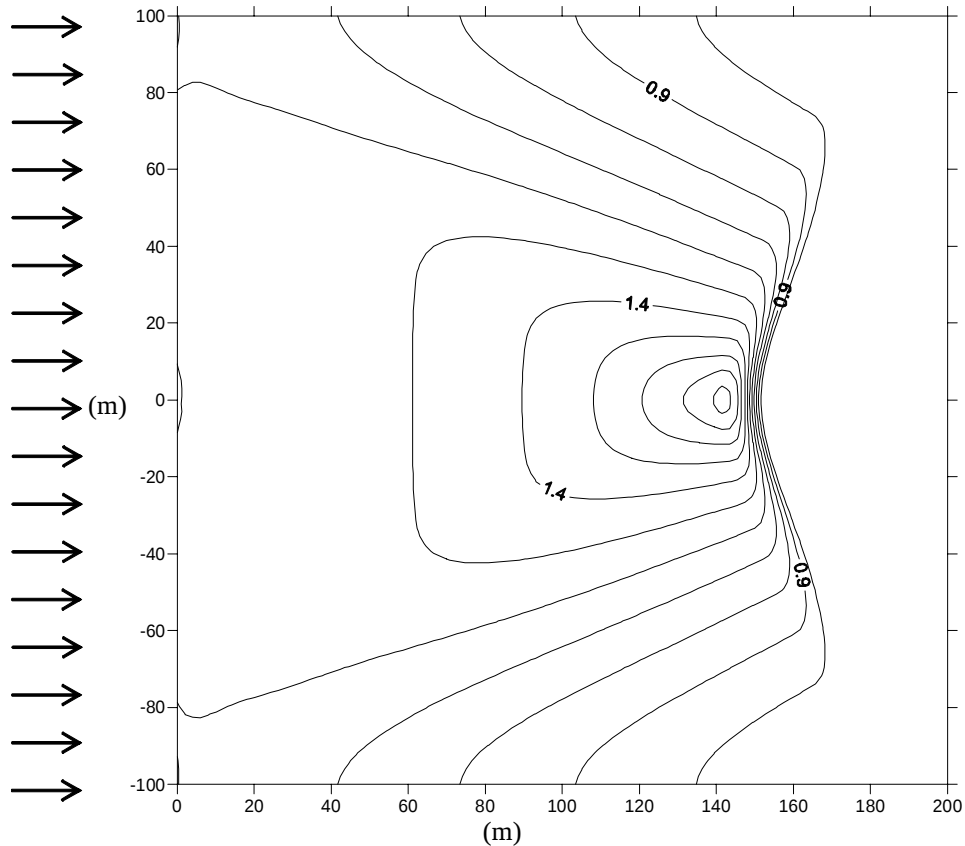
Panjang gelombang yang dihasilkan oleh gelombang lebih panjang dari panjang gelombang dari teori gelombang linier, terlebih lagi terhadap panjang gelombang teori gelombang Stoke. Shoaling yang dihasilkan lebih besar dari pada shoaling dari teori gelombang linier. Kedua hal tersebut dikarenakan penggunaan tekanan gelombang panjang yang bekerja pada seluruh kedalaman. Oleh karena itu untuk mengembangkan model yang lebih baik lagi perlu digunakan tekanan hidrodinamis yang lebih tepat, dimana yang berpotensi digunakan adalah tekanan yang dirumuskan dari persamaan Euler secara lengkap atau dari persamaan Bernoulli.



Gambar 4.4. Batimetri tanjung



Gambar 4.5. Kondisi gelombang pada detik ke 24



Gambar 4.6. Kontur tinggi gelombang terbesar setelah detik ke 24

Daftar Pustaka

- Dean, Robert G., and Dalrymple, "Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists". Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Sarpkaya T. and Iseacson, Micheal, 1981, "Mechanics of Wave Forces on Offshore Structures", Van Nostrand Reinhold Company.
- Shen, S. F., 1977, "Finite Element Method in Fluid Mechanics", Ann. Rev. Fluid Mech., Vol. 9.
- Syawaluddin, H., dkk., 2005, "Model Difraksi dengan Persamaan Gelombang Airy yang Disempurnakan", Thesis S3, Departemen Teknik Sipil, ITB.
- Syawaluddin, H., dkk., 2005, "Integrasi Numeris dengan Menggunakan Polinomial Lagrange", Jurnal Teknik Sipil, Vol. 12, No. 2, Departemen Teknik Sipil, ITB.
- Syawaluddin, H., 2006, "Penyelesaian Persamaan Differensial dengan Menggunakan Polinomial Lagrange Seri I (1 Dimensi)", Jurnal Teknik Sipil, Vol. 13, No. 2, Departemen Teknik Sipil, ITB.

- Syawaluddin, H., 2006, "Koefisien pada Persamaan Euler pada Analisis Gelombang Pendek", Jurnal Teknik Sipil, Vol. 13, No. 4, Departemen Teknik Sipil, ITB.

